

ڈاکٹر زاہر حسین لائبریری

DR. ZAKIR HUSAIN LIBRARY

JAMIA MILLIA ISLAMIA

JAMIA PAGER

NEW DELHI

Please examine the book before
taking it out. You will be res -
ponsible for damage to the book
discovered while returning it

۱۹۶۶

A. H. Faruqi



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

جبر و مقابلہ

حصہ دوم
(برائے انٹرمیڈیٹ)
(مصنفہ مال اینڈ ٹرانٹ)

مترجمہ

مولوی شیخ برکت علی صاحب ایم۔ اے
پروفیسر ریاضی گلپہ جامہ عثمانیہ

۱۳۳۶ھ م ۱۳۳۷ھ م ۱۳۳۸ھ م

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

یہ کتاب میکملن کمپنی کی اجازت سے جن کو
حقوق کاپی رائٹ حاصل ہیں
طبع کی گئی ہے

دیباچہ

جبر و مقابلہ حصہ دؤم

اس کتاب کو ابتدائی جبر و مقابلہ برائے مدارس فوقانیہ کے سلسلہ میں تصور کیا جاتا ہے۔ پہلے چند ابواب کو نسبت، تناسب، تغیر اور سلسلوں پر زیادہ مفصل بحث کے لئے مخصوص کر دیا گیا ہے جن پر ابتدائی جبر و مقابلہ میں سطحی طور پر بحث کی گئی تھی بناؤ علیہ ہم نے کتاب ہذا میں ایسے مسائل اور مشقیں مندرج کی ہیں جن کا اندراج ابتدائی کتاب میں نامناسب تھا۔

اس لحاظ سے اس کتاب کا میدان طالب علم کے لئے تقریباً نیا تصور ہو سکتا ہے اور اس کے مضامین کی وسعت خاص اہمیت رکھتی ہے۔ ان مضامین پر ہم نے عمیق اور بسیط بحث کرنے کی کوشش کی ہے اور ہر دو مسائل اور مشقوں کو پوری تفصیل سے پیش کیا گیا ہے اور ایسا کرنا ہمارے ذاتی تعلیمی تجربہ کی بنا پر ضروری معلوم ہوتا ہے۔ اس کتاب میں ہمارا مقصد یہ رہا ہے کہ مضامین کے جملہ ضروری حصوں پر ایسی سبب و شرح سے بحث کی جائے جو ایک جلد کی ضخامت کے لحاظ سے ناموزوں نہ ہو لیکن آخر کے بعض ابواب میں جگہ کی قلت کی وجہ سے مضمون کا محض سرسری خاکا پیش کرنا ہی ممکن ہو سکا ہے۔ مؤرخ الذکر صورتوں میں ہم نے صرف اس غایت کو ملحوظ رکھا ہے کہ ابتدائی تعلیم کے اغراض کے مطابق مضمون کی محض سطحی تشکیل کر دی جائے اور عمیق تعلیم کے لئے طالب علم کو خاص خاص کتابوں کے مطالعہ کے لئے ہدایات دیے جائیں۔

ترتیب و اجتماع کے باب میں ہم ریوسرٹا ڈبلیو۔ اے۔ وٹ دوسرے
کے نہایت مہر ہون احسان ہیں جنہوں نے ہمیں ازراہ کرم اپنی کتاب Choice
and Chance میں کے ثبوتوں کے استعمال کرنے کی اجازت دی۔ کئی سالوں
تک ہم نے تعلیم دینے میں انہی ثبوتوں کو استعمال کیا ہے۔ اور چونکہ ان کا استدلال
عام قیل اور ابتدائی اصولوں پر مبنی ہے اس لئے ہمیں یقین ہے کہ ان ثبوتوں کی بناء
پر جبر و مقابلہ کے اس حصہ کو سمجھنے میں مبتدی کو زیادہ آسانی ہوگی بہ نسبت ایسے ثبوتوں
سے جو بالعموم جبر و مقابلہ کی دیگر کتب نصاب میں پائے جاتے ہیں۔

استدقاق اور اتساع کی بحث ہمیشہ مبتدی کے لئے پہلی مرتبہ قدرے مشکل
معلوم ہوتی ہے اس میں شک نہیں کہ اس مضمون کی اندرونی مشکلات درحقیقت
زیادہ ہیں۔ احاطہ ریاضی میں عام طور پر جو اہمیت اس کو دیجاتی ہے اور جس تکمیل
طریق پر اسے بحث میں لایا جاتا ہے ان ہر دو وجوہ کی بناء پر یہ مشکلات اور بھی
بڑھ جاتی ہیں۔ اس بنا پر اس باب کو ہم نے معمول سے ذرا بعد میں رکھا ہے۔ اس
کے حصوں کی تشکیل اور ترتیب میں، نیز اثبات کی توضیح کے لئے مناسب مسئلہ کے
انتخاب میں نہایت غور و غوض سے کام لیا گیا ہے اور ہم نے اس سے پہلے تہا
نیمتوں اور معدوم کسور کے دو ابواب درج کر دینے سے اس کو حتی الوسع زیادہ
وجہ پ اور سہل بنانے کی کوشش کی ہے۔

سلسلوں کو جمع کرنے کے باب میں ہم نے ”فروق کے طریقے“ پر دو
نیز اس کی وسیع اور اہم مثالوں پر بہت زور دیا ہے۔ اس طریقہ کی بنیاد محمد
فروق کے احصاء میں ایک نہایت مشہور ضابطہ پر مبنی ہے جس کو خالص جبریت
کے بغیر جبر و مقابلہ کے درس میں داخل کرنا نامناسب معلوم ہوتا ہے۔ محمد
فروق کے ضابطہ کا جو ثبوت ہم نے دفعات ۳۹۵ اور ۳۹۶ میں دیا ہے اس
کے متعلق ہمارا خیال ہے کہ یہ بالکل نیا اور وسیع زاوہ ہے اور اس ضابطہ کے مطابق
”فروق کے طریقے“ کی تشریح کے ضمن میں ہم نے سلسلوں کی چند ایسی دلچسپ

مثالیں درج کی ہیں جن کو اس کے بغیر بہت دیر تک ملتوی رکھنا پڑتا تھا۔
 احوال کے باب میں ہمیں ریورنڈ ٹی۔ سی۔ سمنز - کرائسٹ کالج
 بریکن سے نہایت اہم اور قابلہ امداد ملی ہے۔ اور ہم یہ دل سے اُن کے
 ممنون ہیں نہ صرف اس لئے کہ انہوں نے کتاب پر ہیکٹہ منجی کر کے اس کی اصلاح
 فرمائی بلکہ اس لئے بھی کہ انہوں نے بہت سی ڈپسپ اور خود ساختہ مثالیں اندراج
 کے لئے ہم پہنچائیں۔

آج کل تحلیلی مخدطات یا ہندۂ جمعہات تحلیلی کی کسی کتاب کو مقطعات
 اور ان کے استعمال کے متعلق مطلوبہ تہ حاصل کئے بغیر پڑھنا اور سمجھنا تقریباً ناممکن
 ہے۔ اس خیال سے ہم نے باب ۳۳ میں مقطعات پر مختصر اور ابتدائی
 بحث کی ہے۔ اور ہمیں اُمید ہے کہ طالب علم کو مضمون ریاضی کی مکمل اور
 وسیع تعلیم کے لئے تیار کرنے میں یہ مختصر سا ابتدائی بیان کافی اور مفید ثابت ہوگا۔
 آخری باب میں مساواتوں کے نظریہ پر کل مفید مسائل جو پہلے مطالعہ
 کے لئے مفید ہو سکتے ہیں درج کئے گئے ہیں۔ مساواتوں کا نظریہ جبر و مقابلہ کی
 تعلیم کے سلسلے میں اس طرح قدرتی طور پر خود بخود پیدا ہو جاتا ہے کہ ایسے مسائل کو یہاں
 درج کرنے کے لئے جن کو بالعموم علیحدہ کتب درسیہ میں درج کیا جاتا ہے ہمیں کسی معذرت
 کی ضرورت نہیں دراصل پینتیسویں باب کا بہت سا حصہ اس منزل سے بہت
 پہلے پڑھ لینا فائدہ سے خالی نہیں۔ اور ابواب ماقبل کے مشکل دفات سے قبل اس
 کا مطالعہ نہایت سہولت بخش ثابت ہوگا۔

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ ہر باب کو بذاتِ خود اتنا مکمل بنانے کی کوشش کی گئی ہے
 جتنا کہ ممکن ہے اس لئے ان کے مطالعہ کی ترتیب کو استاد کی رائے اور مصلحت
 کے لحاظ سے بدلا جاسکتا ہے باایں ہمہ اس کی سفارش کی جاتی ہے کہ جلد دفات
 جن پر یہ نشان * دیا گیا ہے پہلی قرأت میں ترک کی جاسکتی ہیں۔
 کتاب ہذا کی ترتیب میں جن اصحاب اور کتب سے ہم نے مدد حاصل کی ہے

اُن کے ضمن میں ایک کتاب ایسی اہم ہے جس کے متعلق یہ کہنا دشوار ہے کہ ہم اس کے کس حد تک زیر احسان ہیں۔ ٹاڈ ہنٹر کا الجبرا فار سکولز اینڈ کالجز ایک عرصہ سے کتب درسیہ میں نہایت مشہور اور مسلمہ کتاب مانی جاتی ہے یہاں تک کہ موجودہ زمانہ میں جبر و مقابلہ کی کسی درسی کتاب کی تصنیف کا اس کی اثر پذیری سے مستغنی ہونا ناممکن ہے۔ با ایں ہمہ اگرچہ ٹاڈ ہنٹر کا الجبرا مسلسل بہارے طلبہ کے استعمال میں رہا ہے تاہم ہم نے اس کی ترتیب و تشکیل سے بہت مدد تک فائدہ نہیں اٹھایا۔ بہت سے ابواب میں ہم نے اس امر کو فائدہ بخش تصور کیا ہے کہ متبادل ثبوت مندرج کئے جائیں۔ نیز ہم نے متن کی عبارت کی تکمیل کے لئے بہت سے نوٹوں کا اضافہ بھی کیا ہے۔ یہ نوٹ جو موجودہ کتاب میں متفرق مقامات پر پائے جاتے ہیں گزشتہ بیس سال کے عرصہ میں مختلف اوقات پر فراہم کئے گئے ہیں۔ اس لئے یہ امر مشکل ہو گیا ہے کہ جن صورتوں میں دیگر مصنفین سے مدد حاصل کی گئی ہے اُن کا شکریہ ادا کیا جائے۔ ہیئت مجموعی ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہم شلووچ، سیورٹ اور لورینٹ کے برہین سنت ہیں۔ انگریزی مصنفین میں ٹاڈ ہنٹر کے الجبرا کے علاوہ ہم نے اکثر ڈی مارگن، کولینس و گرویس اور کوسٹل کی تصنیفات سے مدد حاصل کی ہے۔

ریو ہرنڈ والسن ہولم، ڈی۔ ایس سی پروفیسر ریاضی رائل انڈین انجینئرنگ کالج کی اس غایت کے ہم خاص طور پر ممنون احسان ہیں کہ انہوں نے ازراہ کرم اپنی فراہم کردہ امثلہ کی فہرست میں سے ہمیں سوالات منتخب کرنے کی اجازت عطا فرمائی۔ اور اس سے ہمارے آخری ابواب کو جو فائدہ پہنچا ہم اس کا اظہار شکریہ کے بغیر نہیں کر سکتے۔

اب ہم دیگر احباب و اصحاب کا شکریہ ادا کرتے ہیں جنہوں نے پروف کے مطالعہ اور صحیح میں ہمیں بے حد مدد دی ہے۔ بالخصوص ہم ریو ہرنڈ اینچ سی وائسن کلفٹن کالج کے مشکور ہیں کہ انہوں نے ازراہ کرم تمام کتاب کی نظر ثانی

۱۔ Todhunter's Algebra for Schools & Colleges

۲۔ Sehlômilch

۳۔ Serret

۴۔ Laurent ۵۔ DeMorgan ۶۔ Colenso ۷۔ Gross ۸۔ Chrystal

۹۔ Rev. J. Wolstenholme

اشاعتِ سوم کا دیباچہ

۵

اس کے ہر حصہ میں بہت سی قابلِ قدر تجویزات پیش کیں۔

ایچ۔ ایس۔ ہال

ایس۔ آر۔ ٹانٹ

مئی ۱۹۸۹ء

اشاعتِ سوم کا دیباچہ

اس اشاعت میں متن اور مثالیں نئی اکلا دی ہیں جو اشاعتِ ماقبل میں تھیں۔
دفعاتِ بدل دی گئی ہیں اور سب مثالوں کی از سرِ نو تصدیق کی گئی ہے
اس میں تین سو مثالوں کے ایک مجموعہ کا اضافہ بھی کیا ہے جو ترقی یافتہ
اعلیٰ مدارج کے طلباء کے لئے مفید ثابت ہوگا۔ یہ مثالیں کلیتہً نہیں
وہ ترقی یافتہ کے اور سینٹ ہاؤس کے پرچوں سے حاصل کی گئی ہیں۔
کے ہر حصہ کی توضیح پر خاص توجہ دی گئی ہے اور مشہور یونیورسٹیوں اور
روس کے امتحانات میں سے بھی مناسب مواد فراہم کیا گیا ہے۔

پانچ ۱۹۸۹ء

فہرست مضامین

جبر مقابلہ (حصہ دوم)

پا	مضمون
	اٹھارہواں باب
	سود اور سالیانہ
۱	کسی رقم مفروضہ کا سود اور کُل زر بحساب سود مفرد
۲	کسی رقم مفروضہ کی رہتی اور قیمتِ حاضرہ بحساب سود مفرد
۳	کسی رقم مفروضہ کا سود اور کُل زر بحساب سود مرکب
۴	ظاہری اور اصلی سالانہ شرح کا سود
۵	کسی رقم مفروضہ کی قیمتِ حاضرہ اور رہتی بحساب سود مرکب
۶	امثلہ نمبری ۱۸ (۱)
۷	سالیانہ - تعریفات
۸	ایک سالیانہ ادا نہیں کیا گیا اس کا کُل زر بحساب سود مفرد
۹	ایک سالیانہ ادا نہیں کیا گیا اس کا کُل زر بحساب سود مرکب
۱۰	ایک سالیانہ کی قیمتِ حاضرہ بحساب سود مرکب
۱۱	ایک ملتی سالیانہ کی قیمتِ حاضرہ بحساب سود مرکب
۱۲	

کتنے سالوں کی خسرید
تجدیدِ اجارہ کا جُرمِانہ
امشکہ نمبری ۱۸ (ب)

امیواں باب

لا تاویات

ابتدائی مسئلے

دو مثبت مقداروں کا اوسط حسابی اُن کے اوسط ہندسی سے بڑا ہوتا۔
دو مقداروں کا حاصل جمع معلوم ہو تو اُن کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا
اگر یہ مقداریں مساوی ہوں: نیز اگر حاصل ضرب معلوم ہو تو اُن کا
پھوٹے سے چھوٹا ہوگا اگر یہ مقادیر برابر ہوں۔

مثبت مقادیر کی کسی تعداد کا اوسط حسابی اُن کے اوسط ہندسی سے بڑا
'ا'، 'ب'، 'ج'، ... کا حاصل جمع معلوم ہے؛ 'ا'، 'ب'، 'ج' کی بڑی
قیمت دریافت کر۔

اعظم اور اقل قیمتوں کی آسان صورتیں
امشکہ نمبری ۱۹ (۱)

ن مثبت مقادیر کی م میں دو توتوں کا اوسط حسابی ہمیشہ اُن مقدار
اوسط حسابی کی م میں قوت سے بڑا ہوتا ہے باستثنائے اُس صورت
جبکہ م صفر اور ایک کے درمیان واقع ہو۔

اگر 'ا' اور 'ب' مثبت صحیح عدد ہیں اور 'ا' < 'ب' تو

$$(1 + \frac{1}{a}) > (1 + \frac{1}{b})$$

$$\sqrt[n]{\frac{a+1}{a-1}} < \sqrt[n]{\frac{b+1}{b-1}} \text{ تو } \sqrt[n]{\frac{a+1}{a-1}} < \sqrt[n]{\frac{b+1}{b-1}}$$

۶۱	سلسلہ وشتائی، قوت نما اور لوکارتی میں اس کا استفادہ
۶۲	لوکارتی۔ اور ن لاث کی انتہا جبکہ ن، لامتناہی ہو
۶۳	اجزائے ضربی کی کسی لامتناہی تعداد کا حاصل ضرب
۶۶	امثلہ نمبری ۲۱ (ا)
	و سلسلہ مستقیم ہو تو یہ سلسلہ بھی مستقیم ہوگا
۶۹	اگر $\frac{ع}{۱-ع} > \frac{ون}{۱-ون}$
۷۱	سلسلہ مستقیم ہوگا اگر ہذا $\{ن(۱-\frac{ع}{۱+ع})\} < ۱$
۷۳	سلسلہ مستقیم ہوگا اگر ہذا $\{ن(۱-\frac{ع}{۱+ع})\} < ۱$
۷۵	سلسلہ مستقیم ہے (ن) کا مقابلہ سلسلہ $\{ن(۱-\frac{ع}{۱+ع})\}$ کے ساتھ
۷۷	مساویں سلسلہ $\{ن(۱-\frac{ع}{۱+ع})\}$
۷۷	سلسلہ مستقیم ہوتا ہے اگر ہذا $\{ن(۱-\frac{ع}{۱+ع})\} < ۱$
۷۹	دو متناہی سلسلوں کا حاصل ضرب
۸۲	امثلہ نمبری ۲۱ (ب)
۸۵	بائیسواں باب
"	نامعلوم سر
۸۷	اگر مساوات $f(x) = 0$ کی ن سے زیادہ اصلیں ہوں گی تو یہ مساوات متوازن ہوگی

۸۸	ناہیہ کے لئے نامعلوم ہروں کے اصول کا ثبوت
۹۱	بری ۲۲ (ا)
۹۳	مسئلہ کے لئے نامعلوم ہروں کے اصول کا ثبوت
۹۷	بری ۲۲ (ب)
۱۰۰	تینیسواں باب
۱۰۱	جزوی کسور
۱۰۶	بر میں تحلیل
۱۰۸	پہلیاؤ میں جزوی کسور کا استعمال
۱۱۱	نمبری ۲۳
۱۱۲	چوبیسواں باب
۱۱۳	متوالی سلسلے
۱۱۵	سلسلہ کا حاصل جمع
۱۱۹	عل
۱۲۲	بری ۲۴
۱۲۳	پچیسواں باب
۱۲۴	کسور مسلسل
۱۲۵	مسلسل کسور کی شکل میں لانا
	مسلسل کسور کی اصلی قیمت سے متبادلاً کم آمد زیادہ ہوتے ہیں

۱۲۵	متواتر مستدقوں کے بنانے کا کلیہ
۱۲۸	قن ل - قن ل _{۱-۵} = (۱-۵) ^ن
۱۲۹	اسٹل نمبری ۲۵ (ا)
	ہر مستدق اپنے پہلے کے مستدق کی نسبت مسلسل کسر کی قیمت کے
۱۳۱	مقابلہ زیادہ قریب ہوتا ہے۔
۱۳۲	کسی مستدق کو مسلسل کسر کے مساوی لینے سے جو غلطی واقع ہوتی ہے اُس کی حدود۔
۱۳۵	ہر مستدق کسی ایسی کسر کی نسبت جس کا نسب نامہ کم ہو مسلسل کسر کی قیمت کے زیادہ قریب ہوتا ہے۔
۱۳۷	$\frac{ق}{ل} < یا > لا اگر بالترتیب \frac{ق}{ل} < یا > \frac{ق}{ل}$
	اسٹل نمبری ۲۵ (ب)
۱۳۲	پچھیسواں باب
"	درجہ اول کی غیر معین مساواتیں
۱۳۳	مساوات لا - ب ما = ج کا حل
۱۳۵	اگر مساوات کا ایک حل دیا گیا ہو تو عام حل معلوم کرو
"	مساوات لا + ب ما = ج کا حل
۱۳۷	اگر مساوات کا ایک حل دیا گیا ہو تو عام حل معلوم کرو
"	مساوات لا + ب ما = ج کے حلوں کی تعداد

۱۵۰

لا + ب ما + جی = ر { کامل

۱۵۲

اشد نمبری ۲۶

ستائیسواں باب

متوالی مسلسل کنسور

۱۵۵

۱۵۷

۱۵۸

۱۶۰

۱۶۲

۱۶۴

۱۶۶

۱۶۷

۱۷۰

۱۷۳

۱۷۴

۱۷۵

۱۷۶

۱۷۸

۱۷۹

۱۸۲

عددی مثال
ایک دوری مسلسل کی قیمت درجہ دوم کی ایک مقدار اصرم کے مساوی ہوتی ہے
اشد نمبری ۲۶ (۱)
درجہ دوم کی ایک مقدار اصرم کی مسلسل سر کی شکل میں تحویل
خارج قیمت متوالی ہوتے ہیں۔
دور جزوی خارج قسمت ۲ پر ختم ہوتا ہے
اولیٰ آخر سے مساوی افضل جزوی خارج قسمت باہم مساوی ہوتے ہیں
دوروں کے اقبل الآخر مستحق
اشد نمبری ۲۶ (ب)

اٹھائیسواں باب

درجہ دوم کی غیر معین مساواتیں

لا + ۵۲ لا ما + ب ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کامل

۱۷۶

۱۷۸

۱۷۹

۱۸۲

مساوات لا - ث ما = ا کو ہمیشہ حل کیا جاسکتا ہے

مساوات لا - ث ما = ۱ - ا کامل

مساوات لا - ث ما = ا کا عام حل

مساوات لا - ث ما = ۱ کامل

۱۸۴	دانشین کے سوالات
۱۸۶	امثلہ نمبری ۲۸
۱۸۹	ایتیسواں باب
۱۹۰	سلسلوں کا جمع کرنا
۱۹۲	گزشتہ قاعدوں کا خلاصہ
۱۹۵	سلسلہ حسابیہ میں ن اجزائے ضربی کا حاصل ضرب عن ہے
۱۹۹	سلسلہ حسابیہ میں ن اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کا مستکانی عن ہے
۲۰۰	تفریق کا طریقہ
۲۰۱	جلد عن اجزائے ضربی کا حاصل جمع
۲۰۳	کثیر ضلعی اور اشکالی اعداد
۲۰۶	پاسکل (Pascal) کا مثلث
۲۰۸	امثلہ نمبری ۲۹ (ا)
۲۱۴	فروقوں کا طریقہ
۲۱۵	یہ عمل اس صورت میں کام آسکتا ہے جبکہ عن، ن کا کوئی ناطق صحیح تفاعل ہو
۲۱۸	آزادی، ن کا منطق صحیح تفاعل ہو تو سلسلہ جی لایا ایک متوالی سلسلہ ہوگا۔
۲۲۵	متوالی سلسلے کی دیگر صورتیں
۲۲۶	امثلہ نمبری ۲۹ (ب)
۲۳۱	جمع کے عام قاعدے
۲۳۳	سلسلہ $1 + 2 + 3 + \dots + n$ کا حاصل جمع
	برنولی (Bernoulli) کے اعداد
	امثلہ نمبری ۲۹ (ج)

۲۴۰	تیسواں باب
"	عددوں کا نظریہ
"	اصولوں کا بیان
۲۴۲	مفرد عددوں کی تعداد لامتناہی ہے
"	کوئی اطلاق جبریہ مضابطہ ایسا نہیں ہے جو مفرد عددوں کو تعبیر کرے۔
۲۴۳	کوئی عدد اپنے مفرد اجزائے ضربی میں صرف ایک بذلیقہ سے تحلیل کیا جاسکتا ہے
"	کسی مفروضہ عدد صحیح کے مقسوم علیہ کی تعداد
۲۴۴	کوئی عدد صحیح جن طریقوں سے دو اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے ان کی تعداد
۲۴۶	کسی مفروضہ عدد صحیح کے مقسوم علیہ کا حاصل جمع
۲۴۸	کسی مفرد عدد کی بڑی سے بڑی قیمت جو ان میں شامل ہے۔
"	متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب الے پر پورا تقسیم ہوتا ہے
"	(فرما (Fermat) کا مسئلہ)۔ اگر مفرد ہو اور n مفرد ہو بمقام n کے
۲۵۱	تو n - ۱ = ضعیف (ف)
۲۵۲	امثلہ نمبری ۳ (ا)
۲۵۶	مستطابق کی تعریف
"	اگر n بمقام n کے مفرد ہو تو $۱, ۲, ۳, \dots, (n-1)$ کو n پر تقسیم
"	کرنے سے مختلف باقیات حاصل ہوتی ہیں
۲۵۹	فہ (ا) n = فہ (۱) \times فہ (ب) \times فہ (ج) \times فہ (د) \dots
۲۶۰	فہ (ع) = n - ۱ \times (۱ - $\frac{1}{۲}$) \times (۱ - $\frac{1}{۳}$) \times (۱ - $\frac{1}{۴}$) \dots
۲۶۳	[ولسن کا مسئلہ]: $۱ + (n-1) =$ ضعیف (ف)۔ جہاں n کوئی عدد مفرد ہو
۲۶۴	اعداد مفرد کی ایک مخصوص خاصیت
"	ولسن کا مسئلہ: (دوسرا ثبوت)

۳۰۰	اشکال نمبری ۳۲ (۱)
۳۰۲	مرکب واقعات
۳۰۴	اگر دو غیر تابع واقعات میں سے ہر ایک کا احتمال معلوم ہو تو دونوں کے واقع ہونے کا احتمال قی قی ہے۔
۳۰۷	یہ ضابطہ تابع واقعات کے لئے بھی کارآمد ہے
۳۰۸	ایک واقعہ کا احتمال جو کسی دوسرے کے منافی طریقوں سے واقع ہو سکتا ہے
۳۱۲	اشکال نمبری ۳۲ (ب)
۳۱۵	ن استخوانوں میں کسی واقعہ کے عین ر مرتبہ وقوع پذیر ہونے کا احتمال۔
۳۱۸	توقع اور ظنی قیمت
۳۲۱	بازیوں کا مسئلہ
۳۲۳	اشکال نمبری ۳۲ (ج)
۳۲۶	مقلوب احتمال
۳۲۸	برنالی کے مسئلہ کی شہادت
۳۲۹	ضابطہ فر = $\frac{ق ق}{ق ق}$ کا ثبوت
۳۳۴	مہمصر شہادت
۳۳۷	منقولی شہادت
۳۳۸	اشکال نمبری ۳۲ (د)
۳۴۲	مقامی احتمال - ہندی طریقے
۳۴۵	متفرق مثالیں
۳۵۰	اشکال نمبری ۳۲ (ر)
۳۵۷	تینتیسواں باب
۳۵۷	مقطعات

۳۵۶	دو متجانس خطی مساواتوں کا حاصل اسقاط
۳۵۹	تین متجانس خطی مساواتوں کا حاصل اسقاط
۳۶۰	مقطعہ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی جبکہ قطاروں اور ستونوں کو باہم بدل دیا جائے
۳۶۱	تیسرے مرتبہ کے مقطعہ کا پھیلاؤ
۳۶۲	دو متصل ستونوں کو یا متصل قطاروں کو باہم بدل دیا جائے تو مقطعہ کی علامت بدل جاتی ہے۔
۳۶۳	اگر ایک قطعہ کے دو ستون یا دو قطاریں متبادل ہوں تو مقطعہ صفر ہو جاتا ہے
۳۶۴	اگر کسی قطار یا ستون کو ایک ہی جزو ضربی سے ضرب دیا جائے تو مقطعہ مذکور اس جزو ضربی سے ضرب کیا جاتا ہے۔
۳۶۵	وہ حالتیں جہاں جزو اضافی مختلف رقوم پر مشتمل ہوتے ہیں
۳۶۶	قطاروں اور ستونوں کے اختصار سے قطعات کی تحویل
۳۶۷	دو مقطعات کا حاصل ضرب
۳۶۸	امثلہ نمبری ۳۳ (ا)
۳۶۹	ہمزا و مساواتوں کے حل کا طریقہ
۳۷۰	چوتھے رتبہ کا مقطعہ
۳۷۱	کسی رتبہ کا مقطعہ
۳۷۲	علامت \pm لے کر ج د
۳۷۳	امثلہ نمبری ۳۳ (ب)

چونتیسویں باب

مستغرق مسائل و امثلہ

جبر و مقابلہ کے اساسی قیامات کی نظر ثانی
 ف (لا) کو لا۔ اور تقسیم کیا جائے تو باقی ف (ا) بیگن
 ف (لا) کا خارج قسمت جب لا۔ اور سے تقسیم کیا جائے

۳۹۵	متفرقہ سروں کے استعمال کا طریقہ
+	حاصل کا ترکیبی تقسیم کا طریقہ
۳۹۶	متشاکل اور متبادل تفاضیل
۳۹۹	متاثرات کی حل شدہ مثالیں
۴۰۱	مضامین ضابطوں کی فہرست
+	امثلہ نمبری ۳۶ (ا)
۴۰۴	متاثرات ج ا کے جذور اکعبوں کے خاص سے ثابت کی گئی ہیں۔
۴۰۶	۱ + ب + ج - ۳ - ۲ ا ب ج کے خطی اجزائے سرے
+	اگر ۱ + ب + ج = ۰ ہو تو ۱ + ب + ج کی قیمت
۴۰۸	امثلہ نمبری ۳۶ (ب)
۴۱۰	اسقاط
۴۱۱	متشاکل تفاضیل کے ذریعہ اسقاط
۴۱۲	آئیلر (Euler) کا طریقہ اسقاط
۴۱۳	بیل و سلٹ کا افتراقی طریقہ اسقاط
+	بیزاؤٹ (Bezout) کا طریقہ
۴۱۵	اسقاط کی متفرق مثالیں
۴۱۶	امثلہ نمبری ۳۶ (ج)
۴۲۰	بینتی سوال باب
+	نظریہ معادلات
۴۲۱	ن ویں درجہ کی ہر مساوات کی ن اسلیں ہوتی ہیں اس سے زیادہ نہیں
۴۲۲	ہو سکتیں۔
۴۲۴	اسلوں اور سروں کے باہمی روابط
	یہ روابط حل کے لئے کافی نہیں ہیں۔

۴۲۵	مفروضہ شرائط کے ماتحت حل کی صورتیں
۴۲۶	اصولوں کے متشاکل تفاعلوں کی آسان صورتیں
۴۲۷	اشملہ نمبری ۳۵ (ا)
۴۲۸	خیالی اور اصم اصولوں کے زوج واقع ہوتے ہیں
۴۲۹	اصم اصولوں کی مساواتوں کا حل اور بناوٹ
۴۳۱	ڈی کارٹیز (Descartes) کی علامتوں کا قانون
۴۳۳	اشملہ نمبری ۳۵ (ب)
۴۳۵	فا (لا + ہ) کی قیمت - مشتق تفاعل
۴۳۷	ہارنر کے طریقے سے فا (لا + ہ) کی تخمین
۴۳۹	فا (لا) اپنی قیمت بتدیج بدلتا ہے
۴۴۱	اگر فا (ا) اور فا (ب) مختلف علامات ہوں تو فا (لا) = . کی ایک اصل
۴۴۲	ا اور ب کے درمیان واقع ہوگی
۴۴۳	طاق درجہ کی ایک مساوات کی ایک اصل حقیقی ہوتی ہے
۴۴۴	اگر ایک مساوات کا درجہ جفت ہو اور اس کی آخری رقم منفی ہو تو اس کی دو اصلیں حقیقی ہوں گی
۴۴۵	اگر فا (لا) = . کی راصلیں کے مساوی ہوں تو {
۴۴۶	فا (لا) = . کی راصلیں کے مساوی ہوں گی
۴۴۷	مساوی اصولوں کی تخمین
۴۴۸	فا (لا) = $\frac{1}{لا - ا} + \frac{1}{لا - ب} + \frac{1}{لا - ج} + \dots$
۴۴۹	اصولوں کی کسی خاص قوت کا حاصل جمع
۴۵۰	اشملہ نمبری ۳۵ (ج)
۴۵۱	مساواتوں کا احتمال
۴۵۲	مساوات جس کی اصلیں فا (لا) = . کی اصلوں کے مساوی اور مختلف علامات ہوں -

۴۵۱	مساوات جس کی اصلیں فا (لا) = کی اصلوں کے اضعاغ کے مساوی ہوں
۴۵۲	مساوات جس کی اصلیں فا (لا) = کی اصلوں کے شکافیوں کے مساوی ہوں
۴۵۳	شکافی مساواتوں پر بحث
۴۵۴	مساوات جس کی اصلیں مساوات فا (لا) = کی اصلوں کے مربعوں کے مساوی ہوں۔
۴۵۵	مساوات جس کی اصلیں مساوات فا (لا) = کی اصلوں کے بقدر فرقہ ارہ کے بڑی ہوں۔
۴۵۶	کسی نامی رقم کا معدوم کرنا
۴۵۷	مساوات جس کی اصلیں فا (لا) = کی اصلوں کے مفروضہ تفاعیل کے مساوی ہوں۔
۴۵۸	اشلہ نمبری ۳۵ (د)
۴۶۱	کبھی مساواتیں
۴۶۲	کارڈن کا مثل
۴۶۳	اس مثل پر بحث
۴۶۴	اس ناقابل تحویل صورت میں حل کی تخیل بذریعہ علم مثلث
۴۶۵	مساوات درجہ پہاڑم - فیاری (Ferrari) کا حل
۴۶۶	ڈی کارٹین (Descartes) کا حل
۴۶۷	نامعلوم ہر تمام اصلیں حقیقی
۴۶۸	تین ہزار مساواتوں کا حل $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 1$ وغیرہ
۴۶۹	اشلہ نمبری ۳۵ (۶)
۴۷۰	متفرق مثالیں
۵۳۵	جوابات

بسم اللہ الرحمن الرحیم

جستار و بدلہ

اٹھارواں باب سود اور سالیانہ

۲۲۹۔ اس باب میں ہم یہ بتائیں گے کہ کس طرح سود اور مٹی کے سوالات جبریہ ضوابط کو استعمال کرنے سے آسانی سے حل ہو جاتے ہیں۔

ہم الفاظ 'سود'، 'مٹی' اور قیمت حاضریہ کو انہی معنوں میں استعمال کریں گے جن میں یہ اصطلاحیں علم حساب کی عام کتابوں میں استعمال ہوتی ہیں، لیکن سود کی شرح کو اس طرح بیان کرنے کی بجائے کہ ۱۰۰ پونڈ پر فی سال اس قدر سود ہے، یہ زیادہ آسان ہو گا کہ اس کو یوں بیان کیا جائے کہ ایک پونڈ کا ایک سال کا سود اس قدر ہے۔

۲۳۰۔ کسی رقم مفروضہ کا سود اور کل زر کسی دی ہوئی مدت کے لئے بحساب سود مفروضہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اصل زر R ہے، پونڈ ہے، ایک پونڈ کا سود ایک سال میں S ہے، نیز سالوں کی تعداد N ، سود S اور کل زر K ہے۔ چونکہ R کا ایک سال کا سود S ہے، اس لئے اس کا

ن سال کا سود ص ن ش ہے،

پس $ص = ص ن ش$ (۱)

ک = ص + ص

اس لئے ک = ص (۱ + ن ش) (۲)

(۱) اور (۲) سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اگر ہمیں ص، ن، ش، ص میں سے یا ص، ن، ش، ک میں سے کوئی تین مقادیر معلوم ہوں تو چوتھی مقدار معلوم ہو سکتی ہے۔

۲۳۱۔ کسی رقم مفروضہ کی متی اور قیمت حاضرہ کسی دی ہوئی مدت کے لئے بحساب سود مفروضہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ رقم مفروضہ ص ہے اور قیمت حاضرہ ح، نیز متی م ہے، ایک پونڈ کا ایک سال کا سود ش ہے اور سالوں کی تعداد ن ہے۔ چونکہ ح ایک ایسی رقم ہے جس کو سود پر قرض دینے سے ن سالوں میں اس کا کل زر ص ہو جاتا ہے اس لئے

$ص = ح (۱ + ن ش)$

$$\therefore ح = \frac{ص}{۱ + ن ش}$$

$$\text{اور } م = ص - ح = ص - \frac{ص}{۱ + ن ش}$$

$$\therefore م = \frac{ص ن ش}{۱ + ن ش}$$

نوٹ۔ م کی جو قیمت مساوات بالا سے حاصل ہوتی ہے، اس کو اصلی متی کہتے ہیں۔ لیکن عملی طور پر جب کوئی رقم واجب الادا ہوئیگی معینہ تاریخ سے قبل ادا کی جاتی ہے تو سا ہو کار قرضہ میں سے اصلی متی وضع کرنے کی بجائے قرضہ پر کا سود وضع کر لیتے ہیں، جو رقم اس طرح سے وضع کی جاتی ہے اس کو ”سا ہو کاری متی“ کہتے ہیں، پس

ساہوکاری متی = ص ن ش

اصلی متی = $\frac{ص ن ش}{۱ + ن ش}$

مثال - ۱۹۰۰ پونڈ کے لئے اصلی متی، اور ساہوکاری متی کا فرق ۶ شلنگ ۸ پینس ہوتا ہے جبکہ رقم تاریخ مقررہ سے ۴ ماہ قبل ادا کی جائے۔
شرح فیصد بحساب سود مفرد دریافت کرو۔
فرض کرو کہ ایک پونڈ کا ایک سال کا سود ش ہے، تب

ساہوکاری متی = $\frac{۱۹۰۰ ش}{۳}$

اور اصلی متی = $\frac{۱۹۰۰ ش}{۲ + ۱ + \frac{۱}{۳} ش}$

$$\frac{۱}{۳} = \frac{\frac{۱۹۰۰ ش}{۳}}{\frac{۱۹۰۰ ش}{۲ + ۱ + \frac{۱}{۳} ش}} - \frac{۱۹۰۰ ش}{۳}$$

جس سے ۱۹۰۰ ش = ۳ + ش

$$\frac{۱۵۱ \pm ۱}{۳۸۰۰} = \frac{۲۲۸۰۰ + ۱۷ \pm ۱}{۳۸۰۰} = ۱۷ ش$$

منفی اصل کو نظر انداز کرنے سے ش = $\frac{۱۵۲}{۳۸۰۰} = \frac{۱}{۲۵}$

شرح فیصد = ۱۰۰ ش = ۴
۲۳۲ - کسی رقم مفروضہ کا سود اور کل زر کسی دی ہوئی مدت میں بحساب سود مرکب معلوم کرو۔
فرض کرو کہ اصل زر ص ہے، ایک پونڈ کا ایک سال کا کل زر

شش ہے، نیز سالوں کی تعداد ن ہے، سود میں ہے اور کل زر

کے لئے اصل زر ہے اس لئے دوسرے سال کے آخر میں کل زر ص شش یعنی ص شش ہے، اسی طرح سے تیسرے سال کے آخر میں کل زر = ص شش اور علی بن القیاس ن سالوں کے بعد کل زر ص شش ہے۔

پس ک = ص شش

نوٹ۔ اگر ایک پونڈ کے ایک سال کے سود کو ش سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{ش} = ۱ + \text{ش}$$

۲۳۳ بیوپار میں اگر مدت کے اندر سال کی کوئی کسر شامل ہو تو رواجا کسر مذکور کے لئے سود بحساب سود مفرد محسوب کیا جاتا ہے

پس ایک پونڈ کا کل زر ۱ سال میں ۱ + ش ہوگا اور ص کا کل زر بحساب سود مرکب ۲ سال میں ص شش (۱ + ش) ہوگا، اسی طرح سے ص کا کل زر ن + ۱ سال میں

$$\text{ص شش} (۱ + \frac{\text{ش}}{۱۲}) \text{ ہوگا۔}$$

اگر سود سال میں ایک سے زیادہ بار واجب الادا ہو تو ظاہری سالانہ شرح میں اور اس شرح میں جو فی الحقیقت وصول ہوتی ہے اختلاف ہوتا ہے، مؤخر الذکر کو اصلی سالانہ شرح سے موسوم کیا جاسکتا ہے، مثلاً اگر سود سال میں دو بار واجب الادا ہوا اور ظاہری سالانہ شرح ش ہو تو ایک سال کا کل زر نصف سال کے بعد

۱ + $\frac{\text{ش}}{۲}$ ہوگا اور اس لئے ایک پونڈ کا کل زر پورے سال میں

(۱ - $\frac{\text{ش}}{۲}$) یعنی ۱ + $\frac{\text{ش}}{۲}$ ہوگا پس اصلی سالانہ شرح

سود $\frac{\text{ش}}{۲}$ ہوگی۔

۳۳ - اگر سود سال میں ق بار واجب الادا ہوا اور ظاہری سال شرح $\frac{\text{ش}}{۲}$ ہو تو ظاہر ہے کہ ایک پونڈ کا سود $\frac{۱}{۲}$ سال کے ہر وقفہ کے لئے $\frac{\text{ش}}{۲}$ ہوگا اس لئے ص کا کل زر ن

سال میں یعنی ق ن وقفوں میں ص (۱ + $\frac{\text{ش}}{۲}$) ن ق ہوگا۔

اس کو یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ ”ایک سال میں ق مرتبہ سود اصل زر میں بدل جاتا ہے“

اگر سود ہر لمحہ اصل زر میں تبدیل ہوتا رہے تو ق لا انتہا بڑا ہو جائے۔

اس صورت میں کل زر کی قیمت نکالنے کے لئے فرض کرو کہ $\frac{\text{ش}}{۲} = \frac{۱}{۲}$

یعنی ق = ش لا

کل زر = ص (۱ + $\frac{\text{ش}}{۲}$) ق ن = ص (۱ + $\frac{۱}{۲}$) لا ن ش

= ص { (۱ + $\frac{۱}{۲}$) } لا ن ش

= ص لا ن ش [دیکھو حصہ اول، صفحہ ۴۵۹] کیونکہ

ق کے لا انتہا بڑھ جانے سے لا بھی لا انتہا بڑھ جاتا ہے۔

۳۳۵ - کسی رقم مفروضہ کی قیمت حاضرہ اور متنی کسی دی ہوئی مدت کے لئے بحساب سود مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ رقم مفروضہ ص ہے اور قیمت حاضرہ ح ہے،

نیز متنی م ہے، ایک پونڈ کا ایک سال کا کل زر رش ہے اور سالوں کی تعداد ن ہے۔ اب چونکہ ح ایک ایسی رقم ہے کہ اگر اس کو سود پر قرض دیا جائے تو ن سالوں میں اس کا کل زر رش ہو جاتا ہے اسلئے

$$ص = ح \cdot ش^N$$

$$ح = \frac{ص}{ش^N} = ص \cdot ش^{-N}$$

$$اور م = ص (1 - ش^{-N})$$

مثال - ۶۷۲ پونڈ کچھ عرصہ کے بعد واجب الادا ہیں، اس رقم کی قیمت حاضرہ ۱۲۶ پونڈ ہے، اگر سود مرکب بشرح $\frac{1}{4}\%$ فی صد محسوب کیا جائے تو مدت معلوم کر دیجئے

$$لوک ۲ = ۶۳.۱۰۳، لوک ۳ = ۱۲.۷۷۱۲$$

$$یہاں ش = \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۱}{۴}، اور ش = \frac{۲۵}{۲۴}$$

قرض کرو کہ سالوں کی تعداد ن ہے، تب

$$۶۷۲ = (126 \cdot \frac{25}{24})^N$$

$$N \cdot لوک = \frac{۲۵}{۲۴} = لوک \frac{۶۷۲}{۱۲۶}$$

$$N \cdot لوک = \frac{۱۰۰}{۹۶} = لوک \frac{۱۶}{۳}$$

$$N (لوک ۱۰۰ - لوک ۹۶) = لوک ۱۶ - لوک ۳$$

$$N = \frac{۴ لوک ۲ - ۳ لوک ۳}{۵ لوک ۲ - ۲ لوک ۳}$$

$$ن = \frac{۱۶۷۴۰۰}{۱۰۱۷۷۳} = ۱۶ تقریباً$$

پس مدت تقریباً ۱۶ سال ہے۔

امثلہ نمبری ۱۸ (۱)

جب ضرورت ذیل کے لوکار تم استعمال کئے جائیں،

لوک ۲ = ۲۰۱۰۳۰۰ ، لوک ۳ = ۳۷۷۱۲۱۳

لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰ ، لوک ۱۱ = ۱۰۴۱۲۹۲۷

۱۔ ۱۰۰ پونڈ کا کل زر ۵۰ سال میں ۵ فیصد شرح سے بحساب سود مرکب معلوم کرو۔

$$\text{لوک } ۱۱۴۶۷۷۴ = ۲۵۰۵۵۴۶۵۰$$

۲۔ ایک رقم کا سود مفرد ۹۰ پونڈ ہے اور اس کی متی اسی شرح پر اسی مدت میں ۸۰ پونڈ ہے، رقم معلوم کرو۔

۳۔ ایک رقم ۵ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب کتنے سال میں دگنی ہو جائے گی۔

۴۔ ۱۰ ہزار پونڈ کی رقم ۸ سال کے بعد واجب الادا ہے، اس کی قیمت حاضرہ ۵ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب دریافت کرو،

$$\text{لوک } ۶۷۶۸۳۵۹۴ = ۴۵۸۳۰۴۸۵۶$$

۵۔ ایک ہزار پونڈ ۱۰ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب کتنے سالوں میں ۲۵۰۰ پونڈ ہو جائیگی۔

۶۔ ثابت کرو کہ بحساب سود مفرد کسی رقم کی متی اس رقم اور اس کے سود کے اوسط موسیقی کے نصف کے سادی ہوتی ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ ۵ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب کوئی رقم ۱۰ سال میں سو گنا سے زیادہ ہو جاتی ہے۔

۸۔ کوئی رقم ۱۲ سال میں ۶ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب

ایک ہزار پونڈ ہو جائے گی۔

$$25.253.059 = 1.4 \text{ لوک}$$

$$25.294.3292 = 29494 \text{ لوک}$$

۹۔ ایک شخص ایک ساہوکار سے ۶۰۰ پونڈ قرض لیتا ہے اور ہر چھ ماہ کے بعد ۱۸ فیصد کا اضافہ کر کے نیا تمسک تحریر کر دیتا ہے۔ بتاؤ کہ کتنا وقت گزرنے کے بعد تمسک ۶ ہزار پونڈ تک پہنچ جائے گا۔

$$25.0.1882 = 118 \text{ لوک}$$

۱۰۔ ایک فار دنگ ۲۰۰ سال میں ۶ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب کیا ہو جائے گا۔ معلوم ہے

$$25.253.059 = 1.4 \text{ لوک}$$

$$25.0.11800 = 1151240 \text{ لوک}$$

سالیانہ

۲۳۶۔ سالیانہ سے ایک ایسی معینہ رقم مراد ہوتی ہے جو خاص شرائط کے ماتحت مقررہ مساوی وقفوں کے بعد ادائیگی جاتی ہے اور یہ ادائیگی ہر سال میں ایک بار یا کئی بار عمل میں آتی ہے۔ جب تک اس کے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے ادائیگی مذکور سالانہ سمجھی جائے گی۔ میعاد دی سالیانہ سے مراد وہ سالیانہ ہے جو سالوں کی ایک خاص تعداد کے لئے غیر مشروط طور پر واجب الادا ہو۔ حیاتی سالیانہ سے مراد وہ سالیانہ ہے جو ایک شخص کو یا کئی اشخاص کے پس ماندہ کو تازہ نیست واجب الادا ہو۔

ملٹوی سالیانہ سے وہ سالیانہ مراد ہے جو سالوں کی کسی خاص تعداد کے گزرنے کے بعد شروع ہو۔ جب یہ کہا جائے کہ سالیانہ ن سالوں کے لئے ملٹوی کیا گیا ہے تو اس سے یہ مراد ہوتی ہے کہ سالیانہ ن سالوں کے بعد شروع ہوگا اور پہلی قسط (ن + ۱) ویں سال کے

آخر میں ادا کی جائے گی۔
 اگر سالیانہ ایسا ہو جو ہمیشہ کے لئے جاری رہے تو اس کو دوامی سالیانہ
 یا محض دوامی کہتے ہیں، اگر یہ چند سالوں کے گزرنے کے بعد
 شروع ہونے والا ہو تو اسے مکتومی دوامی کہتے ہیں۔

اگر کوئی سالیانہ متعدد سالوں تک ادا نہ ہوا ہو تو اس کو یوں بیان
 کرتے ہیں کہ سالیانہ اتنے سالوں سے 'برائندہ' ہے۔
 ۲۳۷۔ ایک سالیانہ سالوں کی ایک خاص تعداد تک ادا نہیں
 کیا گیا۔ اس کا کل زرب حساب سود مفرد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سالیانہ ۱ ہے اور ایک پونہ کا ایک سال کا سود
 ۱ ش ہے، نیز سالوں کی تعداد ۱۰۰ ہے اور کل زرب ۱۰۰ ہے
 پہلے سال کے آخر میں واجب الادا رقم ۱۰۰ ہے، اور اس رقم کا کل زرب
 باقی (۱۰۰-۱) سال کے لئے ۱۰۰ + (۱۰۰-۱) ش ۱۰۰ ہے

دوسرے سال کے آخر میں مزید رقم ۱۰۰ واجب الادا ہے، اور اس
 رقم کا کل زرب باقی (۱۰۰-۲) سال کے لئے ۱۰۰ + (۱۰۰-۲) ش ۱۰۰ ہے
 علیٰ ہذا القیاس

اب چونکہ کل یعنی کل زرب مطلوبہ ان تمام کل زروں کے مجموعہ کے
 ساوی ہے

$$نک = \{ ۱۰۰ + (۱۰۰-۱) ش ۱۰۰ \} + \{ ۱۰۰ + (۱۰۰-۲) ش ۱۰۰ \} + \dots$$

جہاں سلسلہ بالا میں رقموں کی تعداد ۱۰۰ ہے

$$نک = ۱۰۰ + (۱۰۰-۱) ش ۱۰۰ + (۱۰۰-۲) ش ۱۰۰ + \dots$$

$$= ۱۰۰ + ۱۰۰ (۱۰۰-۱) ش ۱۰۰$$

۲۳۸۔ ایک سالیانہ سالوں کی ایک خاص تعداد تک ادا نہیں

کیا گیا اس کا کل زرب حساب سود مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سالیانہ ۱ ہے اور ایک پونڈ کا ایک سال کا زرخش ہے نیز سالوں کی تعداد n ہے اور حملہ کل زرخش کا ہے۔

پہلے سال کے آخر میں ۱ واجب الادا ہے اور اس کا کل زرخش باقی (ن-۱) سال کے لئے ۱-۱ کے مساوی ہے، دوسرے سال کے آخر میں ایک اور رقم ۱ واجب الادا ہے اور اس کا کل زرخش باقی (ن-۲) سال کے لئے ۱-۲ ہے، اور علیٰ اہل القیاس

$$\text{یک} = ۱-۱ + ۱-۲ + \dots + ۱-۱ + ۱-۱ + ۱-۱$$

$$= ۱ + (۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱) \text{ (n-1 times)}$$

$$= ۱ + \frac{n-1}{1}$$

۲۳۹- جب سالیانوں کی قیمت حاضرہ معلوم کرنا ہو تو رواجا سے ہمیشہ سود مرکب کے حساب سے شمار کرتے ہیں۔ اگر سود بحساب سود منفرد شمار کیا جائے تو نتائج ہمیشہ متضاد اور ناقابل اعتماد حاصل ہوتے ہیں اس موضوع پر نیز سالیانوں کے مضمون کے متعلق مزید حاصل کرنے کے لئے طالب علم کو چاہئے کہ انسٹی ٹیوٹ آف ایکچوئریز (Institute of actuaries) کی کتب و بیچ حصص اول و دوم

Encyclopaedia Britannica

اور نیز انسائیکلو پیڈیا بریتانیکا

میں سالیانوں کی دفعہ کا مطالعہ کرے۔

۲۴۰- ایک سالیانہ سالوں کی محدود تعداد کے لئے جاری رہتا ہے، اس کی قیمت حاضرہ بحساب سود مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سالیانہ ۱ ہے، ایک پونڈ کا کل زرخش ایک سال میں ۱ ہے، نیز سالوں کی تعداد n ہے اور مطلوبہ قیمت حاضرہ ہے۔

سالیانہ ۱ جو ایک سال کے بعد واجب الادا ہے اس کی قیمت
حاضرہ ۱ ش-۱ ہے

سالیانہ ۲ جو ۲ سال کے بعد واجب الادا ہے اس کی قیمت حاضرہ
۱ ش-۲ ہے

سالیانہ ۳ جو ۳ سال کے بعد واجب الادا ہے اس کی قیمت حاضرہ
۱ ش-۳ ہے

علیٰ ہذا القیاس [نہ خطہ ہو دفعہ ۲۳۵]
اب چونکہ ح این تمام حاضرہ قیمتوں کے مجموعہ سے مساوی ہے

$$ح = ۱ ش-۱ + ۱ ش-۲ + ۱ ش-۳ + \dots + ۱ ش-۲۳۵$$

$$= ۱ ش-۱ - ۱ ش-۲$$

$$= ۱ ش-۱ - ۱ ش-۲$$

نوٹ۔ ک کی جو قیمت دفعہ ۲۳۸ میں معلوم کی گئی ہے اس کو
۱ ش-۲۳۸ پر تقسیم کرنے سے بھی مندرجہ بالا جواب حاصل ہو سکتا ہے۔
یقیناً صریح۔ اگر ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو اس سے دوامی
سالیانہ کی قیمت حاضرہ کی قیمت حاصل ہوتی ہے

$$ح = \frac{۱ ش-۱}{۱ ش-۲} = \frac{۱ ش-۱}{۱ ش-۲}$$

۲۳۸۔ اگر ایک سالیانہ ۱ کی قیمت حاضرہ ع ۱ ہو تو اسے یوں
بیان کرتے ہیں کہ سالیانہ کی قیمت ع سالوں کی خرید کے مساوی ہے۔

$$دوامی سالیانہ کی صورت میں ع ۱ = \frac{۱ ش-۱}{۱ ش-۲}$$

اس لئے $\frac{1}{100} = \frac{1}{100}$ شرح فیصد
 اس سے ظاہر ہے کہ یہ معلوم کرنے کے لئے کہ کوئی دوامی سالیانہ
 کتنے سالوں کی خرید کے مساوی ہے ہمیں ۱۰۰ کو شرح فیصد پر تقسیم
 کرنا پڑتا ہے۔

بہت سے سرکاری تمسکوں میں، نیز جبری شدہ کمپنیوں کے سرمایہ
 میں اور ریل کے حصے وغیرہ خریدنے میں جو روپیہ لگایا جاتا ہے وہ بعد از
 واکذاشت نہیں کیا جاسکتا، اس لئے اس روپیہ سے جو مسلسل آمدنی
 ہوتی رہتی ہے وہ دوامی سالیانوں کی بہترین مثال ہے۔ گورنمنٹ
 کے اعتبار کی بہترین جانچ اس امر سے ہو سکتی ہے کہ اس کے تمسکات
 کی قیمت کتنے سالوں کی خرید کے مساوی ہے۔ مثلاً $\frac{1}{2}$ فیصد
 والا ۹۰ پرکا "کونسل" ۳۶ سال کی خرید کے مساوی ہے، مصر کے
 ۴ فیصد والے سرمایہ کی قیمت ۹۶ پر ۲۴ سال کی خرید کے مساوی
 ہے اور آسٹریا کے ۵ فیصد والے سرمایہ کی قیمت ۸۰ پر صرف ۱۶ سال
 کی خرید کے مساوی ہے۔

۲۴۲۔ ایک ملتی سالیانہ ع سالوں کے بعد شروع ہو گا اور
 ن سال تک جاری رہے گا، اس کی قیمت حاضرہ بحساب سود
 مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سالیانہ ۱ ہے، ایک پونڈ کا ایک سال کا کل زر
 ۱ ہے اور قیمت حاضرہ ۱ ہے۔

پہلی قسط (۱+۱) میں سال کے آخر میں ادا ہوتی ہے [دفعہ ۲۳۶]
 اس لئے پہلی، دوسری، تیسری قسطوں کی حاضرہ قیمتیں بالترتیب
 ۱ش - (۱+۱)، ۱ش - (۲+۱)، ۱ش - (۳+۱).....

$$ن ح = اشن - (ع + ۱۱) اشن - (ع + ۷) اشن - (ع + ۳) اشن + ... تا ن$$

$$= اشن - (ع + ۱۱) اشن - (ع + ۷) اشن - (ع + ۳) اشن + ... تا ن$$

$$= اشن - (ع + ۱۱) اشن - (ع + ۷) اشن - (ع + ۳) اشن + ... تا ن$$

نتیجہ صریح۔ ایک ملٹوی دوامی کا اجراء سالوں کے بعد شروع ہو گا، اس کی قیمت حاضرہ ضابطہ ذیل سے حاصل ہوتی ہے

$$ح = اشن - (ع + ۱۱) اشن - (ع + ۷) اشن - (ع + ۳) اشن + ... تا ن$$

۳۴۲۔ ملک سے ایسی جائداد مراد ہوتی ہے جس سے دوامی سالیانہ حاصل ہوتا رہے، اس دوامی سالیانہ کو محاصل کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ کسی ملک کی قیمت وہی ہوگی جو ایک ایسے دوامی سالیانہ کی قیمت حاضرہ ہو جو محاصل کے مساوی ہے۔

دفعہ ۲۴۱ سے ظاہر ہے کہ اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ کسی پٹہ دار کو کھیت مول لینے کے لئے کتنے سالوں کی خرید "ادا کرنی پڑتی ہے تو .. کو سالوں کی اس تعداد پر تقسیم کرنے سے ہم سود کی شرح فیصد معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال۔ ایک ملک کا حق بازگشت ۶ سال کے بعد ہونے والا ہے اس کو ۲۰ ہزار پونڈ میں خرید کر لیا گیا ہے۔ بتاؤ کہ ۵ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب خریدار کو کس قدر محاصل وصول ہونے چاہئیں، معلوم ہے

$$لوک ۱۱۰۵ = ۵۰۲۱۱۸۹۳، لوک ۱۱۳۴۰۰۹۶ = ۱۲۴۱۳۵۸$$

یہاں محاصل ایک ایسے دوامی سالیانہ کی سالانہ قیمت کے مساوی ہیں جس کا اجراء ۶ سال کے بعد ہونے والا ہو اور جو ۲۰ ہزار پونڈ میں

خریدی جاسکتی ہو۔
فرض کرو کہ سالیانہ کی قیمت 1 پونڈ فی سال ہے، چونکہ $15.0 =$

$$\frac{2 - (1.05) \times 1}{1.05} = 2.000 \text{ اسی لئے}$$

$$1 \dots = \frac{7}{(1+0) \times 1} =$$

لوک ۱-۶ لوک ۱۶۰۵ = ۳

لوک ۱ = ۳۶۱۲۷۱۳۵۸ = لوک ۱۳۴۰۶۰۹۶

لوٹ = ۱۲۵۸ + ۱۳۰۹ = ۲۵۶۷
 ۱ - فرض کر دو کہ پیٹہ دار نے کوئی خاص رقم ادا کر کے کسی ملک کا
 اجارہ (ع + ق) سالوں کے لئے حاصل کیا۔ ق سال گزر جانے
 پر وہ ع + ن سالوں کے لئے نیا اجارہ حاصل کرنا چاہتا ہے،
 جو رقم اسے اس غرض کے لئے ادا کرنی پڑتی ہے اسے ن سال کیلئے
 تجدید اجارہ کا جرمانہ کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ ملک کی سالانہ قیمت ۱۰ ہے، مگر چونکہ پٹہ دار (ع + ن) سال میں سے ع سال کی رقم ادا کر چکا ہے اس لئے جرمانہ اُس ملتوی سالیانہ ۱۰ کی قیمت حاضرہ کے مساوی ہوگا جو ع سال کے بعد شروع ہو کر ن سال تک جاری رہے، پس

$$\text{جرمانه} = \frac{\text{رش-ع}}{\text{ش-ا}} - \frac{\text{رش-ع-ك}}{\text{ش-ا}} \dots\dots [\text{دفعه ۲۴۲}]$$

امثلہ ۱۸ (ب)

جب تک کہ اس کے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے سود کو ہمیشہ سود مرکب تصور کیا جائے۔

۱۔ ۱۲۰ پونڈ کا ایک سائینہ ۶ سال تک ادا نہیں ہوا۔ اگر

اس کا کل زر ۶۷۲ پونڈ ہو تو بحساب سود مفرد شرح فیصد دریافت کرو
۲۔ ۱۰۰ پونڈ کے ایک سالیانہ کا کل زر ۲۰ سال میں $\frac{۱}{۲}$ فیصد شرح
پر بحساب سود مرکب معلوم کرو، معلوم ہے

$$\text{لوگ } ۱۵۰۴۵ = ۵۰۱۹۱۱۶۳$$

$$\text{لوگ } ۲۲۵۱۱۷ = ۱۶۳۸۶۳۶۰$$

۳۔ ایک ملک ۱۷۵۰ پونڈ میں خریدی گئی، بتاؤ کہ یہ کس شرح
فیصد کے موافق اجارہ پردی جائے کہ مالک کو قیمت خرید پر ۴ فیصد
نفع ہو۔

۴۔ ایک ملک کی سالانہ آمدنی ۱۲۰ پونڈ ہے، اس کو ۴ ہزار پونڈ
پر فروخت کرایا گیا ہے، سود کی شرح دریافت کرو۔

۵۔ اگر سود کی شرح $\frac{۱}{۲}$ فی صد ہو تو بتاؤ کہ ایک ملک کے لئے
کتنے سال کی خرید، بطور قیمت ادا کرنی پڑے گی۔

۶۔ اگر ایک دوامی سالیانہ کی قیمت ۲۵ سال کی خرید کے مساوی
ہو تو ۶۲ پونڈ کے ایک ایسے سالیانہ کا کل زر دریافت کرو جو
۲ سال تک جاری رہنے والا ہو۔

۷۔ اگر ایک دوامی سالیانہ کی قیمت ۲۰ سال کی خرید کے مساوی ہو،
تو وہ سالیانہ معلوم کرو جو ۳ سال تک جاری رہے اور جو ۲۵۲۲ پونڈ
میں خریدا جاسکے۔

۸۔ ۴۰۰ پونڈ سالانہ کی ایک ملک کا اجرا ۱۰ سال کے بعد شروع
ہونے والا ہے، اگر سود کی شرح ۴ فیصد ہو تو بتاؤ کہ اب یہ ملک
کتنے میں خریدی جاسکتی ہے

$$\text{لوگ } ۱۰۴ = ۲۵۰۱۷۰۳۳۳$$

$$\text{لوگ } ۶۵۷۵۵۶۵ = ۱۸۲۹۶۶۷۰$$

۹۔ اگر سود ہر لمحہ واجب الادا ہو تو بتاؤ کہ کونسی رقم ۵۰ سال میں
۲ فیصد شرح پر ۵۰۰ پونڈ ہو جائے گی (جو ۱ = ۶۳۶۷۸)

۱۰۔ ایک سالیانہ کے لئے جو ن سال تک جاری رہنے والا ہے

۲۵ سال کی خرید، ادا کرنی پڑتی ہے اور ایک اور سالیانہ کے لئے جو ۲۵ سال تک جاری رہنے والا ہے ۳۰ سال کی خرید ادا کرنی پڑتی ہے، شرح فیصد دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک شخص ۵ ہزار پونڈ ۴ فیصد شرح پر بکباب سود مرکب قرض لیتا ہے، اگر اصل زر اور سود دونوں کو ۱۰ مساوی سالانہ قسطوں سے ادا کرنا مطلوب ہو تو ہر ایسی قسط کی مقدار معلوم کرو

$$\text{لوگ } 15.03 = 6.140333$$

$$\text{اور لوگ } 445565 = 5.829446$$

۱۲۔ ایک شخص کے پاس ۲۰ ہزار پونڈ راس المال ہے اور اس پر اسے ۵ فیصد کے حساب سے سود ملتا ہے، اگر وہ ۱۸۰۰ پونڈ سالانہ خرچ کرے تو ثابت کرو کہ وہ سترہویں سال کے اختتام سے قبل تباہ ہو جائے گا۔

$$\text{لوگ } 2 = 3.010300$$

$$\text{لوگ } 3 = 3.477121$$

$$\text{لوگ } 4 = 5.829446$$

۱۳۔ ایک ملک کے سالانہ محاصل ۵۰۰ پونڈ ہیں، اور اسے ۲۰ سال کے لئے اجارہ پر دیا گیا ہے، اگر ۷ سال کے بعد پٹہ کی تجدید کرنا منظور ہو تو جرمانہ کی مقدار معلوم کرو جبکہ سود کی شرح ۶ فیصد ہو۔

$$\text{لوگ } 1.04 = 2.053059$$

$$\text{لوگ } 488285 = 4.610233$$

$$\text{لوگ } 3118.02 = 3.493882$$

۱۴۔ اگر ایک سالیانہ کو 'ن' سال تک جاری رکھنے کے لئے بالترتیب 'ب'، 'ج' سال کی خرید ادا کرنی پڑے تو ثابت کرو

۱۔ $ا ب + ب^2 = ا ج$

۱۵۔ ایک دوامی سالیانہ ایسا ہے کہ اس کی رُو سے پہلے سال کے آخر میں ۱۰ پونڈ واجب الادا ہوتے ہیں، دوسرے سال کے آخر میں ۲۰ پونڈ اور تیسرے کے آخر میں ۳۰ پونڈ علیٰ ہذا القیاس ہر سال کے آخر میں ۱۰ پونڈ کا اضافہ ہوتا جاتا ہے، اگر سودی شرح ۵ فیصد فی سال ہو تو سالیانہ کی قیمت حاضرہ معلوم کرو۔



انیسواں باب

لا تساویات

۲۴۵۔ کوئی مقدار کسی دوسری مقدار ب سے بڑی اُس وقت کہلاتی ہے جبکہ ۱۔ ب مثبت ہو، مثلاً ۲ بڑا ہے۔ ۳ سے کیونکہ ۲۔ (۳ -) یعنی ۵ مثبت ہے نیز مقدار ب، ۱ سے چھوٹی اُس وقت کہلاتی ہے جبکہ ب۔ ۱ منفی ہو مثلاً ۵ چھوٹا ہے۔ ۲ سے کیونکہ ۵۔ (۲ -) یعنی ۳ منفی ہے۔ ظاہر ہے کہ اس تعریف کے بموجب صفر کو ہر منفی مقدار سے بڑا سمجھنا چاہئے۔

باب ہذا میں تا وقتیکہ اس کے خلاف بالتصریح بیان نہ کیا جائے حروف سے ہمیشہ حقیقی مثبت مقدار میں تعبیر ہونگی۔

۴۴۱۔ اگر ۱ < ب تو ظاہر ہے کہ

$$۱ + ج < ب + ج$$

$$۱ - ج < ب - ج$$

$$۱ ج < ب ج$$

$$\frac{۱}{ج} < \frac{ب}{ج}$$

یعنی لا تساوی برقرار رہے گی اگر اس کے طرفین میں ایک ہی مثبت

مقدار جمع کر دی جائے، یا طرفین سے ایک ہی مثبت مقدار تفریق کر دی جائے،
یا طرفین کو ایک ہی مثبت مقدار سے ضرب یا تقسیم کر دیا جائے۔

۲۴۷۔ اگر $a < b$ اور $c > 0$ تو

دونوں جانب c جمع کر دینے سے $a + c < b + c$ ج
اس سے ظاہر ہے کہ کسی لاتساوی میں ایک طرف کی کسی رقم کو دوسری
علامت بدل کر دوسری طرف منتقل کر سکتے ہیں۔

اگر $a < b$ تو صریحاً $b > a$
یعنی اگر کسی لاتساوی کے طرفین کا باہم تبادلاً کر دیا جائے تو لاتساوی
کی علامت الٹ جاتی ہے۔

اگر $a < b$ تو $-a > -b$ مثبت ہوگا اور $b > a$ منفی،

یعنی $-a > -b$ ۔ (ب) منفی ہوگا اس لئے

$a > b$ ۔

پس اگر کسی لاتساوی میں اس کی سب رقوم کی علامات بدل دی
جائیں تو لاتساوی کی علامت الٹ جاتی ہے۔

نیز اگر $a < b$ تو $a > b$ ۔

اس لئے $a < b$ اور $c > 0$ تو

پس اگر کسی لاتساوی کے طرفین کو کسی منفی مقدار سے ضرب دیا جا
تو لاتساوی کی علامت الٹ جاتی ہے۔

۲۴۸۔ اگر $a < b$ ، $b < c$ ، $c < d$ ، $d < e$ ، $e < f$ ، $f < g$ ، $g < h$ ، $h < i$ ، $i < j$ ، $j < k$ ، $k < l$ ، $l < m$ ، $m < n$ ، $n < o$ ، $o < p$ ، $p < q$ ، $q < r$ ، $r < s$ ، $s < t$ ، $t < u$ ، $u < v$ ، $v < w$ ، $w < x$ ، $x < y$ ، $y < z$ ، $z < a$ تو ظاہر ہے کہ

$a < b < c < d < e < f < g < h < i < j < k < l < m < n < o < p < q < r < s < t < u < v < w < x < y < z < a$

اور $a < b < c < d < e < f < g < h < i < j < k < l < m < n < o < p < q < r < s < t < u < v < w < x < y < z < a$

۲۴۹۔ اگر $a < b$ اور n اور q مثبت صحیح عدد ہوں

$$n \sqrt[n]{a} < n \sqrt[n]{b}$$

یعنی $a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$ اور بنا بریں $a^{\frac{1}{q}} < b^{\frac{1}{q}}$ یعنی

$a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$ جہاں n کوئی مثبت مقدار ہے

$$\text{نیز } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{ یعنی } a^{-1} > b^{-1}$$

۲۵۰۔ ہر حقیقی مقدار کا مربع مثبت ہوتا ہے، یعنی یہ صفر سے

بڑا ہوتا ہے، مثلاً $(a-b)^2$ مثبت ہے

$$: 1 - 2ab + b^2 < 0$$

$$: 1 + 2ab + b^2 < 0$$

اسی طرح سے $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ یا

یعنی دو مثبت مقداروں کا اوسط حسابی ان کے اوسط ہندسی سے بڑا ہوتا ہے۔

اگر مقادیر مذکورہ برابر ہوں تو لاتساوی، تساوی بن جاتی ہے۔

۲۵۱۔ جن لاتساویات میں ترتیب حروف متشاکل ہو ان میں خصوصیت کے ساتھ دفعہ ماقبل کے نتائج بہت مفید اور کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

مثال ۱۔ اگر $a < b$ ج مثبت مقدار کو تعبیر کریں تو ثابت کریں کہ

$$1 + b^2 + a^2 < b^2 + a^2 + 2ab$$

$$\text{اور } 2(1 + b^2 + a^2) < 2b^2 + 2a^2 + 4ab$$

$$+ 1 + b^2 + a^2$$

چونکہ $ب' + ج' < ۲ ب ج$ (۱)

$ج' + ا' < ۲ ج ا$

$ا' + ب' < ۲ ا ب$

اس لئے جمع کرنے سے $ا' + ب' + ج' < ۲ ب ج + ج ا + ا ب$
نیز یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ یہ جواب $ا' ب' ج' ا' ج' ب' ج' ا' ب'$ کی تمام حقیقی قیمتوں کیلئے
درست ہے

نیز (۱) کی رو سے $ب' - ب ج + ج' < ب ج$ (۲)

$ب' + ج' < ب ج (ب + ج)$ (۳)

(۳) کے مماثل دو اور متشاکل لا تساویات لکھنے اور جمع کرنے سے

$۲ (ا' + ب' + ج') < ۲ ب ج (ب + ج) + ۲ ج ا (ج + ا) + ۲ ا ب (ا + ب)$

$+ ۲ ا ب (ا + ب)$

اس میں ایسا بات قابل غور ہے وہ یہ کہ (۳) (۲) کے طرہیں کو جزو ضربی (ب + ج) سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے، لیکن اگر جزو ضربی (ب + ج) منفی ہو تو لا تساوی درست نہیں رہے گی۔
مثال ۲۔ اگر $ا$ کوئی حقیقی قیمت اختیار کر سکے تو بتاؤ کہ رقوم $ا + ۱$ اور $ا + ۲$ لا میں سے کونسی رقوم بڑی ہے۔

$(ا + ۱) - (ا + ۲) = ا - ۱ = لا - لا - ۱$

$= (ا - ۱) (ا - ۱)$

$= (ا - ۱)^۲ (ا + ۱)$

اس میں $(ا - ۱)^۲$ ہمیشہ مثبت رہتا ہے اس لئے $ا + ۱$ اور $ا + ۲$ سے بڑا ہوگا اگر $(ا - ۱)$ مثبت ہو اور چھوٹا ہوگا اگر یہ منفی ہو

یعنی: اگر لا < - اور چھوٹا ہوگا اگر لا > -

ا۔ لا = - ۱ تو لا تساوی، تساوی بن جاتی ہے۔

۲۵۲۔ فرض کرو کہ ا اور ب دو مثبت مقداریں ہیں جن کا حاصل جمع ج ہے اور حاصل ضرب ض ہے۔

چونکہ $a + b = ۲$ اور $a - b = ۱$

اس لئے $a = ۱$ اور $b = ۱$

اور $a = ۱$ اور $b = ۱$

پس اگر ج کی قیمت معلوم ہو تو ض کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی اگر ا = ب اور اگر ض کی قیمت معلوم ہو تو ج کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہوگی اگر ا = ب، با نفاذ دیگر اگر دو مثبت مقداروں کا حاصل جمع معلوم ہو تو ان کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا اگر یہ مقداریں مساوی ہوں اور اگر دو مثبت مقداروں کا حاصل ضرب معلوم ہو تو ان کا مجموعہ چھوٹے سے چھوٹا ہوگا اگر یہ مقادیر برابر ہوں۔

۲۵۳۔ اس حاصل ضرب کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو جس کے اجزائے ضربی کا حاصل جمع مستقل ہے۔

فرض کرو کہ ان اجزائے ضربی 'ا'، 'ب'، 'ج'، ک ہیں اور ان کا حاصل جمع مستقل اور س کے مساوی ہے۔

حاصل ضرب 'ا'، 'ب'، 'ج'، ک پر غور کرو۔ فرض کرو کہ ا اور ب دو غیر مساوی اجزائے ضربی ہیں، اگر ہم ان اجزائے ضربی کی بجائے

دو مساوی اجزائے ضربی 'ا'، 'ب'، لکھ دیں تو حسب

ما قبل ان کا حاصل جمع تو نہیں بدلتا مگر حاصل ضرب بڑھ جاتا ہے، پھر جب تک حاصل ضرب میں دو غیر مساوی اجزائے ضربی شریک رہیں ہم ہمیشہ ان کے حاصل جمع کو کم و بیش کئے بغیر حاصل ضرب کو بڑھا سکتے ہیں۔ اس سے ظاہر ہے کہ حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا

اگر ایس کے اجزائے ضربی سب باہم مساوی ہوں۔ موجودہ صورت میں ان اجزائے ضربی میں سے ہر ایک $\frac{1}{n}$ کے مساوی ہے اور

حاصل ضرب کی بڑی سے بڑی قیمت $(\frac{1}{n})^n$ یا

$$\left(\frac{1 + 1 + 1 + \dots + 1}{n} \right)^n$$

نتیجہ صریح۔ اگر $1, 1, 1, \dots, 1$ ک غیر مساوی ہوں تو

$$\left(\frac{1 + 1 + 1 + \dots + 1}{n} \right)^n < 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

یعنی $\frac{1 + 1 + 1 + \dots + 1}{n} < (1 + 1 + 1 + \dots + 1)^{\frac{1}{n}}$

الفاظ 'اوسط حسابی' اور 'اوسط ہندسی' کے معنوں میں تو سب سے پہلے یہ نتیجہ ذیل کے الفاظ میں بھی بیان ہو سکتا ہے۔

مثبت مقادیر کی کسی تعداد کا اوسط حسابی ان کے اوسط ہندسی سے بڑا ہوتا ہے۔

مثال۔ ثابت کرو کہ $(1 + 1 + 1 + \dots + 1)^{\frac{1}{n}} < (1 + 1 + 1 + \dots + 1)^{\frac{1}{n}}$

جہاں r سے مراد کوئی حقیقی مقدار ہے۔

چونکہ $\frac{1 + 1 + 1 + \dots + 1}{n} < (1 + 1 + 1 + \dots + 1)^{\frac{1}{n}}$

یعنی $\left(\frac{1 + 1 + 1 + \dots + 1}{n} \right)^n < 1 + 1 + 1 + \dots + 1$

جس سے نتیجہ مطلوبہ آسانی سے حاصل ہو جاتا ہے۔

۲۵۴۔ اگر $1, 1, 1, \dots, 1$ مثبت صحیح عدد ہوں تو

ا ب ج کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو جہاں
ا + ب + ج + مستقل ہے۔

چونکہ ل، م، ن مستقل ہیں اسلئے ا ب ج کی قیمت
بڑی سے بڑی ہوگی جب $(\frac{ا}{ل})$ $(\frac{ب}{م})$ $(\frac{ج}{ن})$ کی قیمت
بڑی سے بڑی ہو، لیکن مؤخر الذکر جملہ ل + م + ن + اجزائے
ضرب کا حاصل ضرب ہے جن کا حاصل تبع ل $(\frac{ا}{ل})$ + م $(\frac{ب}{م})$ + ن $(\frac{ج}{ن})$ +
..... یعنی ا + ب + ج + ہے جو مستقل ہے۔

پس ا ب ج کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ اجزائے
ضرب

$$\frac{ا}{ل} ، \frac{ب}{م} ، \frac{ج}{ن} ، \dots$$

سب باہم مساوی ہوں یعنی

$$\frac{ا}{ل} = \frac{ب}{م} = \frac{ج}{ن} = \dots = \frac{ا + ب + ج + \dots}{ل + م + ن + \dots}$$

یہاں بڑی سے بڑی قیمت ہوگی ل، م، ن $(\frac{ا + ب + ج + \dots}{ل + م + ن + \dots})$

مثال۔ لا کی کسی حقیقی قیمت کے لئے جو تعداداً ا سے کم ہو
(ا + لا) (ا - لا) کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو۔

جملہ مذکورہ بڑے سے بڑا ہوگا جب $(\frac{ا + لا}{م})$ $(\frac{ا - لا}{م})$ بڑے

بڑا ہو، لیکن اس جملہ کے اجزاء کے ضربی کا مجموعہ $۲ \left(\frac{۱+لا}{۳} \right) + ۳ \left(\frac{۱-لا}{۳} \right)$ یعنی ۱۲ ہے اس لئے $(۱+لا)$ کی قیمت بڑی سے بڑی

$$\text{سوقت ہوگی جبکہ } \frac{۱-لا}{۳} = \frac{۱-لا}{۳} \text{ یعنی } لا = - \frac{۱}{۲}$$

لہذا اس کی بڑی سے بڑی قیمت $\frac{۲۶}{۳} \times ۸ = ۶۸$ ہے۔

۲۵۵۔ بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں اکثر اوقات اوپر کے طریقوں کی نسبت زیادہ آسانی سے درجہ دوم کی ایک مساوات کو حل کرنے سے معلوم ہو سکتی ہیں۔ اس کی چند مثالیں باب نہم میں دی جا چکی ہیں، یہاں ہم ایک اور مثال درج کرتے ہیں۔
مثال۔ ایک طاق عدد کو دو ایسے صحیح حصوں میں تقسیم کرو جن کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہو۔

فرض کیو کہ مذکورہ بالا طاق عدد $۲ن + ۱$ ہے اور اس کے حصے $لا$ اور $۲ن + ۱ - لا$ ہیں، نیز ان کا حاصل ضرب $ما$ ہے،
تب $(۱ + ۲ن) لا - لا^۲ = ما$

$$\text{جس سے } لا = \frac{(۱ + ۲ن) \pm \sqrt{(۱ + ۲ن)^۲ - ۴ما}}{۲}$$

لیکن علامت جذر کے اندر کی رقم مثبت ہونی چاہئے، اس لئے صحیحاً $ما = \frac{۱}{۲} (۱ + ۲ن) (۱ + ۲ن - لا)$ یعنی $لا + ۲ن + \frac{۱}{۲}$ سے بڑا نہیں ہو سکتا نیز چونکہ $ما$ صحیح عدد ہے اس لئے اس کی بڑی سے بڑی قیمت $۲ن + ۱$ ہو سکتی ہے، مگر اس قیمت کی رو سے $لا = ۲ن + ۱$ یا $۲ن + ۱$ سے دو حصے $ن$ اور $ن + ۱$ ہیں۔

۲۵۶۔ بعض اوقات ہم ذیل کا طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔

مثال - $\frac{(ا + لا)(ب + لا)}{ج + لا}$ کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت معلوم کرو

ج + لا کی بجائے مار رکھنے سے

$$\frac{(ا - ج + لا)(ب - ج + لا)}{ا} = \text{جملہ مذکور}$$

$$= \frac{(ا - ج)(ب - ج)}{ا} + ا - ج + ب - ج$$

$$= \frac{(ا - ج)(ب - ج)}{ا} + (ا - ج + ب - ج)$$

ہذا جملہ مذکورہ چھوٹے سے چھوٹا ہو گا جب مربع رقم صفر ہو یعنی

$$جب ا = (ا - ج)(ب - ج)$$

پس چھوٹی سے چھوٹی قیمت ہے

$$ا - ج + ب - ج + \frac{(ا - ج)(ب - ج)}{ا}$$

اور اس کے متناظر لا کی قیمت ہے $\frac{(ا - ج)(ب - ج)}{ا} - ج$

امثلہ نمبر ۱۹ (ا)

- ۱۔ ثابت کرو کہ $(ا + ب + لا)(ا + لا + ب + لا)$ کے $ا$ ب $ا$ م
- ۲۔ ثابت کرو کہ $(ب + ج + لا)(ا + ج + لا)$ کے $ا$ ب $ج$
- ۳۔ ثابت کرو کہ کسی حقیقی مثبت مقدار اور اس کے متکاف یا متاثر جمع کبھی ۲ سے کم نہیں ہو سکتا۔

۴۔ اگر $a + b = 1$ اور $a + b = 1$ تو ثابت کرو کہ $a + b = 1$
 ۵۔ اگر $a + b = 1$ اور $a + b = 1$ تو ثابت کرو کہ
 $a + b = 1$

۶۔ اگر $a + b = 1$ تو ثابت کرو کہ $a + b = 1$ اور
 لوک $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$

۷۔ ثابت کرو کہ $(a + b + c)^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$
 ۸۔ بتاؤ کہ $a + b + c$ اور $a + b + c$ میں سے کونسا بڑا ہے۔
 ۹۔ ثابت کرو کہ $a + b + c > a + b + c$
 ۱۰۔ ثابت کرو کہ $a + b + c > a + b + c$

۱۱۔ بتاؤ کہ $a + b + c$ اور $a + b + c$ میں سے کونسا بڑا ہے۔
 ۱۲۔ لا کی مثبت قیمتوں کے لئے معلوم کرو کہ $a + b + c$ میں سے کونسا بڑا ہے۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ اگر $a + b + c = 1$ اور $a + b + c = 1$ تو
 ۱۴۔ لا کی وہ بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو جس کے لئے
 $a + b + c = 1$ اور $a + b + c = 1$ سے۔

۱۵۔ لا ۱۲ + لا ۳۰ کی چھوٹی سے چھوٹی اور ۲۲ لا ۸ - لا ۴
 کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ $(a + b + c)^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ اور $a + b + c = 1$

۱۷۔ بتاؤ کہ $a + b + c$ اور $a + b + c$ میں سے کونسا بڑا ہے۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ $a + b + c > a + b + c$

۱۹۔ اگر n کوئی مثبت صحیح عدد ہو اور ۲ سے بڑا ہو تو بتاؤ کہ

$$\frac{n}{2} < 1 + n \sqrt{1 - \frac{n}{2}}$$

۲۰۔ ثابت کرو کہ $(\frac{n}{2})^n > (\frac{n}{2})^{n-1}$

۲۱۔ ثابت کرو کہ

$$(1) (1 + a + a^2) < 2(a + a^2 + a^3) \quad (2) (1 + a + a^2) < 2(a + a^2 + a^3)$$

$$(2) (1 + a + a^2) < 2(a + a^2 + a^3)$$

۲۲۔ $(1 - a)^2 (1 + a)^2$ کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو جبکہ a اور -2 کے درمیان ہو۔

$$۲۳۔ \frac{(1 + a)(1 + a^2)}{1 + a} \text{ کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت دریافت کرو۔}$$

۲۵۔ اگر a اور b مثبت اور غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{a + b}{2} < \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 \text{ سوائے اس صورت کے جبکہ}$$

m کوئی مثبت کسر واجب ہو۔

$$\text{ظاہر ہے کہ } \frac{a + b}{2} = \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 + \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a + b}{2} \right)^2$$

اور چونکہ $\frac{a + b}{2}$ کم ہے $\frac{a + b}{2}$ سے اس لئے ہم ان دونوں جملوں کو $\frac{a + b}{2}$

کی صعودی قوتوں کی رقوم میں پھیلا سکتے ہیں (دیکھو دفعہ ۱۸۴)

$$\frac{a + b}{2} = \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 + \frac{(1 - m)^2}{2} \left(\frac{a + b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a + b}{2} \right)^2$$

$$+ \frac{(1 - m)^2 (2 - m)^2 (3 - m)^2}{2} \left(\frac{a + b}{2} \right)^4 - \left(\frac{a + b}{2} \right)^4 + \dots$$

(۱) اگر m کوئی مثبت صحیح عدد ہو یا کوئی منفی مقدار ہو تو بائیں جانب کی سب رقوم مثبت ہوں گی اسلئے $\frac{a+b}{m} < \frac{a+b}{n}$

(۲) اگر m مثبت ہو اور n سے کم ہو تو بائیں جانب کی سب رقوم پہلی رقم کے بعد منفی ہوں گی اسلئے $\frac{a+b}{m} > \frac{a+b}{n}$

(۳) اگر $m < 0$ اور مثبت ہو تو m کو $\frac{1}{m}$ کے مساوی فرض کرو جہاں $n > 1$

$$\text{تب } \left(\frac{a+b}{m} \right)^n = \left(\frac{a+b}{n} \right)^m$$

$$\therefore \left(\frac{a+b}{m} \right)^m < \left(\frac{a+b}{n} \right)^n + \dots + \left(\frac{a+b}{n} \right)^n \text{ کی رو سے}$$

$$\therefore \left(\frac{a+b}{m} \right)^m < \frac{a+b}{n}$$

$$\therefore \frac{a+b}{m} < \left(\frac{a+b}{n} \right)^{\frac{1}{m}}$$

پس مسئلہ ثابت ہوا اگر $m = 1$ یا تو لاتساوی، تساوی بن جاتی ہے

۲۵۸۔ اگر n مثبت مقادیر a, b, c, \dots, k ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{a+b+c+\dots+k}{n} < \frac{a+b+c+\dots+k}{m}$$

سوائے اُس صورت کے جب m کوئی مثبت کسر واجب ہو۔

فرض کرو کہ m کی قیمت کچھ ہی ہے جو صفر اور ایک کے درمیان واقع نہیں ہے۔

جملہ a, b, c, \dots, k پر غور کرو اور فرض کرو کہ a اور b

غیر مساوی ہیں، اگر ہم A اور B دونوں کی بجائے دو مساوی مقادیر
 $\frac{A+B}{2}$ اور $\frac{A+B}{2}$ درج کر دیں تو ایسا کرنے سے $A+B$ +
 $C+...+K$ کی قیمت میں تو کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی لیکن
 $A+B+C+...+K$ کی قیمت کم ہو جاتی ہے
 کیونکہ $A+B < \frac{A+B}{2} + \frac{A+B}{2}$
 پس جب تک مقادیر A ، B ، C ، D ، E ، F ، G ، H ، I ، J ، K کی قیمت
 دو مقادیر غیر مساوی رہیں ہم ہمیشہ $A+B+C+...+K$ کی قیمت
 کو کم و بیش کئے بغیر $A+B+C+...+K$ کی قیمت کو کم کر سکتے ہیں
 پس $A+B+C+...+K$ کی قیمت کم سے کم اس صورت میں
 ہوتی ہے جبکہ مقادیر A ، B ، C ، D ، E ، F ، G ، H ، I ، J ، K سب
 یعنی ہر ایک مقدار $A+B+C+...+K$ کے مساوی ہو۔

ن

اس صورت میں $A+B+C+...+K$ کی قیمت
 ن۔ $\frac{A+B+C+...+K}{n}$ کے مساوی ہوتی ہے

اس لئے اگر A ، B ، C ، D ، E ، F ، G ، H ، I ، J ، K غیر مساوی ہوں تو

$$\frac{A+B+C+...+K}{n} < \frac{A+B+C+...+K}{n}$$

اگر ہم صاف اور ایک کے درمیان واقع ہو تو ہم اسی طرح سے ثابت
 کر سکتے ہیں کہ لا تساوی کی علامت $<$ جائیگی۔
 عام الفاظ میں اس مسئلہ کو یوں بھی بیان کر سکتے ہیں۔

ن مثبت مقادیر کی صورت میں قوتوں کا اوسط حسابی ہمیشہ ان مقداروں کے اوسط حسابی کی صورت میں قوت سے بڑا ہوتا ہے باستثناء اس صورت کے جبکہ ہم سمندر اور ایک کے درمیان واقع ہو۔

۲۵۹۔ اگر ب مثبت صحیح عدد ہیں اور $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ اگر $\frac{1}{a}$ کوئی مثبت مقدار ہو تو ثابت کرو کہ $(1 + \frac{1}{a})^n < (1 + \frac{1}{b})^n$

$$(1 + \frac{1}{a})^n = 1 + n \cdot \frac{1}{a} + \frac{n(n-1)}{2} (\frac{1}{a})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} (\frac{1}{a})^3 + \dots +$$

(۱) +

اس سلسلہ میں $1 + \frac{1}{a}$ رقیں ہیں اور

$$(1 + \frac{1}{b})^n = 1 + n \cdot \frac{1}{b} + \frac{n(n-1)}{2} (\frac{1}{b})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} (\frac{1}{b})^3 + \dots +$$

(۲) +

اس سلسلہ میں $1 + \frac{1}{b}$ رقیں ہیں۔

پہلی اور دوسری رقم کے بعد سلسلہ (۱) کی ہر ایک رقم سلسلہ (۲) کی متناظر رقم سے بڑی ہے نیز چونکہ سلسلہ (۱) میں رقم کی تعداد سلسلہ (۲) کی تعدد اور رقم سے بڑی ہے اس لئے سلسلہ (۱) بڑا ہے سلسلہ (۲) سے پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۲۶۰۔ ثابت کرو کہ اگر $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ اور $\frac{1}{a}$ مثبت کسور واجب ہوں اور

$$\sqrt[n]{\frac{a+1}{a-1}} < \sqrt[n]{\frac{b+1}{b-1}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a+1}{a-1}} > \sqrt[n]{\frac{b+1}{b-1}}$$

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \text{ تو } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{ کو } \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \text{ جیسے}$$

لیکن $\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$ کوک $2 = \frac{n+1}{n-1} = (1 + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1)^2} + \dots)$ [دفعہ ۲۶۶]

اور $\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$ کوک $2 = \frac{n+1}{n-1} = (1 + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1)^2} + \dots)$

ان دونوں سلسلوں میں سوائے رقم اول کے پہلے سلسلہ کی ہر ایک رقم دوسرے سلسلہ کی متناظر رقم سے بڑی ہے۔ اس لئے

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} \text{ کوک } \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$$

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۲۶۱۔ ثابت کرو کہ اگر $a > b$ تو $(a+1)^n > (b+1)^n$ ۔

اس سے مستنبط کرو کہ $a^n < (b+1)^n$ ۔

$(a+1)^n - a^n = n a^{n-1} + \dots + 1$ سے تعبیر کرو

لوک ضی = $(a+1)^n - a^n = n a^{n-1} + \dots + 1$ کوک $(a+1)^n - a^n$

= $\{ \text{لوک } (a+1) - \text{لوک } a \} + \dots + 1$

+ $\text{لوک } (a+1) - \text{لوک } a$

$$= 2(a+1) + \frac{2}{3}a^2 + \frac{2}{4}a^3 + \dots + \frac{2}{n}a^{n-1} + \dots + 1$$

$$= \left(\frac{2}{1 \times 2} + \frac{2}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 4} + \dots + \frac{2}{(n-1) \times n} \right) + 1$$

پس کوک ضی مثبت ہے اور اس لئے ضی > 1

یعنی $(1 + \frac{1}{x}) > (1 - \frac{1}{x})$ $\frac{1}{x} < 1$

اس نتیجہ میں رکھو $\frac{1}{x} < 1$ جہاں $\frac{1}{x} < 1$

تب $(1 + \frac{1}{x}) > (1 - \frac{1}{x})$ $\frac{1}{x} < 1$

نہ $(\frac{1}{x} + 1) > (\frac{1}{x} - 1)$ $\frac{1}{x} < 1$ یعنی

نہ $(\frac{1}{x} + 1) > (\frac{1}{x} - 1)$ $\frac{1}{x} < 1$

اب $\frac{1}{x} + 1 > \frac{1}{x} - 1$ اور $\frac{1}{x} < 1$ کے مساوی رکھو جس سے

$$\frac{1}{x} = 1$$

نہ $\frac{1}{x} < 1$ $(\frac{1}{x} + 1) > (\frac{1}{x} - 1)$

اشلہ نمبری ۱۹ (ب)

۱- ثابت کرو کہ $(1 + \frac{1}{x}) > (1 - \frac{1}{x})$ $\frac{1}{x} < 1$

۲- ثابت کرو کہ $(1 + \frac{1}{x}) > (1 - \frac{1}{x})$ $\frac{1}{x} < 1$

۳- ثابت کرو کہ اگر $\frac{1}{x} < 1$ تو پہلے $\frac{1}{x}$ جفت اعداد کی صورت میں تو توں کا حاصل جمع $(1 + \frac{1}{x})$ سے بڑا ہوتا ہے۔

۴- اگر $\frac{1}{x}$ اور $\frac{1}{x}$ دو مثبت مقادیر ہوں اور $\frac{1}{x} < 1$ بہ سے تو ثابت کرو کہ

$$(\frac{1}{x} + 1) > (\frac{1}{x} - 1)$$

اس سے بتاؤ کہ اگر $\frac{1}{x} < 1$ تو $(\frac{1}{x} + 1) > (\frac{1}{x} - 1)$ کی قیمت ۲ اور ۱۸ ۲/۲

کے درمیان واقع ہوتی ہے۔
۵۔ اگر 'ا'، 'ب'، 'ج' کی قیمتیں نزولی ترتیب میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{ا+ج}{ج-ا}\right) > \left(\frac{ب+ج}{ج-ب}\right)$$

۶۔ ثابت کرو کہ $\left(\frac{ا+ب+ج+...+ک}{ن}\right) > ا+ب+ج+...+ک$

$$> ا+ب+ج+...+ک$$

۷۔ ثابت کرو کہ اگر $م < ن$ تو $\frac{۱}{م} > \frac{۱}{ن}$ لو کہ $(ا+۱) > (ب+۱)$

۸۔ اگر $ن$ کوئی مثبت صحیح عدد ہو اور $لا > ۱$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱-لا}{ن} > \frac{۱-لا^{۱+ن}}{۱+ن}$$

۹۔ اگر 'ا'، 'ب'، 'ج' سلسلہ موسیقیہ میں ہوں اور $ن < ۱$ تو ثابت

$$کر کہ \frac{۱}{ا} + \frac{۱}{ب} < \frac{۱}{ج}$$

۱۰۔ اگر لا مثبت ہو اور $ا$ سے کم ہو تو لا $(۳-ا-لا)$ کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو، نیز معلوم کرو کہ اگر لا کوئی کسر واجب

ہو تو لا $\frac{۱}{۴}$ (۱-لا) کی بڑی سے بڑی قیمت کیا ہوگی۔

۱۱۔ اگر لا مثبت ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{لا}{۱+لا} < لا اور لا > \frac{لا}{۱+لا}$$

۱۲۔ اگر لا + ما + می = ۱ تو ثابت کرو کہ $\frac{۱}{لا} + \frac{۱}{ما} + \frac{۱}{می} > ۱$ کی

چھوٹی سے چھوٹی قیمت ۹ ہے اور (۱-لا) (۱-ما) (۱-می) < ۸ لامی

پیسواں باب

انتہائی قیمتیں اور کسور منہدم

۲۶۲۔ اگر $\frac{1}{2}$ کوئی مستقل محدود مقدار ہو تو لا کو کافی طور پر بڑھانے سے ہم کسر $\frac{1}{2}$ کی قیمت کو جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں، باضابطہ دیگر لا کو کافی بڑا لینے سے $\frac{1}{2}$ کی قیمت صفر کے اتنی قریب لائی جاسکتی ہے جتنی ہم چاہیں۔ اس مفہوم کو مختصر آیوں بیان کرتے ہیں کہ "جب لا لامتناہی ہو تو $\frac{1}{2}$ کی انتہا یا نہایت صفر ہوتی ہے۔" بخلاف اس سے جیسے جیسے لام ہوتا جاتا ہے کسر $\frac{1}{2}$ کی قیمت بڑھتی جاتی ہے اور ہم لا کو کافی حد تک چھوٹا کرنے سے $\frac{1}{2}$ کی قیمت کو اتنا بڑھا سکتے

ہیں جتنا کہ ہم چاہیں مثلاً جب لا صفر ہو جائے تو $\frac{1}{2}$ کی انتہا محدود نہیں رہتی۔ اس کو بالعموم یوں بیان کرتے ہیں کہ جب لا صفر ہو تو $\frac{1}{2}$ کی انتہائی قیمت لا متناہی ہو جاتی ہے۔

۲۶۳۔ جب ہم یہ کہتے ہیں کہ کوئی مقدار لا انتہا بڑھ جاتی ہے یا لا متناہی ہو جاتی ہے تو اس سے ہماری یہ مراد ہوتی ہے کہ مقدار زیر بحث ہر بڑی سے بڑی مقدار سے جس کو ہم ذہن میں لاسکیں زیادہ ہو جاتی ہے۔ اسی طرح جب ہم یہ کہتے ہیں کہ کوئی مقدار لا انتہا چھوٹی ہو جاتی ہے تو اس سے ہماری یہ مراد ہوتی ہے کہ مقدار زیر بحث ہر چھوٹی سے چھوٹی مقدار سے جس کو ہم ذہن میں لاسکیں کم ہو جاتی ہے۔

نسی ایسی مقدار کی قیمت کو جو لا انتہا بڑی ہو جائے علامت ∞ کے ذریعے
سیر کیا جاتا ہے، اور کسی ایسی مقدار کی قیمت کو جو لا انتہا چھوٹی ہو جائے
علامت 0 سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

۲۶۱۔ ان علامات کے استعمال سے دفعہ ۲۶۲ کے دو مطالب
بے طرح ادا کئے جاسکتے ہیں

اگر لا ∞ ہو تو $\frac{1}{لا}$ ہوتا ہے 0

اگر لا 0 ہو تو $\frac{1}{لا}$ ہوتا ہے ∞

لیکن طرز بیان کے اس مختصر طریقہ کو اختیار کرتے وقت یاد رہے کہ
علامتیں درحقیقت زیادہ مفصل و مشرح زبانی الفاظ کا محض اختصار
ہیں۔

۲۶۱۔ اس سے قبل جہاں کہیں ہم نے لفظ "انتہا" کا استعمال
یا ہے طالب علم کو غالباً اس کا مفہوم سمجھنے میں کوئی دقت واقع
میں ہوئی ہوگی لیکن چونکہ علم ریاضی کے اعلیٰ طبقوں کے لئے
فاظ "نہایت" اور "انتہائی قیمت" کے مفہوم کو زیادہ صحت اور
مدگی کے ساتھ سمجھ لینا نہایت ضروری ہے اس لئے ہم یہاں
ن کے استعمال اور معانی کی مزید توضیح کر دینا مناسب سمجھتے ہیں۔

۲۶۱۔ تعریف۔ اگر کوئی تغاقل $(=)$ $ف$ (لا) ایسا ہو کہ
یے لا 0 کے قریب آتا جائے $ف$ (لا) اور ایک ثابت
مقدار $ب$ کے فرق کو اتنا کم کر دینا ممکن ہو جتنا کہ ہم چاہیں تو اسے
بے بیان کرتے ہیں کہ ما کی انتہا $ب$ ہے جب لا مائل بہ
ہو۔

مثلاً اگر سلسلہ $1 + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۲} + \dots$ کی n رقموں کے
مجموعہ کو $ج$ سے تعبیر کیا جائے تو $ج = ۲ - \frac{1}{۲^n}$ [دفعہ ۲۵۱]

لے کم ہوئی پس مسئلہ زیر بحث اس صورت میں بھی صریحاً درست ہوگا۔
۲۔ سلسلہ $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ میں لا کو کافی طور پر چھوٹا
سے ہم کسی رقم کو اس کے بعد کی رقوم کے مجموعہ سے اتنا بڑا بنا سکتے ہیں
اکہ ہم چاہیں اور لا کو کافی طور پر بڑا لینے سے ہم کسی رقم کو اس کے
کی رقوم کے مجموعہ سے اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔
رقم 1 کی نسبت اسکے بعد کی سب رقوم کے مجموعہ کے ساتھ

و

و لا

۱۔ $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ و $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$
کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے ہم اتنے سے سب نام کو اتنا چھوٹا
سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں بالفاظ دیگر ہم اس کے بعد کی قیمت کو اتنا بڑا
سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔

اسی رقم 1 لا کی نسبت اس کے پہلے کی سب رقوم کے مجموعہ کے ساتھ

و لا

و

۱۔ $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ و $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$
ماں $= \frac{1}{1}$
ب لا، لا انتہا بڑا ہو تو ما، لا انتہا چھوٹا ہوگا، پس مثال ماقبل کی مانند
م کسر بالا کو اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔
۲۶۔ مسئلہ ماقبل کی ایک خاص صورت جو ذیل میں دی گئی ہے بہت
بید اور کار آمد ہے۔

جملہ $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ و $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$

نوم کی ایک محدود تعداد پر مشتمل ہے اور اس میں لا کی قوتیں نزدیکی

ترتیب میں ہیں، اس میں لا کو کافی طور پر چھوٹا کرنے سے ہم آخری رقم کو رقوم ماسبق کے حاصل جمع سے مقابلہ اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں اور لا کو کافی طور پر بڑا لینے سے ہم ابتدائی رقم کو لا کو رقوم مابعد کے حاصل جمع سے اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔

مثال ۱۔ ن کو کافی بڑا لینے سے ہم ن - ۵، ن - ۶، ن + ۹ کی پہلی رقم نو باقی رقموں کے مجموعہ سے اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔ اس کے یہ معنی ہیں کہ ہم پورے جملہ کی بجائے صرف پہلی رقم یعنی ن لے سکتے ہیں بشرطیکہ ن کو کافی بڑا بنانے سے جملہ مذکور اور ن کے تفاوت کو حسب خواہش کم کر دیا جائے۔

مثال ۲۔ $\frac{۳ - لا^۳}{۵ - لا^۵} - لا^۲$ کی انتہا معلوم کرو جبکہ (۱) لا، لا انتہائی

ہو اور (۲) لا صفر ہو

(۱) شمار کنندہ اور منب نامیں ہم پہلی رقم کے سوائے باقی سب

رقوم کو نظر انداز کر سکتے ہیں اسلئے انتہا مطلوبہ $\frac{۳ - لا^۳}{۵ - لا^۵} = \frac{۳}{۵}$ ہے۔

(۲) جب لا، لا انتہائی چھوٹا ہو تو انتہا مطلوبہ $\frac{۳ - لا^۳}{۵ - لا^۵}$ یعنی $\frac{۳}{۵}$ ہوگی۔

مثال ۳۔ $\frac{لا + ۱}{لا - ۱}$ کی انتہا معلوم کرو جب لا صفر ہو۔

فرض کرو کہ رقم مذکور ض کے مساوی ہے، تب لوکار تم لینے سے

لوک ض = $\frac{۱}{لا}$ { لوک (لا + ۱) - لوک (لا - ۱) }

$= ۲(۱ + \frac{لا^۲}{۴} + \frac{لا^۴}{۸} + \dots) - \dots$ (دفعہ ۲۲۶)

جس سے ظاہر ہے کہ لوک ض کی انتہا ۲ ہے، پس مطلوبہ انتہا کی قیمت ۲ ہے۔

کسور منعدم

۲۷ - فرض کرو کہ کسر

$$\frac{لا^۲ + لا - لا^۲}{لا - لا^۲}$$

انتہا دریافت کرنا مطلوب ہے جبکہ $لا = لا$ ۔
 ہم $لا$ کو $لا + لا$ کے مساوی رکھیں تو جوں جوں $لا$ کی قیمت $لا$
 قریب آتی جائے گی $لا$ کی قیمت صفر کے قریب آتی جائے گی۔
 کی بجائے $لا + لا$ منہج کرنے سے

$$\frac{لا^۲ + لا - لا^۲}{لا - لا^۲} = \frac{لا^۲ + لا + لا - لا^۲}{لا - لا^۲} = \frac{لا + لا}{لا - لا^۲}$$

یہ $لا$ انتہا چھوٹا ہو تو اس جملہ کی انتہا $لا$ ہوگی۔
 اس سوال کو ہم ایک اور نقطہ نظر سے بھی دیکھ سکتے ہیں

$$\frac{لا^۲ + لا - لا^۲}{لا - لا^۲} = \frac{(لا + لا)(لا - لا)}{(لا - لا)(لا + لا)} = \frac{لا + لا}{لا + لا}$$

ما وقت $لا = لا$ رکھنے سے جملہ مذکورہ بالا کی قیمت صفر بنتی ہے۔

ہم جملہ زیر بحث $\frac{لا^۲ + لا - لا^۲}{لا - لا^۲}$ میں اختصار سے قبل $لا = لا$

میں تو ہم دیکھیں گے کہ کسر بالا صفر کی شکل اختیار کر لیتی ہے جس کی
 مت معین نہیں کی جاسکتی۔ نیز ہم دیکھتے ہیں اس کا یہ شکل انتہا
 شمار کنندہ اور نسب نامہ دونوں میں جزو ضربی $(لا - لا)$ کی

جو دگی کی وجہ سے ہے۔ تو تقسیم نہیں کر سکتے لیکن یہ ضرور ہے کہ
 اب ہم جزو ضربی صفر پر تو تقسیم نہیں کر سکتے لیکن یہ ضرور ہے کہ

جب تک $\frac{لا}{لا}$ کے عین مساوی نہیں ہوتا ہم جزو ضروری لا۔ و کو شمار کنندہ اور نسب نامہ دونوں میں سے نکال سکتے ہیں۔
اس کے بعد ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے لا کی قیمت و کے قریب آتی جاتی ہے، کسر زیر بحث کی قیمت $\frac{لا}{لا}$ کے نزدیک ہوتی جاتی ہے یعنی دفعہ ۲۶۶ کی تعریف کے بموجب

اگر $لا = و$ تو $\frac{لا}{لا} = \frac{لا}{لا}$ کی انتہا $\frac{لا}{لا}$ ہے۔

۲۷۲۔ اگر $\frac{لا}{لا}$ اور $\frac{لا}{لا}$ کے دو تفاعل ہوں جن میں سے ہر ایک تفاعل لا کی کسی خاص قیمت و کے لئے صفر ہو جائے تو کسر $\frac{لا}{لا}$ شکل $\frac{صفر}{صفر}$ اختیار کرتی ہے، اس قسم کی کسر کو کسر غیر معین یا کسر منعدم کہتے ہیں۔

مثال ۱۔ اگر $لا = ۳$ تو $\frac{لا}{لا} = \frac{۳}{۳}$ کی انتہا میثاق کو

جب $لا = ۳$ تو یہ کسر $\frac{صفر}{صفر}$ کی غیر معین صورت اختیار کر لیتی ہے، لیکن شمار کنندہ اور نسب نامہ دونوں میں سے جزو ضروری (لا = ۳) نکال دینے سے کسر بالا $\frac{لا}{لا} = \frac{۱}{۱}$ رہ جاتی ہے اور جب $لا = ۳$ تو یہ $\frac{۱}{۱}$ ہو جاتی ہے، پس $\frac{۱}{۱}$ مطلوبہ انتہا ہے۔

مثال ۲۔ کسر $\frac{لا}{لا} = \frac{۳}{۳}$ کی قیمت جبکہ $لا = و$ صفر ہو جاتی ہے، اس کی انتہا معلوم کرنے کے لئے شمار کنندہ اور نسب نامہ دونوں کو اصم $\frac{لا}{لا} = \frac{۳}{۳}$ کی فردوج اصم سے ضرب

کسر مذکور

$$\frac{(۳-۱) - (۱+۱)}{(۱-۱)(۳-۱) + (۱+۱)} \text{ یا } \frac{۲}{۳-۱+۱+۱}$$

جائے گی۔ اس میں لا = ۱ رکھنے سے اس کی انتہا $\frac{۱}{۳}$ ہے۔

ال ۳۔ کسر $\frac{۱-۳}{۱-۱}$ کی قیمت جب لا = ۱ صفر بنتی ہے اس کی انتہا معلوم کرنے کے لئے لا = ۱ + ہر کسر مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلاؤ تب کسر مذکورہ

$$\frac{(۱+۱) - \frac{۱}{۳}}{(۱+۱) - \frac{۱}{۳}} = \frac{(۱+۱) - \frac{۱}{۳}}{(۱+۱) - \frac{۱}{۳}} =$$

$$\frac{\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳}} =$$

ب لا = ۱ تو ہر = ۰، اس لئے مطلوبہ انتہا $\frac{۰}{۰}$ ہے۔

۲۷۔ بعض اوقات کسی مساوات کے سروں میں ایسا تعلق ہوتا ہے جس کی وجہ سے اس مساوات کی اصلیں غیر معین صورت اختیار کرتی ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ $۱ + لا = ب = ج + لا + د$
تب $(۱ - ج) لا = د - ب$

$$لا = \frac{د - ب}{۱ - ج}$$

ب اگر $۱ = ج$ تو لا = $\frac{د - ب}{۰}$ یا ∞

پس ایک سادہ (خطی) مساوات کی اصل لا متناہی ہوتی ہے اگر
لا کا سر لا انتہا چھوٹا ہو۔

۲۷۴۔ ہمزاد مساواتوں

$$لا + ب + ما + ج = .$$

$$لا + ب + ما + ج = .$$

$$\text{کامل لا} = \frac{ب + ج - ب + ج}{ب - ب} = \frac{ج - ج}{ب - ب} = ۱$$

اگر $ب = ۱$ ، $ج = ۱$ ، تو لا اور ما دونوں لا متناہی ہو جاتے ہیں

$$\text{اس صورت میں } \frac{ب}{ب} = ۱ \text{ (جو فرض کرو کہ) } = م$$

و اور $ب$ کی قیمتیں بالترتیب ۱ م اور $ب$ م دوسری مساوات
میں مندرج کرنے سے یہ مساوات $لا + ب + ما + ج = .$ ہو جاتی ہے

اگر $ج = ۱$ ، $ب = ۱$ کے مساوی نہ ہو تو دو مساواتوں $لا + ب + ما + ج = .$

اور $لا + ب + ما + ج = .$ کا اختلاف صرت رقم مطلق میں ہے

اور غیر مطابق ہونے کی وجہ سے یہ لا اور ما کی کسی محدود قیمت
سے پوری نہیں ہو سکتیں۔

$$\text{اگر } \frac{ج}{م} = ۱ \text{، } ج \text{ کے مساوی ہو تو } \frac{ب}{ب} = ۱ = \frac{ج}{ج} \text{، یعنی}$$

دونوں مساواتیں ایک دوسرے کے بالکل متماثل ہیں۔

اس صورت میں چونکہ $ب + ج = ۱$ اور $ج + لا = ۱$ ۔

اس لئے لا اور ما دونوں کی قیمتیں صفر ہو جاتی ہیں اور بنا بریں

ان ہمزاد مساواتوں کا حل غیر معین ہو جاتا ہے، درحقیقت اس

ارت میں ہمارے پاس صرف ایک ہی مساوات ہے جس میں
بہول مقداریں شامل ہیں اور ایسی مساوات صرفاً مجہول مقادیر کی
تعداد قیمتوں سے پوری ہو سکتی ہے۔ [ملاحظہ ہو دفعہ ۱۳۸]
طالب علم اگر ہندسہ تخلیلی سے واقف ہے تو اس کو خط مستقیم
ہندسہ کے موافق ابن نتالج کو ہندسی معنی پہنانے میں کوئی دقت
پہنچے گی۔

۲۷۔ اب ہم چند ایسی خصوصیات پر بحث کرتے ہیں جو مساوات
بہ دوم کے حل میں پیش آتی ہیں۔
ض کرو کہ مساوات $ا + لا + ب + ج = ۰$ ہے
اگر $ج = ۰$ تو $ا + لا + ب = ۰$

س سے $لا = ۰$ یا $ب = \frac{۰}{ا}$ ، یعنی مساوات کی ایک اصل صفر

بہ اور دوسری $ب = \frac{۰}{ا}$
ب = ۰۔ تو اصلیں کچھ خاص مقدار کے مساوی لیکن مختلف علامت ہیں
[دفعہ ۱۱۸]

۱۔ $ا = ۰$ ۔ تو مساوات $ب + لا + ج = ۰$ ہو جاتی ہے اور بظاہر یہ
معلوم ہوتا ہے کہ اس صورت میں درجہ دوم کی مساوات کی صرف
بہ اصل رہ جاتی ہے، لیکن چونکہ درجہ دوم کی ہر مساوات کی
اصلیں ہونی چاہئیں اس لئے ہم دوسری اصل کی قیمت پر نسب
ب بحث کرتے ہیں۔

ابتدائی مساوات میں لا کی بجائے $\frac{۱}{ا}$ لکھو اور کسروں کو صاف
رو، تب

$$ج + ما + ب + ا = ۰$$

ب = ۰۔ رکھنے سے $ج + ما + ب + ا = ۰$ ، اس کا حل ہے $ما = -\frac{۱}{ج}$

یعنی لا = ∞ یا - $\frac{ج}{ب}$

پس اگر درجہ دوم کی کسی مساوات میں لا کاسر صفر ہو جائے تو مساوات کی ایک اصل لا متناہی ہوتی ہے۔
اعلیٰ ریاضی کی اکثر شاخوں میں یہ نتیجہ مندرجہ بالا الفاظ میں مرقوم کیا جاتا ہے لیکن مبتدی کو یاد رہے کہ درحقیقت یہ الفاظ ذیل کے تفصیلی الفاظ کا سہولت بخش اقتباس ہیں۔
مساوات لا + ب لا + ج = ۰ میں اگر لا بہت چھوٹا ہو تو مساوات کی ایک اصل بہت بڑی ہوتی ہے اور جب لا انتہا کم ہوتا جاتا ہے تو یہ اصل لا انتہا بڑی ہوتی جاتی ہے، اس صورت میں محدود اصل اپنی انتہا - $\frac{ج}{ب}$ کے نہایت قریب آتی جاتی ہے۔ اسی طرح ان صورتوں پر بھی جن میں ایک سے زیادہ سرغشود ہوں بحث کی جاسکتی ہے۔

امثلہ نمبری ۲۰

ذیل کے جلوں کی انتہائیں معلوم کرو جب (۱) لا = ∞، (۲) لا = ۰۔

۱- $\frac{(۳-لا۲)(۳-لا۵)}{۴+لا۶-لا۴}$	۲- $\frac{(۳-لا۱)(۳-لا۱)}{۹+لا۴}$
۳- $\frac{(۲+لا۲)(۲-لا۵)}{(۲-لا۴)(۱+لا۱)}$	۴- $\frac{(۳-لا)(۵+لا)(۲-لا۴)}{۳(۱+لا)(۱-لا۴)}$
۵- $\frac{لا-۱}{لا۲} \div \frac{لا-۱}{لا۲}$	

ذیل کے جملات کی انتہائیں معلوم کرو۔

۶- $\frac{لا+۱}{لا-۱}$ جبکہ لا = ۱

$$-۸ \quad \frac{و-ب^۲}{و} \text{ جبکہ } و=۰$$

$$-۹ \quad \frac{و^۲-و-و^۲}{لوک(و+۱)} \text{ جبکہ } و=۰$$

$$-۱۰ \quad \frac{و^۳-و^۲}{و-۱} \text{ جبکہ } و=۱$$

$$-۱۱ \quad \frac{\sqrt{و-۱} + \sqrt{و+۱}}{\sqrt{و-۱} - \sqrt{و+۱}} \text{ جب } و=۲$$

$$-۱۲ \quad \frac{لوک(و+۱+و^۲+و^۳)}{و^۳(و-۱+و^۲+و^۳)} \text{ جب } و=۰$$

$$-۱۳ \quad \frac{و-۱+لوک و}{و-۱+و^۲+و^۳} \text{ جب } و=۱$$

$$-۱۴ \quad \frac{\frac{۳}{۲}(و-۱) + \frac{۱}{۲}(و^۲-و)}{\frac{۳}{۲}(و-۱) + \frac{۱}{۲}(و^۲-و^۳)} \text{ جب } و=۱$$

$$-۱۵ \quad \frac{\sqrt{و+۱+و^۲+و^۳} - \sqrt{و-۱+و^۲+و^۳}}{\sqrt{و+۱} - \sqrt{و-۱}} \text{ جب } و=۰$$

$$-۱۶ \quad \left\{ \left(\frac{و+۱}{و} \right)^و - \left(\frac{و+۱}{و} \right)^ن \right\} \text{ جب } و=ن$$

$$-۱۷ \quad \frac{و}{و^و(و+۱)} \text{ جب } و=∞$$

$$-۱۸ \quad \frac{\sqrt{و+۱}}{و-۱} \text{ جب } و=۰$$

اکیسواں باب

سلسلوں کا استدقاق اور اتساع

۲۷۶۔ ایسے جملہ کو جس کی مسلسل رقوم کسی خاص قانون کے موافق بنائی جائیں سلسلہ کہتے ہیں، وہ سلسلہ جس میں رقوم کی محدود تعداد شامل ہو متناہی سلسلہ کہلاتا ہے اور جس میں رقوم کی تعداد غیر محدود ہو اسے لامتناہی سلسلہ کہتے ہیں۔
اس باب میں ہم کسی سلسلہ کو ذیل کی شکل کے جملہ سے تعبیر کریں گے۔

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

۲۷۷۔ فرض کرو کہ ہمارے پاس ایک سلسلہ ہے جس میں n رقوم شامل ہیں، اس سلسلہ کا حاصل جمع n کا ایک تفاعل ہو گا۔ اگر n لامتناہی بڑھ جائے تو سلسلہ کا حاصل جمع انتہائی صورت میں یا تو کسی محدود انتہائی طرف مائل ہو گا یا لامتناہی بڑھ جائے گا۔

اگر کسی لامتناہی سلسلہ کی پہلی n رقوم کا حاصل جمع تعداد کبھی ایک خاص محدود مقدار سے تجاوز نہ کرے خواہ n کو کتنا ہی کیوں نہ بڑھا دیا جائے تو ایسے سلسلہ کو مستدق سلسلہ کہتے ہیں۔

اگر کسی لامتناہی سلسلہ میں n کو کافی طور پر بڑھانے سے اس کی پہلی n رقوم کا حاصل جمع تعداد ہر محدود مقدار سے بڑھا بنایا جاسکے تو ایسے سلسلہ کو متسع سلسلہ کہتے ہیں۔

۲۱۔ اگر ہم کسی سلسلہ کی پہلی n رقموں کا حاصل جمع معلوم
میں تو یہ دیکھنے سے کہ n کو لا انتہا بڑا بنانے پر حاصل جمع محدود
دور رہتا ہے یا غیر محدود ہو جاتا ہے ہم فوراً معلوم کر سکتے ہیں کہ
لہ زیر بحث مستحق ہے یا مشع۔ مثلاً سلسلہ $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$

پہلی n رقموں کا حاصل جمع $\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$ ہے۔

جب لا تعداد ایک سے کم ہو تو حاصل جمع ایک محدود
ہوگا $\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$ کے بتدریج قریباً جاتا ہے اس لئے اس صورت
سلسلہ مستحق ہوتا ہے۔

لا تعداد ایک سے بڑا ہو تو n کو کافی طور پر بڑا کرنے سے پہلی n
وں کے حاصل جمع یعنی $\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$ کی قیمت کو ہر محدود مقدار
بڑا بنایا جاسکتا ہے۔ اس لئے اس صورت میں سلسلہ بالا مشع
ہوتا ہے۔

۲۲۔ لا = ۱ تو پہلی n رقموں کا مجموعہ n ہوگا، اس لئے سلسلہ
میشع ہوگا۔
لا = ۰ تو سلسلہ بالا

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

جاتا ہے۔ اس میں پہلی جفت رقم کا مجموعہ صفر ہے اور پہلی
اق رقم کا مجموعہ ایک ہے۔

فی حاصل جمع صفر اور ایک کے درمیان ہتھولہ کرتا ہے۔ لہذا
سلسلہ ان سلاخوں کے قبیل میں سے ہے جن کو ہتھولہ بازی
سلسلے یا دوری مستحق سلسلے کہتے ہیں۔

۲۳۔ ایسی صورتیں اکثر پیش آتی ہیں جن میں ہم پہلی n رقم کا

حال جمع معلوم نہیں کر سکتے، اس لئے ذیل میں ہم اُن قواعد پر بحث کرینگے جن کے ذریعہ جمع کا عمل کئے بغیر یہ معلوم ہو سکے کہ کوئی دیا ہوا سلسلہ مستحق ہے یا مستع۔

۲۸۰۔ اگر کسی سلسلہ کی متبادل رقوم مثبت اور منفی ہوں اور ہر رقوم اپنی رقوم قبل سے تعداد کم ہو تو سلسلہ مستحق ہوگا

... + $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$ سے تعبیر کرو

..... جہاں $\angle E < \angle F < \angle G$

اس سلسلہ کو ذیل کی ہر دو اشکال میں لکھا جاسکتا ہے

$$(1) \dots + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right)$$

$$(2) \dots - (\frac{6}{5} - \frac{6}{5}) - (\frac{6}{5} - \frac{6}{5}) - \frac{6}{5}$$

پہلی شکل سے یہ واضح ہوتا ہے کہ سلسلہ کا حاصل جمع ایک مثبت

مقدار کے مساوی ہے اور دوسری شکل سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ رقوم کی کسی تعداد کا مجموعہ ۶ سے کم ہے۔ لہذا سلسلہ مستحق

۱۸۱- مثلاً سلسلہ

$$\dots + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} -$$

مستحق ہے دفعہ ۳۲ میں $9 = 1$ رکھنے سے ظاہر

اس سلسلہ کا ماحصل جمع لوگوں پر ۲ ہے۔

نیز سلسلہ

$$\frac{P_{\text{avg}}}{P_{\text{ref}}} = -\frac{4}{5} + \frac{5}{2} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{1}$$

ہر ایک رقم اپنی رقم ماقبل سے تعداد کم ہے، اس لئے یہ سلسلہ مستدق ہے۔ یہ سلسلہ ذیل کے دو سلسلوں کا مجموعہ ہے

$$(۱) \quad ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۱۰} + \dots (۱)$$

$$(۲) \quad ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots (۲)$$

ب (۱) تو لوک ۲ کے مساوی ہے اور (۲) تعداد رقوم کے

ت ہونے کی صورت میں صفر کے اور طاق ہونے کی صورت میں ۱ کے مساوی ہے۔ پس سلسلہ نذا مستدق ہے اور اسکا اصل جمع تعداد رقوم کے جفت ہونے کی صورت میں لوک ۲ اور طاق ہونے کی صورت میں ۱ + لوک ۲ کی طرف استدقاق پاتا ہے۔

۲۸۔ اگر ایک لامتناہی سلسلہ کی سب رقوم کی علامت ایک ہو اور ہر ایک رقم کسی محدود مقدار سے جو خواہ کتنی ہی چھوٹی و بڑی ہو تو سلسلہ متسع ہوتا ہے۔

ہونکہ اگر ہر ایک رقم کسی محدود مقدار ۱ سے بڑی ہو تو پہلی ن رقوم کا حاصل جمع ن ۱ سے بڑا ہوگا اور ظاہر ہے کہ ن کو کافی دور پر بڑا لینے سے ن ۱ کو ہمیشہ کسی خاص محدود مقدار سے بڑا لایا جاسکتا ہے۔

۲۸۱۔ استدقاق اور اتساع کی جانچ کے متعلق مزید تحقیقات نے سے قبل ذیل میں ہم چند ایسے اصول درج کر دینا چاہتے ہیں جن کو کم و بیش حد تک علوم متعارفہ تصور کیا جاسکتا ہے۔

(۱) اگر کوئی سلسلہ مستدق ہو تو یہ مستدق رہے گا اور اگر ہو تو متسع رہے گا جب اس میں اس کی رقوم کی ایک تعداد جمع کر دی جائے یا نکال دی جائے، کیونکہ ان جمع کردہ

یعنی $\frac{ع}{۱-ع}$ چونکہ $ر > ۱$

اس سلسلہ کا مستحق ہے۔

۲۔ دفعہ ماقبل کے دعوت میں طالب علم کو چاہئے کہ الفاظ
ب مقدرہ قہ سے شروع ہو کر اس کے بعد کی رقوم میں "کی ضرورت
مجھی طرح سے سمجھ کر ذہن نشین کر لے۔

ذیل کے سلسلہ پر غور کرو

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + \dots$$

$$\text{یہاں } \frac{ع}{۱-ع} = \frac{ن}{۱-ن} = (۱ + \frac{۱}{ن-۱})$$

ن کو کافی طور پر بڑا بنانے سے ہم اس نسبت کی قیمت کو لا
ابتنا قریب لاسکتے ہیں جتنا ہم چاہیں اور بالآخر ہر رقم کی نسبت
م ماقبل کے ساتھ لا بنا سکتے ہیں، پس سلسلہ بالا مستحق ہوگا
لا > ۱

لیکن نسبت $\frac{ع}{۱-ع}$ ایک سے کم نہیں ہوگی جب تک کہ

$$\frac{ن}{۱-ن} \text{ کم نہ ہو ایک سے یعنی } ن \text{ بڑا نہ ہو } \frac{۱}{۱-لا} \text{ سے}$$

اس سے ظاہر ہے کہ مستحق سلسلہ ایسا ہو سکتا ہے کہ اس کی
م ایک خاص تعداد تک بڑھتی رہیں اور اس کے بعد گھٹنا شروع

$$ن، مثلاً سلسلہ بالا میں اگر لا = \frac{۹۹}{۱۰۰} \text{ تو } \frac{۱}{۱-لا} = ۱۰۰، اسلئے$$

م ۱۰۰ ویں رقم سے پہلے گھٹنا شروع نہیں ہوتی۔

۲۔ اگر کسی لامتناہی سلسلہ میں سب رقوم کی علامت مثبت ہو

اور ایک مقررہ رقم سے آگے اس کے بعد کی رقوم میں ہر رقم کی نسبت رقم ماقبل کے ساتھ ایک کے مساوی ہو یا ایک سے زیادہ ہو تو سلسلہ متسع ہوگا۔

فرض کرو کہ مقررہ رقم ۱ ہے، اگر نسبت مذکورہ ایک کے مساوی ہو تو رقوم مابعد میں سے ہر ایک رقم ۱ کے برابر ہوگی اور n رقوم کا مجموعہ n ہوگا، پس سلسلہ متسع ہوگا۔

اگر یہ نسبت ایک سے زیادہ ہو تو رقم مقررہ کے بعد ہر ایک رقم ۱ سے بڑی ہوگی اور n رقوم کا مجموعہ n سے بڑا ہوگا، یعنی سلسلہ متسع ہوگا۔

۲۸۷۔ آزمائش کے اس طریقہ کو عملی طور پر استعمال کرتے وقت یہ معلوم کرنے کی زحمت سے بچنے کے لئے کہ کونسی رقم کے بعد ہر رقم اپنی رقم ماقبل سے کم یا زیادہ ہونا شروع ہوتی ہے

یہ زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے کہ نسبت $\frac{ع}{ع-۱}$ کی نہایت یا

انتہا معلوم کر لی جائے جبکہ n لا انتہا بڑا ہو

فرض کرو کہ یہ انتہا ۱ ہے

اگر $۱ > \frac{ع}{ع-۱}$ تو سلسلہ مستدق ہوگا (دفعہ ۲۸۴)

اگر $۱ < \frac{ع}{ع-۱}$ تو سلسلہ متسع ہوگا (دفعہ ۲۸۶)

اگر $۱ = \frac{ع}{ع-۱}$ تو سلسلہ مستدق ہوگا یا متسع، اور استدقاق و اتساع کی تحقیق کے لئے فرید آزمائش کی ضرورت ہوگی کیونکہ یہ ممکن

ہے کہ کسر $\frac{ع}{ع-۱}$ ایک سے کم ہو اور n کے لا انتہا بڑھ

جانے سے لا انتہائی صورت میں یہ ٹائٹ ہو گئی ہو اس صورت میں

ہم کوئی محدود مقدار ۱ نہیں بتا سکتے جو ایک سے کم ہو مگر ۱

سے زیادہ ہو۔ پس اس صورت میں دفعہ ۲۸۴ کی جانچ کام نہیں

دیتی لیکن اگر $\frac{ع}{ع-۱} < ۱$ اور n کے لا انتہا بڑھ جانے سے

ہائی صورت میں یہ ایک کے قریب آگئی ہو تو دفعہ ۲۸۶ کی رو سے
سلسلہ متسع ہوگا۔

ہم الفاظ ” $\frac{ع}{ع-۱}$ “ کی انتہا جب n لامتناہی ہو کی بجائے

تصاریف علامت نہا $\frac{ع}{ع-۱}$ استعمال کریں گے۔

مثال ۱۔ ایک سلسلہ کی n دین رقم $\frac{(n+1)ل}{n}$ ہے، بتاؤ کہ
سلسلہ مستحق ہے یا متسع۔

$$\text{ہاں } \frac{ع}{ع-۱} = \frac{(n+1)ل}{n} \div \frac{nل}{(n-1)} = \frac{(n+1)(۱-n)}{n}$$

$$= \frac{ع}{ع-۱} = لا$$

پس اگر $لا > ۱$ تو سلسلہ مستحق ہوگا
اور اگر $لا < ۱$ تو سلسلہ متسع ہوگا

لیکن اگر $لا = ۱$ تو نہا $\frac{ع}{ع-۱} = ۱$ ، اور مزید آزمائش کی ضرورت
دگی۔

مثال ۲۔ بتاؤ کہ ذیل کا سلسلہ مستحق ہے یا متسع

$$۱ + ۲لا + ۳لا^۲ + ۴لا^۳ + \dots$$

$$\text{ہاں نہا } \frac{ع}{ع-۱} = \frac{nل}{(n-1)لا} = لا$$

پس اگر $لا > ۱$ تو سلسلہ مستحق ہوگا
اگر $لا < ۱$ تو سلسلہ متسع ہوگا

اگر لا = ۱ تو سلسلہ بالا

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

ہو جاتا ہے جو صریحاً متع ہے

مثال ۳۔ سلسلہ

$$1 + (2+1) + (3+1) + (4+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + \dots$$

$$\text{میں نہا} = \frac{1 + (n+1)}{2} = \frac{n+2}{2}$$

پس اگر لا > ۱ تو سلسلہ بالا مستحق ہوگا اور اس کا حاصل جمع محدود ہوگا۔ [دیکھو دفعہ ۶، نتیجہ صریح]

۲۸۸۔ اگر دو لامتناہی سلسلوں میں سے ہر ایک کی سب رقوم مثبت ہوں اور ان سلسلوں کی متناظر رقوم کی نسبت ہمیشہ محدود رہے تو یہ سلسلے یا دونوں مستحق ہوں گے یا دونوں متع۔ فرض کرو کہ یہ لامتناہی سلسلے

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

میں تباہ کسر

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

کی قیمت کسور

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

میں سے بڑی سے بڑی کسر اور چھوٹی سے چھوٹی کسر کی قیمتوں کے درمیان واقع ہوگی۔ [دیکھو دفعہ ۱۴]

دو بنا بریں ایک محدود مقدار کے مساوی ہوگی، فرض کرو کہ یہ محدود مقدار L ہے

$$L = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \dots + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^0} \quad (1)$$

ہذا اگر ایک سلسلہ کی قیمت محدود ہو تو دوسرے سلسلہ کی قیمت بھی محدود ہوگی، اور اگر ایک سلسلہ کی قیمت غیر محدود ہو تو دوسرے سلسلہ کی قیمت بھی غیر محدود ہوگی۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۲۸۱۔ مندرجہ بالا اصول نہایت مفید اور کارآمد ہے کیونکہ اسکی مدد سے ایک سلسلہ کا مقابلہ کسی اور ایسے سلسلہ سے کر سکتے ہیں جس کا مستحق یا متبع ہونا پہلے تحقیق ہو چکا ہے۔ دفعہ مابعد میں بس سلسلہ پر بحث کی گئی ہے اس کو بطور معاون سلسلہ کے لینا اکثر اوقات بہت مفید ثابت ہوتا ہے۔

۲۹۔ لامتناہی سلسلہ

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \dots$$

میشہ متبع ہوتا ہے سوائے اس صورت کے جبکہ ق مثبت ہو اور ایک سے بڑا ہو۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ $Q < 1$

پہلی رقم ۱ ہے، بعد کی دو رقمیں ملکر $\frac{1}{2^n}$ سے کم ہیں، ان کے بعد کی چار رقمیں ملکر $\frac{1}{2^{2n}}$ سے کم ہیں، ان کے بعد کی آٹھ رقمیں

ملکر $\frac{1}{2^{4n}}$ سے کم ہیں، علیٰ ہذا القیاس پس کل سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{4n}} + \dots \text{ کے حاصل جمع سے}$$

کم ہے، لیکن مؤخر الذکر سلسلہ ہندسی سلسلہ ہے جس میں مشترک نسبت $\frac{2}{3}$ ہے، ہر ایک سے کم ہے کیونکہ $Q < 1$ ، اس لئے یہ سلسلہ مستند ہے اور بنا بریں سلسلہ زیر بحث بھی مستند ہے۔

صورت دوم۔ فرض کرو کہ $Q = 1$

تب سلسلہ زیر بحث، $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ ہو جاتا ہے ظاہر ہے کہ تیسری اور چوتھی رقیں ملکر بڑی ہیں $\frac{2}{3}$ یعنی $\frac{1}{2}$ سے، بعد کی چار رقیں بڑی ہیں $\frac{2}{3}$ یعنی $\frac{1}{2}$ سے، ان کے بعد کی آٹھ رقیں بڑی ہیں $\frac{2}{3}$ یعنی $\frac{1}{2}$ سے اور علیٰ ہذا قیاس، پس سلسلہ زیر بحث بڑا ہے

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

سے اور اس لئے متع ہے۔ (دیکھو دفعہ ۲۸۶)

صورت سوم۔ فرض کرو کہ $Q > 1$ یا منفی ہے۔

اس صورت میں سلسلہ زیر بحث کی ہر ایک رقم صورت دوم کے سلسلہ کی متناظر رقم سے بڑی ہے، لہذا اس صورت میں سلسلہ متع ہے۔

پس سلسلہ زیر بحث ہمیشہ متع ہوتا ہے سوائے اُس صورت کے جبکہ Q مثبت ہو اور ایک سے زیادہ ہو۔

مثال۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{1+n}{n} + \dots$$

متع ہے۔
اس سلسلہ کا مقابلہ سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ کے

اگر سلسلہ زیر بحث اور معاون سلسلہ کی n ویں رقوم بالترتیب n اور

$$n$$
 ہوں تو $\frac{n}{n} = \frac{1+n}{n} \div \frac{1}{n} = \frac{n}{n}$

پس نہا $\frac{n}{n} = 1$ لہذا یہ سلسلے یا دونوں متسع ہیں یا دونوں

مستحق ہیں، لیکن چونکہ معاون سلسلہ متسع ہے اس لئے سلسلہ زیر تحقیق بھی متسع ہے۔

اس سے دفعہ ۲۸۷ کی مثال اکمال مکمل ہو جاتا ہے۔
۲۹۱۔ دفعہ ۲۸۸ کے قاعدہ سے استفادہ کرنے کے لئے ضروری ہے

کہ $\frac{n}{n}$ کی انتہا محدود ہو اور یہ انتہا محدود ہوگی اگر ہم معاون سلسلہ ذیل کے طریقہ سے معلوم کریں۔

دئے ہوئے سلسلہ کی n ویں رقوم n اور n کی صرف سب سے بڑی قوتوں کو باقی رکھو۔ جو رقوم اس طرح سے حاصل ہو اس کو n

سے تعبیر کرو، تب دفعہ ۲۷۰ کی رو سے $\frac{n}{n}$ کی انتہا محدود ہوگی، بعد ازاں n کو معاون سلسلہ کی n ویں رقوم کے طور پر لیا جاسکتا ہے

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ جس سلسلہ کی n ویں رقوم $\frac{1-2n^2}{5+n^2+3n^3}$ ہے

وہ متسع ہے۔

جوں جوں n بڑھتا جاتا ہے n کی قیمت

$$\frac{1}{n} \times \frac{2n^3}{3n^3} \text{ یا } \frac{2n^3}{3n^3}$$

کے قریب آتی جاتی ہے، پس اگر $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ تو نہا $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ جو ایک محدود مقدار ہے، ہم اس سلسلہ کو جس کی n دیں رقم $\frac{1}{n}$ ہے معاون سلسلہ کے طور پر لے سکتے ہیں، لیکن چونکہ یہ معاون سلسلہ دفعہ ۲۹۰ کی رو سے متع ہے اس لئے سلسلہ زیر بحث بھی متع ہے۔

مثال ۲۔ معلوم کرو کہ وہ سلسلہ جس میں $\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + 1 - n$ مستق ہے یا متع۔

یہاں $\frac{1}{n} = n \{ \frac{1}{n} + 1 - n \}$

$$n = (1 - \dots + \frac{1}{n^9} - \frac{1}{n^3} + 1)$$

$$= \dots + \frac{1}{n^9} - \frac{1}{n^3} =$$

اگر ہم $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ لیں تو

$$\dots + \frac{1}{n^9} - \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

لیکن معاون سلسلہ

$$\dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

مستدق ہے، اس لئے سلسلہ زیر بحث بھی مستدق ہے۔

۲۹۔ اگر (۱+۱) کو مسئلہ ثنائی سے پھیلایا جائے تو ثابت کرو کہ

پھیلاؤ مستدق ہوتا ہے جبکہ لا > ۱
فرض کرو کہ تفصیل کی ر ویں اور (۱+۱) دیں رقیں بالترتیب

ع^۱ اور ع^۲ ہیں، تب

$$\frac{ع^۱ + ۱}{ع^۲} = \frac{ع^۱ - ۱}{ع^۲}$$

ب (۱+۱) < ۱ تو یہ نسبت منفی ہوتی ہے، یعنی اگر لا مثبت
ہو تو اس مقام سے رقوم سلسلہ متبادل لا مثبت اور منفی ہوتی ہیں اور
لا منفی ہو تو اس مقام کے بعد سلسلہ کی سب رقوموں کی علامت
ہی رہتی ہے۔

ب اگر ر، لا متناہی ہو تو نہا $\frac{ع^۱ + ۱}{ع^۲} = لا$ (تعداداً) اس لئے

سب رقوم کی علامت وہی ہو تو سلسلہ مستدق ہوتا ہے جب
لا > ۱، اور بنا بریں دفعہ ۲۸۳ کی رو سے یہ اس صورت میں
ی مستدق ہوتا ہے جبکہ چند رقوم مثبت ہوں اور چند منفی۔

۲۹۱۔ ثابت کرو کہ صعودی قوتوں میں لا کی تفصیل لا کی سب
توں کے لئے مستدق ہوتی ہے۔

ہاں $\frac{ع^۱}{ع^۲} = لا$ لاکھروں، اس لئے نہا $\frac{ع^۱}{ع^۲} > ۱$

یہ لا کی قیمت کچھ ہی ہو۔ لہذا سلسلہ مستدق ہے۔
۲۹۱۔ ثابت کرو کہ لا کی صعودی قوتوں میں لوک (۱+۱) کی تفصیل
مستدق ہوتی ہے جبکہ لا تعداداً ایک سے کم ہو۔

ہاں $\frac{ع^۱}{ع^۲}$ کی عددی قیمت $\frac{ع^۱}{ع^۲} = لا$ لاکھوں اتنا لا ہے،

پس سلسلہ مستند ہوگا جب لا ایک سے کم ہو۔

اگر لا = ۱ تو سلسلہ $۱ - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ ہو جاتا ہے جو دفعہ ۲۸۴ کی رو سے مستند ہے۔

اگر لا = -۱ تو سلسلہ $۱ - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots$ ہو جاتا ہے جو دفعہ ۲۹۰ کی رو سے منسج ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ صفر کا لوکارتم لامتناہی اور منفی ہوتا ہے اور یہ امر مساوات $\infty = 0$ پر غور کرنے سے بھی ظاہر ہے۔

۲۹۵۔ ذیل کی دو مثالوں کے جواب نہایت ضروری ہیں، باب ہذا میں ان کی ضرورت پیش آئے گی۔

مثال ۱۔ $\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}}$ کی انتہا معلوم کرو جبکہ لا، لامتناہی ہو۔

لا = ۱ رکھو، تب

$$\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}} = ۱$$

$$= \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots}$$

نیز جب لا، لامتناہی ہو تو ما بھی لامتناہی ہوتا ہے اس لئے کسر بالا کی قیمت صفر ہے۔
مثال ۲۔ ثابت کرو کہ جب ن لامتناہی ہو تو ن لا کی انتہا صفر ہوتی ہے جبکہ لا > ۱

فرض کرو کہ لا = $\frac{۱}{۲}$ یعنی ما < ۱ نیز فرض کرو کہ ما = ۱

ن لوک ما = لوک ی، تب

$$\frac{ن}{لا} = \frac{ن}{ما} = \frac{لوک ی}{لوک ما} = \frac{۱}{لوک ما} \times \frac{لوک ی}{ی}$$

ب ظاہر ہے کہ جب ن لا متناہی ہو تو ی بھی لا متناہی ہوگا۔
لوک ی = ۰، نیز لوک ما محدود ہے اس لئے نہان لا = ۰۔

۲۹۔ بعض اوقات یہ معلوم کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے کہ
یا نے ضربی کی کسی لا متناہی تعداد کا حاصل ضرب محدود ہے یا
محدود۔

فرض کرو کہ حاصل ضرب ذیل کے ن اجزائے ضربی پر مشتمل ہے۔

.....ون

ن کے لا انتہا بڑھ جانے سے $\frac{ن}{لا} >$ ؛ تو حاصل ضرب صفر ہوگا
اگر $\frac{ن}{لا} <$ ؛ تو حاصل ضرب غیر محدود ہوگا، لہذا اگر حاصل ضرب
محدود رہے تو ضرور ہے کہ $\frac{ن}{لا}$ کی انتہا ایک ہو۔
 $\frac{ن}{لا}$ کی بجائے $۱ + \frac{ن}{لا}$ رکھنے سے مذکورہ بالا حاصل ضرب

$$(۱ + \frac{ن}{لا}) (۱ + \frac{ن}{لا}) (۱ + \frac{ن}{لا}) \dots (۱ + \frac{ن}{لا})$$

حاصل ضرب کو ض سے تعبیر کرو اور لوکا تم لو۔ تب

$$ل ض = لوک (۱ + \frac{ن}{لا}) + لوک (۱ + \frac{ن}{لا}) + \dots + لوک (۱ + \frac{ن}{لا})$$

(۱)

لر یہ حاصل ضرب محدود ہو تو ضرور ہے کہ یہ سلسلہ مستند ہو۔
ذیل کے سلسلہ کو معاون سلسلہ کے طور پر لو۔

$$\frac{ن}{لا} + \frac{ن}{لا} + \frac{ن}{لا} + \dots + \frac{ن}{لا} \dots (۲)$$

اب نہا $\text{لوک} (1 + \frac{1}{n}) = \text{نہا} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \dots) = 1$

کیونکہ جب $\frac{1}{n}$ کی انتہا ایک ہو تو $\frac{1}{n^2}$ کی انتہا صفر ہوتی ہے۔
پس اگر (۲) مستدق ہو تو (۱) بھی مستدق ہوگا اور حاصل ضرب محدود ہوگا۔

مثال - ثابت کرو کہ جب n لامتناہی ہو تو ذیل کے حاصل ضرب کی انتہا محدود ہوتی ہے

$$\frac{1+n^2}{n^2} \times \frac{(1-n^2)}{n^2} \times \dots \times \frac{4}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$$

یہ حاصل ضرب n^2 اجزائے ضربی پر مشتمل ہے، اگر دو دو رقوم کے مسلسل زوجوں کو $\frac{4}{4}$ ، $\frac{5}{4}$ ، $\frac{5}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ سے اور حاصل ضرب کو ضی سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{ضی} = \frac{4}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \dots$$

$$\text{جہاں } \frac{1}{n} = \frac{1+n^2}{n^2} \times \frac{1-n^2}{n^2} = \frac{1}{n^2} - 1$$

لیکن $\text{لوک ضی} = \text{لوک } \frac{4}{4} + \text{لوک } \frac{5}{4} + \text{لوک } \frac{5}{4} + \text{لوک } \frac{3}{4} + \text{لوک } \frac{3}{4} + \text{لوک } \frac{1}{2} + \dots$
اب ہمیں یہ دکھانا ہے کہ اس سلسلہ کی قیمت محدود ہے (۱)

$$\text{لوک } \frac{1}{n} = \text{لوک} (1 - \frac{1}{n^2}) = -\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^6} - \dots$$

لہذا دفعہ ۲۹۱ مثال ۲ کے موافق یہ سلسلہ مستدق ہے اور مذکورہ حاصل ضرب محدود ہے۔

۲۹۷ - علم ریاضی کے مسائل کی تحقیقات میں لامتناہی سلسلے بہت کثرت سے واقع ہوتے ہیں، ان کے متعلق ہر موقع پر یہ معلوم کر لینا نہایت ضروری ہے کہ یہ سلسلے مستدق ہیں یا نہیں، اگر ہم کسی

سلسلہ کو استعمال کرنے سے قبل اس کے استدقاق کے متعلق مناسب توثیق نہ کر لیں گے تو ممکن ہے کہ ہمارے محصلہ نتائج نہایت مہمل اور لغو ہوں۔ (دیکھو دفعہ ۱۸۳)

مثلاً اگر ہم (۱-۱) کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ بھیلائیں تو

$$(۱-۱) = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots$$

لیکن اگر ہم بائیں جانب کے سلسلہ کا حاصل جمع n رقموں تک دفعہ ۲ کے قاعدہ کے مطابق معلوم کریں تو

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}$$

اس سے $\frac{1}{(n-1)} = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots + n + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{(n-1)^2} + \dots$ کے قاعدہ کے مطابق معلوم کریں تو

$$\frac{1}{(n-1)} = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots + n + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{(n-1)^2} + \dots$$

صورت میں کہہ سکتے ہیں جبکہ $\frac{n}{n-1} + \frac{n}{(n-1)^2} + \dots$ معدوم ہو جائے

لیکن جب n انتہا بڑا ہو جائے تو یہ مقدار لا انتہا بڑی ہو جاتی ہے

اگر $n > ۱$ یا $n < ۱$ اور لا انتہا چھوٹی ہو جاتی ہے اگر $n > ۱$ (دیکھو دفعہ ۱۹۵)

پس ہم صرف اسی صورت میں یہ کہہ سکتے ہیں کہ

$$\frac{1}{(n-1)} = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots + n + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{(n-1)^2} + \dots$$

جبکہ $n > ۱$ اگر مسئلہ ثنائی کے مطابق $\frac{1}{(n-1)}$ کی مندرجہ بالا تفصیل کو لا کی

ہر قیمت کے لئے درست مانا جائے اور اسکی تفصیل کو $\frac{1}{(1-\lambda)}$ کے معادل کے طور پر استعمال کیا جائے تو لازماً ہمارے نتائج غلط اور مہمل ہوں گے۔

بالفاظ دیگر ہم اس لا متناہی سلسلہ $1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots$ کو غلطی کے احتمال کے بغیر اپنی سلک استدلال میں صرف اسی صورت صورت میں لا سکتے ہیں جبکہ یہ سلسلہ مستحق ہو ورنہ نہیں۔
 شمع سلاسل کی دقتوں کی وجہ سے ہمیں مجبوراً کسی سلسلہ اور اسکے جبریں معادل میں تیز کرنا پڑتا ہے، مثلاً لا کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو ہم ہمیشہ اکو $(1-\lambda)$ پر تقسیم کرنے سے سلسلہ

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots$$

کی جتنی قیمتیں چاہیں حاصل کر سکتے ہیں اور اس طرح سے ایک معنی

میں $\frac{1}{(1-\lambda)}$ کو سلسلہ بالا کا جبر یہ معادل کہا جا سکتا ہے، لیکن

ہم دیکھ چکے ہیں کہ فی الواقع یہ تعادل صرف اسی صورت میں درست ہوتا ہے جبکہ سلسلہ بالا مستحق ہو۔ اس نقطہ نظر کو ملحوظ رکھکر اگر ہم $\frac{1}{(1-\lambda)}$ کو سلسلہ بالا کا تفاعل تکوینی کہیں تو شاید زیادہ مناسب ہو گا کسی سلسلہ کے تفاعل تکوینی سے وہ تفاعل مراد ہے کہ اگر اس تفاعل کو جبر و متا کے معمولی قواعد کے مطابق پھیلا یا جائے تو سلسلہ مذکور حاصل ہو۔
 الفاظ ”تکوینی تفاعل“ کی تشریح مکمل طور پر متوالی سلسلوں کے ضمن میں کی جائے گی۔

امثلہ نمبری ۲۱ (۱)

علوم کر دو کہ ذیل کے سلسلے مستحق ہیں یا تبع

$$(1) \quad \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{1+\lambda} + \frac{1}{1+\lambda^2} - \frac{1}{1+\lambda^3} + \dots$$

جہاں لا اور لا دونوں مثبت مقداریں ہیں۔

$$(۲) \quad \dots + \frac{1}{۵ \times ۴} + \frac{1}{۴ \times ۳} + \frac{1}{۳ \times ۲} + \frac{1}{۲ \times ۱}$$

$$(۳) \quad \dots + \frac{1}{(۳+۶)(۳+۵)} + \frac{1}{(۲+۶)(۲+۴)} + \frac{1}{(۱+۶)(۱+۳)}$$

جہاں لا اور لا دونوں مثبت مقداریں ہیں۔

$$(۴) \quad \dots + \frac{۲}{۵ \times ۴} + \frac{۳}{۴ \times ۳} + \frac{۴}{۳ \times ۲} + \frac{۵}{۲ \times ۱}$$

$$(۵) \quad \dots + \frac{۲}{۸ \times ۷} + \frac{۳}{۷ \times ۶} + \frac{۴}{۶ \times ۵} + \frac{۵}{۵ \times ۴}$$

$$(۶) \quad \dots + \frac{۲}{۱۲} + \frac{۳}{۱۱} + \frac{۴}{۱۰} + ۱$$

$$(۷) \quad \dots + \frac{۳}{۵} + \frac{۴}{۴} + \frac{۵}{۳} + \frac{۶}{۲}$$

$$(۸) \quad \dots + ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱$$

$$(۹) \quad \dots + \frac{۵}{۵} + \frac{۴}{۴} + \frac{۳}{۳} + \frac{۲}{۲}$$

$$(۱۰) \quad \dots + \frac{۱}{۱+۵} + \dots + \frac{۲}{۱۰} + \frac{۳}{۵} + \frac{۴}{۲} + ۱$$

$$(۱۱) \quad \dots + \frac{۱-۵}{۱+۵} + \dots + \frac{۱۵}{۱۲} + \frac{۸}{۵} + \frac{۳}{۲} + ۱$$

$$(۱۲) \quad \dots + \frac{۲-۵}{۱+۲} + \dots + \frac{۱۳}{۱۲} + \frac{۶}{۵} + \frac{۲}{۲} + ۱$$

$$(۱۳) \quad \dots + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۱}$$

$$(۱۳) \dots + \frac{۱}{۱+۱} + \dots + \frac{۱}{۲۶} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۲۶} + \dots + \frac{۱}{۱+۱}$$

$$(۱۵) \dots + \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} \right) + \left(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵} \right) + \left(\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} \right) + \dots$$

$$(۱۶) \dots + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} + ۱$$

(۱۶) جن سلسلوں کی ن دیں رقوم حسب ذیل میں ان کی جانچ کرو

$$(۱) \sqrt{۱+۱} - ۱ \quad (۲) \sqrt{۱+۱} - ۱$$

(۱۸) ذیل کے سلاسل کی جانچ کرو۔

$$(۱) \dots + \frac{۱}{۳+۱} + \frac{۱}{۲+۱} + \frac{۱}{۱+۱} + \frac{۱}{۱}$$

$$(۲) \dots + \frac{۱}{۲+۱} + \frac{۱}{۲-۱} + \frac{۱}{۱+۱} + \frac{۱}{۱-۱} + \frac{۱}{۱}$$

جہاں لاکوئی مثبت کسر ہے۔

(۱۹) ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\dots + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + ۱$$

ق کی تمام قیمتوں کے لئے مستحق ہے۔

(۲۰) ثابت کرو کہ لا متناہی سلسلہ

$$\dots + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + ۱$$

مستحق ہوگا اگر نہسا $\frac{۱}{۲}$ کم ہو ایک سے اور قمع ہوگا اگر یہ بڑا

ہو ایک سے۔

(۲۱) ثابت کرو کہ حاصل ضرب

$$\frac{۱}{۱-۱۲} \times \frac{۲-۱۲}{۱-۱۲} \times \frac{۳-۱۲}{۳-۱۲} \dots \times \frac{۶}{۵} \times \frac{۷}{۵} \times \frac{۸}{۳} \times \frac{۹}{۳} \times \frac{۱۰}{۳}$$

محدود ہوگا جب n غیر محدود ہو۔

(۲۲) ثابت کرو کہ اگر $la = 1$ تو $(1 + la)^n$ کی تفصیل میں کوئی رقم لامتناہی نہیں ہوگی سوائے اس صورت کے جبکہ n منفی ہو اور تعداد a ایک سے بڑا ہو۔

۲۹۸۔ کسی سلسلہ کے استمداق یا اتساع کی جانچ کرنے کے لئے جو قواعد دفعات ۲۹۷، ۲۹۸ میں قبل از این مذکور ہو چکے ہیں وہ بالعموم کافی ثابت ہوتے ہیں، تاہم دفعہ مابعد میں ہم ایک اور سلسلہ ثابت کریں گے جس کی مدد سے ہم معاون سلسلہ

$$\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots$$

کے ذریعہ کسی سلسلہ کو جانچنے کے چند اور قواعد مستفیض ہو سکیں گے جو اکثر اوقات مفید اور کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

۲۹۹۔ دو لامتناہی سلسلوں کی n ویں نہیں بالترتیب e اور f ہیں اور ان سلسلوں کی سب برقیں مثبت ہیں، تب اگر سلسلہ مستحق

ہو تو e سلسلہ بھی مستحق ہوگا جب کسی مقررہ رقم کے بعد $\frac{e_n}{e_{n-1}}$

اور اگر سلسلہ متع ہو تو e سلسلہ بھی متع ہوگا جب کسی مقررہ رقم کے بعد

$$\frac{e_n}{e_{n-1}} < \frac{f_n}{f_{n-1}}$$

فرض کرو کہ مقررہ رقوم بالترتیب e اور f ہیں۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ $\frac{e_n}{e_{n-1}} > \frac{f_n}{f_{n-1}}$ ، $\frac{e_n}{e_{n-1}} > \frac{f_n}{f_{n-1}}$

تب $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$$= \frac{1}{1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$$

$$> \frac{1}{1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$$

یعنی $\frac{1}{1} > \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$ اس لئے اگر سلسلہ مستحق ہو تو $\frac{1}{1}$ سلسلہ بھی مستحق ہوگا۔صورت دوم۔ فرض کرو کہ $\frac{1}{1} < \frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{3} < \frac{1}{4}$ تب $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$$= \frac{1}{1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$$

$$< \frac{1}{1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$$

یعنی $\frac{1}{1} < \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$ پس اگر سلسلہ مستحق ہو تو $\frac{1}{1}$ سلسلہ بھی مستحق ہوگا۔

۳۰۰۔ دفعہ ۲۸۷ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر

سلسلہ کی ن دیں رقم اس کی رقم اقبل کے ساتھ

ہو تو سلسلہ مستحق ہوتا ہے اور اگر یہ نسبت ایک

سلسلہ مستحق ہوتا ہے۔

اس باب کے باقی حصہ میں ہم دیکھنے کے لئے اس باب

ذیل کو استعمال کرنا زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے

اگر کسی سلسلہ کی n دین رقم کی جو نسبت رقم مالعل کے ساتھ ہے اسکی
انتہائی قیمت ایک سے بڑی ہو تو سلسلہ مستحق ہوگا اور اگر یہ نسبت ایک سے کم ہو تو
سلسلہ شمع ہوگا۔

نی مستحق ہوگا اگر نہا $\frac{ع}{ع+۱} < ۱$ اور شمع ہوگا اگر نہا $\frac{ع}{ع+۱} > ۱$

اس طرح کے دفعہ ماقبل کا مسئلہ بیان کیا جاسکتا ہے۔
سلسلہ مستحق ہوگا اگر سلسلہ مستحق ہو بشرطیکہ

$\frac{ع}{ع+۱} < \frac{ن}{ن+۱}$ نہا اور ع سلسلہ شمع ہوگا اگر سلسلہ

طیکہ نہا $\frac{ع}{ع+۱} > \frac{ن}{ن+۱}$ نہا

وہ سلسلہ جس کی n دین رقم $ع$ ہے مستحق ہوگا اگر

$\frac{ع}{ع+۱} < \frac{ن}{ن+۱}$ اور شمع کا اگر نہا $\frac{ع}{ع+۱} > \frac{ن}{ن+۱}$

مادون سلسلہ۔ اردو کی عام رقم $ن$ ہے

سلسلہ مستحق کا اس صورت میں دیا ہوا

$$\frac{ع}{ع+۱} < \frac{ن}{ن+۱}$$

$$\frac{ع}{ع+۱} < \frac{ن}{ن+۱} + \frac{ق}{ن} + \frac{ق(۱-ن)}{ن^۲} + \dots$$

$$\frac{ع}{ع+۱} < \frac{ن}{ن+۱} + \frac{ق(۱-ن)}{ن^۲} + \dots$$

یعنی اگر نہا $\{n\} \left(1 - \frac{e_n}{1+e_n}\right) < q$

تو اس معادوں سلسلہ مستحق ہوتا ہے اگر قی ایک سے بقدر ایک محدود مقدار کے جو خواہ کتنی ہی چھوٹی ہو بڑا ہو، پس مسئلہ ہذا کا پہلا حصہ ثابت ہوا اگر قی > 1 تو معادوں سلسلہ متنع ہوتا ہے اور حسب سابق ہم مسئلہ کا دوا حصہ بھی ثابت کر سکتے ہیں۔
مثلاً:۔ سفوم کرو کہ سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{10} + \dots$$

مستحق ہے یا متنع۔

یہاں نہا $\frac{e_n}{1+e_n} = \frac{1}{n}$ ، اس لئے اگر لا > 1 تو سلسلہ مستحق ہوگا اور اگر لا < 1 تو سلسلہ متنع ہوگا۔

اگر لا $= 1$ تو نہا $\frac{e_n}{1+e_n} = 1$ ، اس صورت میں

$$\frac{1}{(1-e_n)} \times \frac{(3-e_n) \dots \dots \times 5 \times 3 \times 1}{(2-e_n) \dots \dots \times 4 \times 2 \times 1} = \frac{e_n}{1+e_n}$$

$$\frac{(1+e_n) \times 2}{(1-e_n)(1+e_n)} = \frac{e_n}{1+e_n} \text{ اور}$$

$$\frac{(1-e_n) \times n}{2(1-e_n)} = \left(1 - \frac{e_n}{1+e_n}\right) \times n$$

$$\frac{3}{2} = \left\{ \left(1 - \frac{e_n}{1+e_n}\right) \times n \right\}$$

پس اگر لا $= 1$ تو بھی سلسلہ بالاستحق ہوگا۔

۳۰۲۔ ثابت کرو کہ وہ سلسلہ جس کی عام رقم e_n ہے مستحق یا متنع ہے

$$: \text{نہا} \frac{ع}{1+ع} = \frac{1}{قولا} \dots\dots\dots [دفعہ ۲۲۰ نتیجہ صریح]$$

پس اگر لا $\frac{1}{ق}$ تو سلسلہ مستحق ہے اور اگر لا $\frac{1}{ق}$ تو سلسلہ متبع ہے۔

$$: لا = \frac{1}{ق} \text{ تو } \frac{ع}{1+ع} = \frac{ق}{ق(1+ع)}$$

$$: \text{لوک} \frac{ع}{1+ع} = \text{لوک} ق - \text{لوک} (1 + \frac{1}{ق})$$

$$= 1 - ق (\frac{1}{ق} - \frac{1}{ق2} + \frac{1}{ق3} - \dots\dots\dots)$$

$$= \dots\dots\dots + \frac{1}{ق3} - \frac{1}{ق2}$$

$$: \text{ن لوک} \frac{ع}{1+ع} = \frac{1}{ق} - \frac{1}{ق2} + \frac{1}{ق3} - \dots\dots\dots$$

$$: \text{نہا} (ن \text{ لوک} \frac{ع}{1+ع}) = \frac{1}{ق}$$

پس اگر لا $\frac{1}{ق}$ تو سلسلہ متبع ہوگا۔

$$۳۰۳۔ \text{اگر نہا} \frac{ع}{1+ع} = ۱ \text{ اور نیز نہا} \{ (1 - \frac{ع}{1+ع}) \} = ۱ \text{ تو}$$

آزمائش کے طریقے مندرجہ صفحات ۳۰۳ اور ۳۰۴ کا رآمد نہیں ہوتے، یہ کوئی نیا طریقہ دریافت کرنے کے لئے ہم اس معاون سلسلہ کا استعمال کرتے ہیں جس کی عام رقم $ن (لوک ق)$ ہے، اس سلسلہ کا استدقاق یا

معلوم کرنے کے لئے ہمیں دفعہ ذیل کے مسئلہ کی ضرورت ہوگی۔
 ۳. ۳۔ اگر n کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے $f(n)$ مثبت رہے
 اور جو n بڑھتا جائے اس کی قیمت مسلسل کم ہوتی جائے، نیز اگر
 کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو ذیل کے دو استنتاجی سلسلے

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots$$

$$\text{اور } f(n) + f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(1) + \dots$$

یادہ نوں مستحق ہوں گے یا دونوں متبع -

پہلے سلسلہ میں رقوم

$$f(1+k), f(2+k), f(3+k), \dots, f(1+k)$$

پر غور کرو جو رقم $f(1+k)$ کے بعد واقع ہوتی ہیں -

ان رقوم کی تعداد $1+k$ - یعنی $\{1, 2, \dots, 1+k\}$ ہے اور ان میں سے ہر ایک

رقم $f(1+k)$ سے بڑی ہے، پس ان رقوم کا ماحل جمع $f(1+k) \times (1+k)$

سے بڑا ہے یعنی $\frac{1}{1+k} \times f(1+k)$ سے بڑا ہے -

ک کو بالترتیب قیمتیں $1, 2, 3, \dots$ دینے سے

$$f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(n) < \frac{1}{2} \times f(2)$$

$$f(1+1) + f(2+1) + f(3+1) + \dots + f(n+1) < \frac{1}{3} \times f(1+1)$$

.....

$$\text{جمع کرنے سے ج. - } f(1) < \frac{1}{1} \text{ ج}$$

جہاں ج اور ج بالترتیب پہلے اور دوسرے سلسلہ کے حامل جمع کو تعبیر کرتے ہیں پس اگر دوسرا سلسلہ متبع ہو تو پہلا بھی متبع ہوگا۔
 نیز سلسلہ (۱) کی ہر ایک رقم فہ (۱) سے کم ہے اور اس لئے اس سلسلہ کا حامل جمع (۱-۱) (۱) فہ (۱) سے کم ہے۔

ک کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، ... قیمتیں دینے سے

$$\text{فہ (۲) + فہ (۳) + فہ (۴) + + فہ (۱) > (۱-۱) \times \text{فہ (۱)}$$

$$\text{فہ (۱+۱) + فہ (۲+۱) + فہ (۳+۱) + + فہ (۱+۱) > (۱-۱) \times \text{فہ (۱)}$$

.....

اس لئے جمع کرنے سے

$$\{ \text{ج} - \text{فہ (۱)} \} > (۱-۱) \times \{ \text{ج} + \text{فہ (۱)} \}$$

پس اگر دوسرا سلسلہ مستدق ہو تو پہلا بھی مستدق ہوگا۔

نوٹ۔ دوسرے سلسلہ کی عام رقم یعنی ن دیں رقم معلوم کرنے کے لئے ہم سلسلہ کی عام رقم یعنی فہ (ن) لیتے ہیں پھر ن کی بجائے ۱ لکھ کر ۱ سے ضرب دے دیتے ہیں۔

$$۳.۵ - \text{سلسلہ ۱} + \frac{۱}{۲ \text{ (لوک ۲) } q} + \frac{۱}{۳ \text{ (لوک ۳) } q} + + \frac{۱}{n \text{ (لوک } n) q}$$

مستدق ہوتا ہے اگر ق < ۱ اور متبع ہوتا ہے اگر ق = ۱ یا > ۱
 دفعہ ماقبل کی رو سے سلسلہ بالا مستدق ہوگا یا متبع اگر وہ سلسلہ جس کی ن ویر

$$\frac{۱}{n \text{ (لوک } n) q} \times \frac{۱}{n \text{ (لوک } n) q} \text{ یعنی } \frac{۱}{n \text{ (لوک } n) q} \times \frac{۱}{n \text{ (لوک } n) q}$$

ہے ق کی اسی قیمت سے لئے بالترتیب مستدق یا متبع ہو۔

مستقل جزو ضربی $\frac{۱}{n \text{ (لوک } n) q}$ سب رقموں میں مشترک ہے پس سلسلہ برابر

اور وہ سلسلہ جسکی عام رقم $\frac{1}{n}$ ہے ق کی ایک ہی قیمت کے لئے دو ق
مستحق ہوں گے یا دونوں مشع، پس مطلوبہ نتیجہ دفعہ ۲۹۰ کی رو سے
بآسانی حاصل ہو جاتا ہے۔

۳۰۶۔ وہ سلسلہ جسکی عام رقم $\frac{1}{n}$ ہے مستحق ہوگا یا مشع اگر بالترتیب

$$نہا \left[\left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right] \{ \text{لوک } n \} < 1$$

سلسلہ زیر بحث کا مقابلہ سلسلہ

$$1 + \frac{1}{(1 \text{ لوک } 1)} + \frac{1}{(2 \text{ لوک } 2)} + \dots + \frac{1}{(n \text{ لوک } n)} + \dots$$

سے کرو۔

جب ق < ۱ تو معاون سلسلہ مستحق ہوتا ہے اور اس صورت میں
زیر بحث دفعہ ۲۹۹ کی رو سے مستحق ہوگا اگر

$$\frac{1}{n} < \frac{(1+n) \{ \text{لوک } (1+n) \}}{(n \text{ لوک } n)} \quad (1)$$

اب اگر ن بہت بڑا ہو تو

$$\text{لوک } (1+n) = \text{لوک } n + \text{لوک } (1 + \frac{1}{n}) \approx \text{لوک } n + \frac{1}{n} \text{ تقریباً}$$

پس شرط (۱) ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{n} < \frac{(1 + \frac{1}{n}) (1 + \frac{1}{n \text{ لوک } n})}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{n} < (1 + \frac{1}{n}) (1 + \frac{1}{n \text{ لوک } n})$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{n} + \frac{1}{n \text{ لوک } n} < 1 + \frac{1}{n}$$

$$\text{یعنی } n \left(1 - \frac{ع_1}{1+ع_1} \right) < 1 + \frac{ق}{لوکن}$$

$$\text{یعنی } \{ n \left(1 - \frac{ع_1}{1+ع_1} \right) - 1 \} \text{ لوکن } < ق$$

بند مسئلہ ہذا کا ملاحظہ ثابت ہوا، دوسرا حصہ بھی بموجب قاعدہ دفعہ ۳۰۱
بآسانی ثابت ہو سکتا ہے۔

$$\text{مثال - معلوم کرو کہ سلسلہ } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \dots$$

ستدق ہے یا متع

$$\text{یہاں } \frac{ع_1}{1+ع_1} = \frac{(1+n)}{(1+n)} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots (1)$$

ۛ نہا $1 = \frac{ع_1}{1+ع_1}$ ، اس لئے ہم فرید جانچ کرتے ہیں

$$(1) \text{ سے } n \left(1 - \frac{ع_1}{1+ع_1} \right) + 1 = \frac{1}{n^2} + \dots (2)$$

ۛ نہا $\{ n \left(1 - \frac{ع_1}{1+ع_1} \right) - 1 \}$ ، اس لئے ہم پھر فرید جانچ کی طرہ
ربوع کرتے ہیں۔

$$(2) \text{ سے } \{ n \left(1 - \frac{ع_1}{1+ع_1} \right) - 1 \} \text{ لوکن } = \frac{ق}{لوکن}$$

$$ۛ نہا [\{ n \left(1 - \frac{ع_1}{1+ع_1} \right) - 1 \} \text{ لوکن }] = 0$$

چونکہ دفعہ ۲۹۵ کی رو سے نہا $\frac{ق}{لوکن} = 0$ ، اس لئے ثابت ہوا کہ

زیر بحث متع ہے۔

ہوگی لیکن ج میں وہ سب رقوم شامل ہیں جو اس حاصل ضرب میں
موجود ہیں اور اس کے علاوہ کچھ اور۔ رقیبیں بھی ہیں، اس لئے

جہاں < ا ب

پس ن کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو جہاں کی قیمت ہمیشہ ا ب ہے اور
ا ب جہاں کی قیمتوں کے درمیان ہوگی۔
فرض کرو کہ ا اور ب مستحق سلسلے ہیں،

ا = ا - لا اور ب = ب - ما

کے مادی رکھو جہاں لا اور ما بالترتیب ان سلسلوں کے ان حصوں
کو تعبیر کرتے ہیں جو (ن + ا) رقیب کے لینے کے بعد بچ رہتے ہیں
تب اگر ن لامتناہی ہو گا تو لا اور ما دونوں لامتناہی چھوٹے
ہوں گے۔

ن ا ب = (ا - لا) (ب - ما) = ا ب - ب لا - لا ما + لا ما

اس لئے ا ب کی انتہا ا ب ہے کیونکہ ا اور ب دونوں محدود
ہیں اسی طرح ا ب کی انتہا ا ب ہے۔

اس لئے ج جہاں کی انتہا ہے لارما ا ب کے برابر ہوگا

کیونکہ یہ ا ب اور ا ب جہاں کی انتہاؤں کے درمیان واقع ہے۔
اب فرض کرو کہ ا اور ب کی سب رقوم کی علامتیں یکساں ہیں

اس صورت میں ضروری نہیں کہ لاتساویات ا ب جہاں کے جہاں کے ا ب

درست ہوں اور ہم حسب سابق استدلال نہیں کر سکتے۔
دونوں سلسلوں کی مثبت رقوم کے مجموعہ کو بالترتیب ا ب سے او

$$\dots + \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{4} + \frac{4^2}{5} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{1} + \frac{(1-1)(1-2)(1-3)(1-4)}{2 \times 3 \times 4} + \dots$$

$$\dots + \frac{(1-3)(1-2)(1-1)(1+1)(1+2)}{2 \times 3 \times 4} + \dots$$

جہاں کوئی کسر واجب ہے۔

$$\dots + \frac{(1+1)}{1} + \frac{(1+2)}{2} + \frac{(1+3)}{3} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$\dots + \frac{(1+1)(1+2)(1+3)(1+4)}{2 \times 3 \times 4 \times 5} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

$$\dots + \frac{(1+1)(1+2)(1+3)(1+4)(1+5)}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

ک کوئی مثبت صحیح عدد ہے، تو ثابت کرو کہ سلسلہ $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \dots$
 مستحق ہو گا اگر $\frac{1}{6}$ ۔ مثبت ہو اور متع ہو گا اگر $\frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \dots$
 منفی ہو یا صفر کے مساوی ہو۔



بائسواں باب

ما معلوم سر

اپنی منطقی ابجرا کی دفعہ ۲۳۰ میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ اگر لا کے
 کسی منطق صحیح تفاعل میں لا = . رکھنے سے تفاعل مذکور نصف ہو جائے
 تو یہ تفاعل ۹ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔ [علاوہ ازیں دیکھو دفعہ ۵۱۴ تحتہ صیح]
 فرض کرو کہ

$$ق لا^۱ + ق لا^۲ + ق لا^۳ + + ق لا^۴ + ق$$

لا میں ن ابعاد کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے جو معدوم ہو جاتا ہے
 جبکہ لا ذیل کی غیر مساوی مقادیر میں سے کسی ایک کے مساوی ہو
 مذکورہ بالا تفاعل کو ف (لا) سے تغیر کروں گے چونکہ ف (لا) لا
 پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے اس لئے

$$ف (لا) = (لا - ل) \{ ق لا^۱ + + ق لا^۴ + ق \}$$

یہاں خارج قسمت ' (ن - ۱) ابعاد کا ایک جملہ ہے۔
 اسی طرح سے چونکہ ف (لا) لا - ل پر بھی پورا تقسیم ہو جاتا ہے
 اس لئے

$$ق لا^۱ + + ق لا^۴ + ق (لا - ل) (ق لا^۱ + + ق لا^۴ + ق)$$

جہاں فاج قیمت (ن - ۲) ابعاد کا ایک جملہ ہے، اور

$$ق^۱-۱ + = (لا - ل) (ق^۱-۱ لا^۱-۱ +)$$

.....

اسی طرح ن بار تقسیم کا عمل کرنے سے بالآخر حاصل ہوتا ہے۔

ف (لا) = ق (لا - ل) (لا - ل) (لا - ل) (لا - ل) (ل)

۳۱۰ - اگر ن ابعاد کا ایک منطق صحیح تفاعل متغیر کی ن سے زیادہ قیمتوں کے لئے معدوم ہو جائے، تو متغیر کی ہر قوت کا سر لازماً صفر ہوگا۔ تفاعل کو ف (لا) سے تعبیر کرو، جہاں

ف (لا) = ق لا^۱-۱ + ق لا^۲-۲ + + ق

نیز فرض کرو کہ ف (لا) صفر ہو جاتا ہے جب لا ذیل کی غیر مساوی قیمتوں ل، ل، ل، ل میں سے کوئی قیمت اختیار کرے۔ تب

ف (لا) = ق (لا - ل) (لا - ل) (لا - ل) (لا - ل) (ل)

نیز فرض کرو کہ لا کی ایک اور قیمت جس سے ف (لا) معدوم ہو جاتا ہے وہ ہے، تب چونکہ ف (ل) =

اس لئے ق (ل - ل) (ل - ل) (ل - ل) (ل - ل) (ل) =

اس لئے ق =۔ کیونکہ حسب مفروض باقی اجزائے ضربی میں سے کوئی جنو ضربی صفر نہیں ہے، پس ف (لا) ہو جاتا ہے

ق لا^۱-۱ + ق لا^۲-۲ + + ق

منفرد ہیں،

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ق = ق، ق = ق، ق = ق، ق = ق، ق = ق، ق = ق، ق = ق$$

۳۱۲۔ وقت ماقبل کے نظریہ کو بالعموم ”نامعلوم سروں کے اصول“ سے موسوم کرتے ہیں۔ اس اصول کا استعمال ذیل کی مثالوں سے واضح ہو جائیگا۔

مثال ۱۔ سلسلہ $۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + \dots + (ن-۱) \times ن + (ن) \times (ن+۱)$ کا حاصل جمع معلوم کرو۔
فرض کرو کہ

$$۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + \dots + (ن-۱) \times ن + (ن) \times (ن+۱)$$

$$= ۱ + ب + ج + د + ع + \dots + ن$$

جہاں ۱، ب، ج، د، ع، ... ایسی مقادیر ہیں جو ن کے نام نہیں اور ان کی قیمتیں معلوم کرنا مقصود ہے۔

ن کو ن + ۱ میں بدل دو تب

$$۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + \dots + (ن-۱) \times ن + (ن) \times (ن+۱) + (ن+۱) \times (ن+۲)$$

$$= ۱ + ب + ج + د + ع + (ن+۱) + (ن+۲) + \dots + (ن+۱) + (ن+۲) + \dots$$

تفریق کرنے سے

$$(ن+۱) \times (ن+۲) = ۱ + ب + ج + د + (ن+۱) + (ن+۲) + \dots + (ن+۱) + (ن+۲) + \dots$$

$$+ (ن+۱) + (ن+۲) + \dots + (ن+۱) + (ن+۲) + \dots$$

چونکہ یہ مساوات ن کی سب صحیح قیمتوں کے لئے درست ہے، اسلئے طرفین مساوات میں ن کی یکساں قوتوں کے سربراہم مساوی ہونا

پس ع اور ع کے بعد کے تمام سر صفر ہیں، نیز
 $۵۳ = ۱'۵۳ + ۲'ج = ۳'۵ + ۵'ج + ۵'ب = ۲$

$$\text{جن سے } ۵ = ۱'۵۳ = ۲'ج = ۱'ب = ۲'۵$$

پس حاصل جمع مطلوبہ $= ۱ + \frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳} = ۲$

و کی قیمت معلوم کرنے کے لئے $۱ = ۲$ رکھو
 تب سلسلہ میں صرف ایک ہی سینے پہلی رقم رہ جاتی ہے، اس طرح
 $۲ = ۱ + ۲$ یعنی $۱ = ۰$

$$\text{لہذا } ۱ \times ۱ + ۲ \times ۲ + ۳ \times ۳ + \dots + ۲ \times ۲ + ۱ \times ۱ = (۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۲ + ۱)$$

$$= \frac{۱}{۳} (۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۲ + ۱)$$

نوٹ۔ اس جواب کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ اگر کسی سلسلہ میں
 ن دیں رقم ن کا کوئی منطق صحیح تعامل ہو تو ہم سلسلہ مذکور کے
 حاصل جمع کو ن کے ایک۔ ایسے تعامل کے مساوی فرض کر سکتے ہیں
 جسکا بق۔ سلسلہ کی ن وین رقم کے بعد سے بقدر ایک کے زیادہ ہو
 مثال ۲۔ معلوم کرو کہ کیا شرائط پوری ہونی چاہئیں کہ

$$لا + ق لا + ل لا + ر لا + ب پر پورا تقسیم ہو جائے۔$$

فرض کرو کہ لا + ق لا + ل لا + ر = (لا + ک) (لا + ب)
 لا کی یکساں قوتوں کے سروں کو باہم مساوی رکھنے سے ہم دیکھتے
 ہیں کہ

$$ک + ۱ = ق، ل + ۱ = ب، ل + ۱ = ک، ب = ر$$

آخری مساوات سے $ک = \frac{۱}{۲}$ ، اس قیمت کو درج کرنے سے

۱۲۔ ثابت کرو کہ ذیل کی مساواتیں متماثل ہیں

$$\frac{ا(ا-ب)(ا-ج)}{(ا-ب)(ا-ج)} + \frac{ب(ا-ج)(ا-د)}{(ا-ج)(ا-د)} + \frac{ج(ا-د)(ا-ب)}{(ا-د)(ا-ب)} = ۱$$

$$\frac{ا(ا-ب)(ا-ج)}{(ا-ب)(ا-ج)} + \frac{ب(ا-ج)(ا-د)}{(ا-ج)(ا-د)} + \frac{ج(ا-د)(ا-ب)}{(ا-د)(ا-ب)} = ۱$$

$$۱ = \frac{(ا-ب)(ا-ج)}{(ا-ب)(ا-ج)} + \frac{(ا-د)(ا-ب)}{(ا-د)(ا-ب)}$$

۱۳۔ وہ شرط معلوم کرو کہ جملہ

جملات ق لا + ل ما + ر اور ق لا + ل ما + ر کی شکل کے دو اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہو۔

۱۴۔ اگر کا = ل لا + م ما + ن ن = صا = ن لا + ل ما + م می

سے = م لا + ن ما + ل لی اور نیز اگر لا، ما، می کی سب قیمتوں کے لئے یہ مساواتیں درست ہوں جبکہ لا، ما، می سے اور لا، ما، می کا بالترتیب باہم تبادلاً کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$ل + م + ن = ا + م + ن = ل + ن = ن + ل + م =$$

۱۵۔ اگر ن مقادیر لا، ل، و، و میں سے ن۔ ر مقادیر لینے سے مختلف اجتماع بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ جن اجتماعوں پر

یہ حاصل ضرب مشتمل ہیں ان کا مجموعہ

$$\frac{\frac{1}{n} (n-1) (n-2) \dots (1)}{(1-1) (1-1) \dots (1-1)} = \frac{(1-1) (1-1) \dots (1-1)}{(1-1) (1-1) \dots (1-1)}$$

۳۔ اگر لامتناہی سلسلہ $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ لاکھ کی
ایسی محدود قیمت کے لئے جس سے کہ سلسلہ بالامستحق رہے
رہے، تو اس کا ہر ایک سر متماثل طور پر منفی ہوگا۔

سلسلہ بالاکوج سے اور سلسلہ $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ کوج سے
بگرو، تب $J = 1 + J$ ، اب حسب مفروض لاکھ کی تمام
دو قیمتوں کے لئے $1 + J = 1 + J$ ۔ لیکن چونکہ J مستحق ہے
لئے J کسی محدود انتہا سے تجاوز نہیں کر سکتا اس لئے لاکھ کو
چھوٹا لینے سے ہم J کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا کہ چاہیں۔
بے بصورت موجودہ J کی انتہا 1 ہو جاتی ہے۔
لیکن J ہمیشہ صفر رہتا ہے اس لئے 1 متماثل طور پر صفر کے
ادبی ہے۔

۴۔ رقم 1 کو نکال دینے سے لاکھ کی تمام محدود قیمتوں کے لئے $J = 1$ ۔
لاکھ کی تمام محدود قیمتوں کے لئے $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$
رہے جاتا ہے۔

اسی طرح سے سلسلہ وار ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ سر $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$
سب متماثل طور پر صفر کے مساوی ہیں۔

۵۔ اگر دو لامتناہی سلسلے متغیر کی ہر ایسی محدود قیمت کیلئے
بے یہ سلسلے مستحق رہیں ایک دوسرے کے مساوی ہوں
ن سلسلوں میں متغیر کی یکساں قوتوں کے سر باہم مساوی ہوں گے۔

اس نے ن کی ان تمام قوتوں کے لئے جو دو سے بڑی ہیں

$$1 + 1 - 1 = 1$$

اے پہلے تین سر معلوم ہو جائیں تو اس کے بعد مساوات بالا کی مدد سے ہم متواتر سروں کی قیمتیں نکال سکتے ہیں، ن تین سروں کو دریافت کرانے کے لئے ذیل کی مساواتیں بنتی ہیں

$$1 = 1 + 1 - 1 = 1, 2 = 1 + 1 - 1 = 1, 3 = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$\text{جن سے } 1 = 1, 2 = 1 - 1 = 0, 3 = 1 - 1 = 0$$

$$\text{نیز } 1 + 1 - 1 = 1, 2 + 1 - 1 = 1, 3 + 1 - 1 = 1$$

$$1 + 1 - 1 = 1, 2 + 1 - 1 = 1, 3 + 1 - 1 = 1$$

$$1 + 1 - 1 = 1, 2 + 1 - 1 = 1, 3 + 1 - 1 = 1$$

پس $\frac{1+2}{1+1-1} = 2 - 2 + 2 + 5 - 1 + 12 - 19 + \dots$
مثال ۲- ثابت کرو کہ اگر ن اور ر مثبت صحیح اعداد ہوں تو

$$N - N(1-N) + \frac{N(1-N)(2-N)}{2} - \frac{N(1-N)(2-N)(3-N)}{6} + \dots$$

صفر کے مساوی ہوگا اگر ر چھوٹا ہوں سے اور ن کے مساوی ہوگا اگر ر = ن

$$\text{ظاہر ہے کہ } (1 - N) = (1 - N) + \frac{N}{2} + \frac{N^2}{2} + \frac{N^3}{2} + \dots$$

$$۱ل + ب ق =۔ جس سے ل =۔ \frac{ب}{ق}$$

$$۲ل + ب ق ل + ج ق =۔ جس سے ر =۔ \frac{۲ب}{ق} - \frac{ج}{ق}$$

$$ن لا = \frac{ما}{ق} - \frac{ب ما}{ق} + \frac{(۲ب - ل ج) ما}{ق} + \dots$$

مسلوں کی تطبیق کی ایک مثال ہے۔
بہ صریح۔ مائے لئے جو سلسلہ اوپر دیا گیا ہے اگر اس کی شکل
بہ ذیل ہو

$$ما = ک + لا + ب لا + ج لا + \dots$$

رکھو ما۔ ک = می

$$، می = لا + ب لا + ج لا + \dots$$

جس سے لا کو می
یعنی (ما۔ ک) کی صعودی قوتوں میں پھیلا یا جاسکتا ہے۔

امثلہ نمبری ۲۲ (ب)

کے جملات کو لا کی صعودی قوتوں میں لا والی رقم تک پھیلاؤ

$$\frac{۱ - لا}{۱ - لا - لا - لا} (۲) \quad \frac{۱ + لا}{۱ - لا - لا - لا}$$

$$\frac{۱}{۱ - لا - لا - لا - لا} (۵) \quad \frac{۱ + لا}{۱ - لا - لا - لا - لا} (۴) \quad \frac{۱ + لا}{۱ - لا - لا - لا - لا}$$

اگر $\frac{۱ + ب لا}{(۱ - لا)}$ کی تفصیل میں ن وین رقم (۳ ن - ۲) لا ہو

۱ اور ب کی قیمتیں معلوم کرو۔

۸۔ اگر $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ کی تفصیل میں $\frac{1}{2}$ کا سرٹا ہو تو

۱۔ اگر $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ کی قیمت دریافت کرو۔
۲۔ اگر $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{2}$ کی قیمت

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2}$$

۹۔ اگر $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ کی قیمت

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2}$$

اس سے ثابت کرو کہ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2}$ مساوات $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2}$ کا ایک تقریبی حل ہے، نیز بتاؤ کہ یہ جواب اعشاریہ کے کس مقام تک درست ہے۔

۱۰۔ اگر $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ میں اجزائے ضربی کی تعداد لامتناہی ہو اور $\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ تو ثابت کرو کہ اس میں $\frac{1}{2}$ کا سر

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2}$$

۱۱۔ اگر $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ تو $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2}$ کی تفصیل میں $\frac{1}{2}$ کا سر دریافت کرو۔

۱۲۔ اگر n کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$(۲) \quad \frac{n}{2} - (n+1)(1-n) + \frac{n(n+1)}{2} - (n-2) - \dots = 1$$

۱۔ دونوں سلسلوں میں تعدادِ رقوم n ہے اور

$$(۳) \quad 1 - n + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} - \dots - \frac{n(n-1)}{2} = \dots = \frac{n}{2}$$

$$(۴) \quad (n+q) - n + (n+q-1) + \frac{n(n-1)}{2} - (n+q-2) - \dots = \frac{n}{2}$$

۲۔ آخر کے دو سلسلوں میں تعدادِ رقوم $(n+1)$ ہے۔



تیسواں باب

جزوی کسور

۳۱۵۔ ابتدائی جبر و مقابلہ میں بتایا جا چکا ہے کہ اگر ایسی کسروں کا ایک جٹ دیا ہوا ہو جو علامات مثبت اور منفی سے باہم منسلک ہوں تو ان کو ایک سادہ شکل کی واحد کسر میں تحويل کر سکتے ہیں جس کا نسب نما ان کسروں کے نسب نماؤں کے ذواضعات اقل کے مساوی ہوتا ہے، بعض اوقات اس عمل کے متضاد عمل کی ضرورت پیش آتی ہے یعنی ایک کسر کو مقابلہ سادہ یعنی جزوی کسور میں تویژنا پڑتا ہے، مثلاً اگر ہم

کسر $\frac{3}{4} - \frac{5}{6}$ کو لا کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلا نا

چاہیں تو ہم دفعہ ۳۱۴ مشق کا طریقہ استعمال کرنے سے سلسلہ مطلوبہ کی جتنی رقمیں چاہیں حاصل کر سکتے ہیں، لیکن اگر ہم اس سلسلہ کی عام رقم معلوم کرنا چاہیں تو یہ طریقہ کار گر نہیں ہوتا، اس کے

بئے نہایت آسان طریقہ یہ ہے کہ کسر مذکور کو دو کسور $\frac{1}{4} + \frac{2}{6}$

کی معادل شکل میں تحويل کر لیا جائے۔ اب ہم ان دونوں جملوں یعنی

(۱- لا) اور (۱- ۳ لا) کو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلا سکتے

ہیں اور اس بناء پر عام رقم معلوم کر سکتے ہیں۔

۳۱۰۔ باب ہذا میں ہم کسی منطق کسر کو جزوی کسور میں تحلیل کرنے کے مسئلہ کی توضیح کے لئے چند مثالیں درج کریں گے اس ضمن میں پر زیادہ ہیض اور مفصل بحث کے لئے طالب علم میرٹ کے اعلیٰ الجبر کا کوزہ یا احصائے تنکلات کی کتابوں کو ملاحظہ کرے ان کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ

(۱) ہر منطق کسر جزوی کسور کے ایک مجموعہ میں تحلیل کی جاسکتی ہے
(۲) اگر اصلی نسب نامہ میں کوئی خطی جزو ضربی (لا۔ ب) کی شکل کا

و تو اس کے متناظر ہیں $\frac{ب}{لا۔ ب}$ کی شکل کی ایک جزوی کسر حاصل ہوتی ہے اور اگر اصلی کسر کے نسب نامہ میں (لا۔ ب) کی شکل خطی جزو ضربی کی دوسری قوت واقع ہو تو اس کے جواب میں $\frac{ب}{لا۔ ب}$ اور $\frac{ب}{لا۔ ب}$ کو شکل کی دو جزوی کسریں حاصل ہوتی ہیں، اسی طرح اگر (لا۔ ب) تین بار واقع ہو تو ان دو جزویوں کے علاوہ ایک اور کسر $\frac{ب}{لا۔ ب}$ حاصل ہوتی ہے،

مثلاً (۳) اگر اصلی کسر کے نسب نامہ میں درجہ دوم کا ایک جزو ضربی (لا۔ ب) کی شکل کا ہو تو اس کے جواب میں $\frac{ب}{لا۔ ب}$ اور $\frac{ب}{لا۔ ب}$ کی شکل کی ایک جزوی کسر حاصل ہوتی ہے اور اگر ابتدائی کسر کے نسب نامہ میں جزو ضربی (لا۔ ب) کی شکل کا ہو تو اس کے علاوہ

نواں کسر $\frac{ب}{لا۔ ب}$ کی شکل کی ایک اور

۱: م لا + ن = و (لا + ب) + ب (لا - و) (۱)
 اب ہم سروں کو مساوی کرنے سے و اور ب کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں لیکن حسب ذیل طریق پر عمل کرنا زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے۔ چونکہ و اور ب، لا کے تابع نہیں ہیں، اس لئے ہم لا کو جو قیمت چاہیں دے سکتے ہیں

(۱) میں رکھو لا - و = ۰۔ یعنی لا = و، تب

$$\frac{م + و}{و + ب} = و$$

اب رکھو لا + ب = ۰۔ یعنی لا = - ب، تب

$$\frac{م - ب}{و + ب} = ب$$

$$۱: \frac{م + لا + ن}{(لا - و)(لا + ب)} = \frac{۱}{و + ب} \left(\frac{م + و}{و + ب} + \frac{م - ب}{و + ب} \right)$$

مثال ۳- $\frac{۲۳لا - ۱۱لا^۲}{(۱ - لا)(۱ - لا^۲)}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کرو۔

$$\frac{ج}{لا - ۳} + \frac{ب}{لا + ۳} + \frac{و}{۱ - لا^۲} = \frac{۲۳لا - ۱۱لا^۲}{(لا - ۳)(لا + ۳)(۱ - لا^۲)}$$

(۱)

$$۱: ۲۳لا - ۱۱لا^۲ = و(لا + ۳)(لا - ۳) + ب(لا - ۳)(۱ - لا^۲) + ج(۱ - لا^۲)(لا + ۳)$$

بالترتیب لا - ۱ = ۳ + و، لا = ۳ - و، رکھنے سے

$$۱ = ا' ب = ۴ ج = ۱ - ۱$$

$$\frac{1}{3-2} - \frac{2}{3+2} + \frac{1}{1-2} = \frac{23-11}{(2-1)(1-2)}$$

مثال ۴۔ کو جزوی کسور میں تحلیل کر

$$\frac{23-11}{(2-1)^2(2-1)} = \frac{23-11}{(2-1)^2(2-1)}$$

$$\frac{23-11}{(2-1)^2(2-1)} = \frac{23-11}{(2-1)^2(2-1)}$$

$$\frac{23-11}{(2-1)^2(2-1)} = \frac{23-11}{(2-1)^2(2-1)}$$

ب کی قیمت معلوم کرنے کے لئے لا سے سروں کو مساوی کر اس طرح

$$\frac{23-11}{(2-1)^2(2-1)} = \frac{23-11}{(2-1)^2(2-1)}$$

$$\frac{23-11}{(2-1)^2(2-1)} = \frac{23-11}{(2-1)^2(2-1)}$$

مثال ۵۔ کو جزوی کسور میں تحلیل کر

$$\frac{23-11}{(2-1)^2(2-1)} = \frac{23-11}{(2-1)^2(2-1)}$$

$$\frac{23-11}{(2-1)^2(2-1)} = \frac{23-11}{(2-1)^2(2-1)}$$

$$۲ = ۱ + ج اور ۱ = ۲$$

مطلق رقموں کو مساوی رکھنے سے

$$۱۱ = ۲ - ۲ + ج اور ۱۱ = ۲$$

$$\frac{۲}{۲ - ۱} = \frac{۱ - ۱}{۱ + ۱} = \frac{۱۹ - ۱۹}{(۱ - ۱)(۱ + ۱)}$$

۳۱ = فیل کی مثال میں جو حکمت علی استعمال کی گئی ہے وہ بھی اکثر اوقات مفید ثابت ہوتی ہے۔

$$\text{مثال} - \frac{۹ - ۱۲ + ۲۳ - ۳۸}{(۱ - ۲)(۱ + ۱)} \text{ نوں کی جزوی کسو میں}$$

تحلیل کرو۔

$$\frac{۹ - ۱۲ + ۲۳ - ۳۸}{(۱ - ۲)(۱ + ۱)} = \frac{۱}{۱ + ۱} + \frac{۱۱ - ۱۱}{(۱ - ۲)(۱ + ۱)}$$

جہاں ۱ کوئی مستقل مقدار ہے اور ۱۱ (۱ - ۲) لاکہ کوئی متغیر ہے اور ان کی قیمتیں معلوم کرنا مقصود ہے۔

$$۹ - ۱۲ + ۲۳ - ۳۸ = ۱(۱ - ۲) + (۱۱ - ۱۱)(۱ + ۱)$$

فرض کرو کہ ۱ = ۱، تب ۱ = ۱ - ۱ تب ۱ کی قیمت درج کرنے اور عمل نقل سے

$$(۱ + ۱)۱ = (۱ - ۲) + ۹ - ۱۲ + ۲۳ - ۳۸$$

$$۱۱ + ۱۱ = ۱۱ + ۱۱$$

$$۱۱ = (۱ - ۲) + ۱۱$$

۱۶ + ۳
۲-۹
کے متناظر جو جزوی کسور ہیں انہیں معلوم کر نیکے
۲-۹ = ی رکھو

$$\frac{۲۴ + ۱۲ + ۶ + ۱}{۲-۹} = \frac{۱۶ + (۲ + ی)}{۲-۹} = \frac{۱۶ + ۳}{۲(۲-۹)}$$

$$\frac{۲۴}{۲-۹} + \frac{۱۲}{۲-۹} + \frac{۶}{۲-۹} + \frac{۱}{۲-۹} =$$

$$\frac{۲۴}{۲(۲-۹)} + \frac{۱۲}{۳(۲-۹)} + \frac{۶}{۲(۲-۹)} + \frac{۱}{۲-۹} =$$

$$\frac{۶}{۲(۲-۹)} + \frac{۱}{۲-۹} + \frac{۱}{۱+۹} = \frac{۹-۳۸-۲۴-۳}{(۱+۹)۲(۲-۹)}$$

$$\frac{۲۴}{۲(۲-۹)} + \frac{۱۲}{۳(۲-۹)} +$$

۱۸-۳ = اب تک جو مثالیں حل کی گئی ہیں ان سب میں شمار کنندہ کا بعد نسب نما کے بعد سے کم تھا۔ اگر ایسا نہ ہو تو شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کر لینا چاہئے حتیٰ کہ جو باقی حاصل ہو اسکا بف نسب نما کے بعد سے کم ہو۔

مثال - $\frac{۹-۳۸-۲۴-۳}{۱-۹-۲-۳}$ کو اس کی جزوی کسروں میں تحلیل

$$\frac{۹-۳۸}{۱-۹-۲-۳} + ۳ + ۲ = \frac{۹-۳۸-۵-۳}{۱-۹-۲-۳}$$

$$\frac{۱}{۱-۹} + \frac{۵}{۱+۹} = \frac{۹-۳۸}{۱-۹-۲-۳}$$

$$\frac{1}{1-2} + \frac{5}{1+2} + 3 + 2 = \frac{2+5+2}{1-2-2}$$

۳۱۹۔ اب ہم یہ بتانگے کہ کس طرح جزوی کسور میں تحلیل کرنے سے کسی منطق کسر کو لاکھی سعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلا یا جاسکتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر $\frac{3+2-2}{(2-1)^2(2-2)}$ کو لاکھی سعودی قوتوں کے

سلسلہ میں پھیلا یا جائے تو تفصیل کی عام رقم معلوم کرو۔
دفعہ ۳۱۲ شکی مثال ۴ کی رو سے

$$\frac{3}{(2-1)^2(2-2)} - \frac{5}{(2-1)^2} - \frac{1}{(2-1)^3} = \frac{2-2+2}{(2-1)^2(2-2)}$$

$$= \frac{2}{(2-1)^2} - \frac{5}{(2-1)^2} + \frac{1}{(2-1)^3}$$

$$= \frac{1}{(2-1)^3} - \frac{5}{(2-1)^2} + \frac{1}{(2-1)^3}$$

پس تفصیل کی عام رقم

$$(-\frac{1}{3} + \frac{5}{4} - \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال ۲۔ $\frac{2+2}{(2+1)(2+1)}$ کو لاکھی سعودی قوتوں میں پھیلاؤ

اور تفصیل کی عام رقم معلوم کرو۔

$$\frac{2+2}{(2+1)(2+1)} = \frac{1}{(2+1)} + \frac{1}{(2+1)}$$

$$2+2 = 1(2+1) + 1(2+1)$$

$$۱ + لا = ۰ \text{ رکھو، تب } ۳ = ۱$$

رقبہ مطلق کو مساوی کرنے سے $۱ + ج = ج$ جس سے $ج = ۲$
 لا کے سروں کو مساوی کرنے سے $۱ + ب = ب$ جس سے $ب = ۳$

$$\frac{۳ - لا}{۱ + لا} + \frac{۳}{۱ + لا} = \frac{۱ + لا}{(۱ + لا)(۱ + لا)}$$

$$۳ = (۱ + لا)(۳ - لا) + (۱ + لا)$$

$$۳ = \{ ۱ - لا + لا - لا \dots + (۱ - لا) + لا + لا \dots \}$$

$$+ (۳ - لا)(۱ - لا) + لا + لا \dots + (۱ - لا) + لا + لا \dots \}$$

لا کا سر اسطر معلوم کرو۔

(۱) اگر یہ ہفت ہو تو دوسرے سلسلہ میں لا کا سر $۳ - (۱ - لا)$ ہے

اس نے تفصیل میں لا کا سر $۳ + ۳ - (۱ - لا)$ ہے

(۲) اگر یہ طاق ہو تو دوسرے سلسلہ میں لا کا سر $۳ - (۱ - لا)$ ہے

ہے، پس تفصیل میں مطلوبہ سر $۳ - (۱ - لا) - ۳$ ہے۔

۲۳ مسئلہ نمبری

جزوی کسو میں تحلیل کرو۔

$$(۲) \frac{۴۶ + ۱۳ لا}{۱۲ لا - ۱۱ لا - ۱۵}$$

$$(۱) \frac{۱ - لا}{۱ - لا + ۶ لا}$$

$$(۳) \frac{۱۰ لا + ۱۳}{(۱ - لا)(۱ - لا - ۵ لا)}$$

$$(۴) \frac{۱ + ۳ لا + ۲ لا}{(۱ - لا)(۱ - لا - ۲ لا)}$$

$$(۵) \frac{۲ل۲ + ل۱ - ل۳ - ۳}{(۳ + ل۲)(۱ - ل۱)} \quad (۶) \frac{۹}{(۲ + ل۲)(۱ - ل۱)}$$

$$(۷) \frac{ل۲ - ۳ل۱ - ۳ل۲ + ۱۰}{(۳ - ل۱)²(۱ + ل۱)} \quad (۸) \frac{۲ل۲ + ل۱ - ۲۰ + ل۳}{(۵ + ل۱)(۱ + ل۱)}$$

$$(۹) \frac{۲ل۱ - ل۲ - ۱۱ + ل۵}{(۳ - ل۱)(ل۲ + ل۱ - ۵)} \quad (۱۰) \frac{۳ل۲ - ل۱ - ۱۰ + ل۳}{۲(۱ - ل۱)}$$

$$(۱۱) \frac{۵ل۲ + ل۱ - ۵}{۲(ل۱ - ۱)(۱ + ل۱)}$$

اگر ذیل کے جملات کو ل۱ کی سعودی توتوں میں پھیلایا جائے تو تفصیل کی عام رقم دریافت کرو

$$(۱۲) \frac{۱ + ل۳ + ل۵}{ل۲ + ۲۸ + ل۱ - ۱} \quad (۱۳) \frac{۵ + ل۱ + ل۲}{(ل۱ - ۱)(ل۲ + ۲)}$$

$$(۱۴) \frac{ل۱ + ل۲ + ل۳ + ۱۰}{ل۲ + ل۱ + ۱۰} \quad (۱۵) \frac{۲ - ل۱ - ۲}{(ل۱ - ۱)(ل۲ - ۱)}$$

$$(۱۶) \frac{ل۲ + ل۱ + ل۲ + ۳}{(ل۱ - ۱)(ل۲ + ۱ - ل۱ - ۲)} \quad (۱۷) \frac{ل۲ - ل۱ + ل۲ + ۳}{(ل۱ + ۱)(ل۲ - ۱)}$$

$$(۱۸) \frac{ل۱ + ل۲ + ل۳}{۲(ل۱ + ۱)(ل۲ + ۲)} \quad (۱۹) \frac{ل۲ + ل۱ + ۱}{(ل۱ - ۱)(ل۲ + ۱)}$$

$$(۲۰) \frac{ل۲ + ل۱ - ۱}{۲(ل۱ + ۱)} \quad (۲۱) \frac{۱}{(ل۱ - ۱)(ل۲ - ۱)(ل۱ - ۱ - ل۱)}$$

$$۲ - ۳ لا$$

$$(۲۲) \frac{۲ - ۳ لا + لا^۲}{۲}$$

(۲۳) سلاسل ذیل کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو

$$(۱) \dots + \frac{لا^۲}{(۱+لا)(۱+لا^۲)} + \frac{لا}{(۱+لا)(۱+لا^۳)} + \frac{۱}{(۱+لا)(۱+لا^۴)}$$

$$(۲) \dots + \frac{لا(۱-لا)}{(۱+لا)(۱+لا^۳)} + \frac{لا(۱-لا^۳)}{(۱+لا)(۱+لا^۵)} + \frac{لا(۱-لا^۵)}{(۱+لا)(۱+لا^۷)}$$

(۲۴) ذیل کے اشتناہی سلسلہ کا حاصل جمع معلوم کرو جبکہ لا > ۱

$$\dots + \frac{لا^۲}{(۱-لا)(۱-لا^۳)} + \frac{لا^۲}{(۱-لا)(۱-لا^۵)} + \frac{۱}{(۱-لا)(۱-لا^۷)}$$

(۲۵) اس سلسلہ کی ن رقموں کا مجموعہ معلوم کرو جسکی ق وین رقم

$$= \frac{لا^۲(۱+لا+لا^۲)}{(۱-لا)(۱-لا^۳+لا^۲)}$$

۳۶۔ ثابت کرو کہ حروف و ب ج اور ا ن کی قوتوں سے ن ابعاد کے جو مختلف متجانس حاصل ضرب بن سکتے ہیں اُن کا مجموعہ

$$\frac{۱^۲ + (ب-ج) + ب^۲ + (ج-ا) + ج^۲ + (ا-ب) + ب^۲ + (ب-ج) + ج^۲ + (ج-ا) + ا^۲ + (ا-ب) + ب^۲}{۱^۲ + (ب-ج) + ب^۲ + (ج-ا) + ج^۲ + (ا-ب) + ب^۲ + (ب-ج) + ج^۲ + (ج-ا) + ا^۲ + (ا-ب) + ب^۲}$$

چوبیسواں باب

متوالی سلسلے

۳۲۰۔ اگر ایک سلسلہ ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ایسا ہو کہ

اس میں کسی مقررہ رقم سے اس کے بعد کی ہر ایک رقم رقوم ماقبل کی ایک خاص تعداد کو کسی مستقل مقادیر سے بالترتیب ضرب دیکر ان حاصل ضربوں کو جمع کرنے سے حاصل ہو تو اس کو متوالی سلسلہ کہتے ہیں۔

۳۲۱۔ سلسلہ ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + میں دوسری رقم کے بعد ہر ایک رقم دو رقوم ماقبل کو بالترتیب مستقلات ۲ اور ۱ سے ضرب دیکر حاصل ضربوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتی ہے، ان مقادیر کو مستقل اس لئے کہا گیا ہے کیونکہ یہ ان کی ہر قیمت کے لئے وہی رہتی ہیں مثلاً

$$۵ = ۲ \times ۲ + ۱ \times (-۱)$$

یعنی $۲ = ۲ \times ۱ - ۱ \times ۱$ عام طور پر جب n ایک سے بڑا ہو تو ہر ایک رقم اپنے عین پہلے کی دو رقوم کے ساتھ مساوات

$$۶ = ۲ \times ۴ - ۱ \times ۲$$

$$یا \quad ۶ = ۲ \times ۴ - ۱ \times ۲ + ۱ \times ۲ - ۱ \times ۰ = ۰$$

سے مرہوم ہوتی ہے۔

اس مساوات میں $ع_1, ع_2, ع_3$ کے سر مع اپنی
کے "رابطہ کا پیمانہ" کہلاتے ہیں۔

یہ سلسلہ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$
ایک متوالی سلسلہ ہے جس میں رابطہ کا پیمانہ یہ ہے
 $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$

۳۳۔ جب کسی سلسلہ کے رابطہ کا پیمانہ دیا ہوا ہو
کی سر ایک رقم معلوم ہو سکتی ہے بشرطیکہ رقم مطلوبہ
رقمون کی کافی تعداد معلوم ہو۔ چونکہ عمل کا طریقہ ایک
ہے خواہ رابطہ کا پیمانہ کتنی ہی رقوم پر مشتمل ہو اس لئے
ذیل کی مثال کافی ہوگی۔

اگر سلسلہ $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$
میں رابطہ کا پیمانہ $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ ہو تو ظاہر ہے۔

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$\text{یعنی } 1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

پس کسی رقم کا سر معلوم ہو سکتا ہے بشرطیکہ اس سے
تین رقوم کے سر معلوم ہوں۔
۳۴۔ برعکس اس کے اگر ایک سلسلہ کی رقوم کو
تبدیل دی ہوئی ہو تو اسے رابطہ کا پیمانہ دریافت ہو
مثال۔ متوالی $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

کیونکہ ربط لے۔ ق لے۔ ل لے۔ = کی بدولت لا کی باقی سب
قوتوں کے سر مفر ہیں

$$\text{ج} = \frac{\text{ل} + (\text{ق} - \text{ل}) + (\text{ق} - \text{ل}) + (\text{ق} - \text{ل}) + (\text{ق} - \text{ل})}{\text{ا} - \text{ق} - \text{ل} - \text{ل} - \text{ا}}$$

پس اس مثالی سلسلہ کا حاصل جمع ایک ایسی کسر ہے جس کا
مشتب نما ربط کا پیمانہ ہے۔
۳۲۶ - دفعہ ماقبل کے جواب میں اگر دوسری کسر لا انتہا چھوٹی
ہو جائے جب ن لا انتہا بڑھ جائے تو رقوم کی لا متناہی تعداد
کا حاصل جمع

$$\frac{\text{ل} + (\text{ق} - \text{ل}) + (\text{ق} - \text{ل})}{\text{ا} - \text{ق} - \text{ل} - \text{ل} - \text{ا}}$$

ہو جاتا ہے۔

اگر ہم اس کسر کو لا کی معودی قوتوں کے سلسلہ میں بھلا دیں
جیسا کہ دفعہ ۳۱۴ میں بتایا گیا ہے تو ہم اوپر کے سلسلہ جی
جتنی رقمیں چاہیں حاصل کر سکتے ہیں اس بنا پر جملہ

$$\frac{\text{ل} + (\text{ق} - \text{ل}) + (\text{ق} - \text{ل})}{\text{ا} - \text{ق} - \text{ل} - \text{ل} - \text{ا}}$$

کو سلسلہ بالا کا کوینی تفاعل کہتے ہیں۔
۳۲۷ - دفعہ ۳۲۵ کے نتیجہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1 + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1)}{1 - 1 - 1 - 1} = \frac{1 + 1 + 1 + \dots + 1}{1 - 1 - 1 - 1}$$

$$+ \frac{(1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1)}{1 - 1 - 1 - 1}$$

اس سے ظاہر ہے کہ اگرچہ ٹکوینی تفاعل

$$\frac{1 + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1)}{1 - 1 - 1 - 1}$$

سے ہم سلسلہ بالا کی بتنی رقوم چاہیں حاصل کر سکتے ہیں تاہم سلسلہ

کا حقیقی معادل تصور کرنا اسی صورت میں روا اور جائز ہو

$$\frac{(1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1)}{1 - 1 - 1 - 1}$$

نکے لاستنای ہو جانے سے معدوم ہو جائے یعنی اگر سلسلہ ۳۲۸ = جب ٹکوینی تفاعل کو جزوی کسور کے ایک جٹ کی تہ میں ظاہر کیا جاسکے تو متوالی سلسلہ کی عام رقم آسانی سے ہو سکتی ہے، مثلاً فرض کرو کہ ٹکوینی تفاعل کو جزوی کسور

$$\frac{1}{1 - 1} + \frac{1}{1 - 1} + \frac{1}{1 - 1}$$

میں تحلیل کیا جاسکتا ہے، تب عام رقم

$$1 + (-1) + (-1) + \dots + (-1) + (-1)$$

$$- (1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1)$$

$$= \frac{2 + (1-3) + (1-5) + \dots + (1-(2n-1))}{2 + 1} - \frac{1 - 2n + 1}{2 - 1}$$

۳۲۹۔ اگر متوالی سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots$ کی عام رقم n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرنا مقصود ہو تو اس کے لئے $1 + 1 + 1 + \dots$ کا حاصل جمع اور عام رقم معلوم کر جائے، نتیجہ میں $1 = 1$ رکھنے سے مجموعہ مطلوبہ حاصل ہو گا۔ مثال۔ سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots$ کی عام رقم n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots$ کے ربط کا پتا

$$1 - 5 + 9 - 13 + \dots$$

یہ جملہ ذیل کی دو جزوی کسور میں تحلیل ہو سکتا ہے

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

اگر ان جملوں کو 1 کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلا دیا تو عام رقم $(1 \times 3 - 3 \times 1)$ حاصل ہوتی ہے، پس وہ ہوئے سلسلہ کی عام رقم $1 \times 3 - 3 \times 1$ ہے اور n رقموں کا

$$2(1-3) - 3(1-2) \text{ ہے۔}$$

۳۳۰۔ طالب علم کو ہم پھر یاد دلانا چاہتے ہیں کہ دفعہ ماں ٹکونی تفاعل سلسلہ

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

کا حقیقی معادل تصور نہیں کیا جاسکتا سوائے اس صورت کے جبکہ
لا کی قیمت ایسی ہو کہ اس کے لئے سلسلہ بالا مستحق ہو، اس
اگر لا = ۱ تو چونکہ سلسلہ صریحاً متع ہوگا ہے اس لئے تکوینی تفاعل
سلسلہ بالا کا حقیقی معادل نہیں ہوگا۔ لیکن

کی عام رقم لا کے تابع نہیں اور لا کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو یہ
عام رقم ہمیشہ سلسلہ

..... + ۱ + ۶ + ۲۳ + ۸۴ + لا
میں لا کا سر ہوگی۔ اس لئے ہم اس کو مستحق سلسلہ سمجھ کر
اس کی عام رقم حسب معمول معلوم کرتے ہیں اور پھر نتیجہ میں
لا = ۱ رکھ دیتے ہیں۔

اشکۂ نمبری ۲۴

ذیل کے سلسلہ کا تکوینی تفاعل اور عام رقم معلوم کرو
(۱) ۱ + لا + ۹ + لا + ۱۳ + لا + (۲) - لا + ۵ + لا + ۷ + لا +
(۳) ۲ + لا + ۳ + لا + ۵ + لا + ۹ + لا + (۴) - لا + ۶ + لا + ۹ + لا + ۲۷ + لا +
(۵) ۳ + لا + ۶ + لا + ۱۲ + لا + ۳۶ + لا + ۹۸ + لا + ۲۷۶ + لا +
ذیل کے سلسلوں میں سے ہر ایک کی ن دیں رقم اور ن رقموں کا
مجموعہ معلوم کرو

(۶) ۲ + لا + ۵ + لا + ۱۳ + لا + ۳۵ + لا + (۷) - لا + ۶ + لا + ۳۰ + لا +
(۸) ۲ + لا + ۷ + لا + ۲۵ + لا + ۹۱ + لا +
(۹) ۱ + لا + ۲ + لا + ۶ + لا + ۲۰ + لا + ۶۶ + لا + ۲۱۲ + لا +
(۱۰) - لا + ۲ + لا + ۸ + لا +
.....

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots + ن$$

اور $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots + ن$ متوالی سلسلے میں ان کے ربط کا پیمانہ معلوم کرو۔
(۱۲) بتاؤ کہ اگر متوالی سلسلہ

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

کی لا تنہائی تعدادِ رقوم کا مجموعہ معلوم ہو تو اس سے اسکی ن رقوموں کا حاصل جمع کس طرح نکالا جاسکتا ہے۔
(۱۳) سلسلہ

$$۳ - ۱ + ۱۳ - ۴۱ + ۵۳ - \dots$$

کی (ن + ۱) رقوم کا حاصل جمع معلوم کرو۔
(۱۴) متوالی سلسلوں

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

$$\text{اور } ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

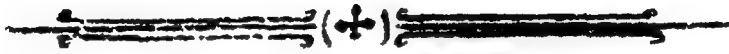
کے ربط کے پیمانے بالترتیب $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$ اور $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$ ہیں، ثابت کرو کہ وہ سلسلہ جسکی عام رقم $(۱ + ۱ + ۱ + \dots)$ ہے ایک متوالی سلسلہ ہے جس کے ربط کا پیمانہ

$$۱ + (۱ + ۱) + (۱ + ۱ + ۱) + (۱ + ۱ + ۱ + ۱) + \dots$$

$$+ ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

ہے۔
(۱۵) اگر ایک ایسا سلسلہ بنایا جائے جس کی ن ویں رقم ایک

دوسرے دنے ہوئے متوالی سلسلہ کی ن رموں کے مجموعہ کے برابر ہو تو بتاؤ کہ یہ سلسلہ بھی متوالی ہو گا جس کے ربط کے پیمانہ میں دنے ہوئے سلسلہ کے ربط کے پیمانہ کی نسبت ایک رقم زیادہ ہو گی۔



پچیسواں باب کسور مسلسل

۳۳۱۔ $۱ + \frac{ب}{ج + \frac{د}{ع + ...}}$ کی شکل کے جد کو کسر مسلسل

کہتے ہیں، یہاں حروف 'ا'، 'ب'، 'ج'، وغیرہ کسی قہ کی مقادیر کو تعبیر کر سکتے ہیں لیکن فی الحال ہم صرف اس کا سادہ شکل $۱ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۱ + ...}}}$ پر بحث کرتے ہیں جس میں

'ا'، 'ب'، 'ج'، صرف مثبت صحیح اعداد کو تعبیر کرتے ہیں ۳۱ سلسلہ کو بالعموم زیادہ منضبط شکل $۱ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۱ + ...}}}$ میں لکھا جاتا ہے۔

۳۳۲۔ اگر خارج قسمتوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، کی تعداد محدود ہو کسر مسلسل ختم کہلاتی ہے اور اگر غیر محدود ہو تو کسر کو لامتناہی کسر مسلسل کہتے ہیں۔ اگر کسر ختم ہو تو سلسلہ کی آخری بیٹے سب سے نیچے کی را سے شروع ہو کر یکے بعد دیگرے کسور کو مختصر کرتے جاتے ہیں۔

جس پر تقسیم کا عمل پورا ہو جائیگا اسلئے ظاہر ہے کہ ہم ہر ایسی کسور کو جس کا شمار کنندہ اور النسب نما دونوں مثبت صحیح اعداد ہوں ایک مختتم مسئلہ کسر کی شکل میں لا سکتے ہیں۔

مثال۔ $\frac{251}{802}$ کو مسلسل کسر کی شکل میں لاؤ۔

معمولی قاعدہ کے مطابق ۲۵۱ اور ۸۰۲ کا عاد اعظم معلوم کرو۔

$$\begin{array}{c|c|c|c} 5 & 251 & 802 & 3 \\ \hline 6 & 6 & 29 & 8 \end{array}$$

اس میں خارج قسمت بالترتیب ۳، ۵، ۸، ۶..... ہیں، اسلئے

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{251}{802}$$

۳۳۴۔ کسر مسلسل کے پہلے دوسرے، تیسرے،..... خارج قسمت پر ٹھہر جانے سے جو کسریں حاصل ہوتی ہیں ان کو بالترتیب پہلا، دوسرا، تیسرا،..... مستحق کہتے ہیں، دفعہ ۳۲۹ نیز معلوم ہو گا کہ یہ وجہ تسمیہ اس امر پر مبنی ہے کہ ہر مستحق کی قیمت اس سے پہلے مستحق کی نسبت مسلسل کسر کی اصلی قیمت کے زیادہ قریب ہوتی ہے۔

۳۳۵۔ ثابت کرو کہ 'مستحق' مسلسل کسر کی اصلی قیمت سے متبادلاً کم اور زیادہ ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ مسلسل کسر $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots$ ہے

پہلا مستحق $\frac{1}{a}$ ہے جو کسر بالا کی نسبت بہت چھوٹا ہے کیونکہ

کسر کا باقی حصہ $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots$ چھوڑ دیا گیا ہے، دوسرا

مستقل $۱ + \frac{۱}{۲}$ ہے جو کسر کی نسبت بڑا ہے کیونکہ نسبت نا
 اصل نسبت نا $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \dots$ کی نسبت بہت چھوٹا ہے
 اسی طرح تیسرا مستقل $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \dots$ مقابلہ چھوٹا ہے

کیونکہ $۱ + \frac{۱}{۲}$ مقابلہ بڑا ہے اور علیٰ ہذا القیاس
 اگر کسر مفروضہ کسر واجب ہو تو $۱ =$ ، اگر اس صورت میں ہم یہ تسلیم کر لیں کہ پہلا
 مستقل صفر ہے تو ہم نتائج بالا کو حسب ذیل الفاظ میں بیان کر سکتے ہیں
 ہفت رتبہ کے سب مستقل مسلسل کسر سے بڑے ہوتے ہیں
 اور طاق رتبہ کے سب مستقل مسلسل کسر سے چھوٹے ہوتے ہیں
 ۳۳۶ - متواتر مستقوں کے بنانے کا کلیہ معلوم کر دو۔
 فرض کرو کہ مسلسل کسر

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \dots$$

ہے، تب پہلے تین مستقل، بالترتیب

$$\frac{۱}{۱} ، \frac{۱ + \frac{۱}{۲}}{۲} ، \frac{۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}}{۱ + \frac{۱}{۲}}$$

ہیں، ہم دیکھتے ہیں کہ تیسرے مستقل کا شمار کنندہ دوسرے مستقل
 کے شمار کنندہ کو تیسرے خارج قیمت سے ضرب دیکر حاصل ضرب
 میں پہلا مستقل جمع کرنے سے بن جاتا ہے، اور اس کا نسبت نا
 بھی اسی طرح بنتا ہے۔

فرض کرو کہ اسی طرح سے متواتر مستحق بنائے گئے ہیں، اور ان کے شمار کنندے بالترتیب $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ ، ہیں اور نسب $ن_1$ ، $ن_2$ ، $ن_3$ ، ہیں۔

فرض کرو کہ کلیہ بالا n ویں مستحق کے لئے صحیح ہے یعنی

$$ق_n = ق_{n-1} + ق_{n-2}$$

$$\text{اور } ن_n = ن_{n-1} + ن_{n-2}$$

($n+1$) ویں مستحق اور n ویں مستحق میں فرق صرف اس قدر ہے کہ آخر الذکر کے خارج قسمت $ق_n$ کی بجائے اول الذکر

میں خارج قسمت $ق_{n+1}$ ہے، پس ($n+1$) ویں مستحق

$$= \frac{ق_{n-1} + ق_{n-2}}{ن_{n-1} + ن_{n-2}}$$

$$= \frac{ق_{n-1} + ق_{n-2}}{ن_{n-1} + ن_{n-2}}$$

$$= \frac{ق_{n-1} + ق_{n-2}}{ن_{n-1} + ن_{n-2}}$$

$$= \frac{ق_{n-1} + ق_{n-2}}{ن_{n-1} + ن_{n-2}}$$

$$= \frac{ق_{n-1} + ق_{n-2}}{ن_{n-1} + ن_{n-2}}$$

$$= \frac{ق_{n-1} + ق_{n-2}}{ن_{n-1} + ن_{n-2}}$$

$$\frac{ک ق_۱ + ق_۲ - ک ل_۱ + ل_۲}{ک ق_۱ + ق_۲ - ک ل_۱ + ل_۲}$$

۳۳۸۔ اگر $\frac{ق_۱}{ل_۱}$ کسی مسلسل کسر کا 'ن' واں مستقر

$$ق_۱ ل_۱ - ق_۱ ل_۱ = (۱-۱)$$

فرض کرو کہ مسلسل کسر

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$$

چاہے تب

$$ق_۱ ل_۱ - ق_۱ ل_۱ = (۱ ق_۱ + ق_۱ - ق_۱ ل_۱)$$

$$- ق_۱ (۱ ل_۱ + ل_۱)$$

$$= (۱-۱) (ق_۱ ل_۱ - ق_۱ ل_۱ - ق_۱ ل_۱)$$

$$= (۱-۱) (ق_۱ ل_۱ - ق_۱ ل_۱ - ق_۱ ل_۱) اس$$

$$= \dots \dots \dots$$

$$= (۱-۱) (ق_۱ ل_۱ - ق_۱ ل_۱ - ق_۱ ل_۱)$$

$$لیکن ق_۱ ل_۱ - ق_۱ ل_۱ = (۱ + ۱) - (۱ + ۱) = ۱ - ۱ = (۱-۱)$$

$$پس ق_۱ ل_۱ - ق_۱ ل_۱ = (۱-۱)$$

جب مسلسل کسر ایک ہے تو یہ نتیجہ درست رہتا ہے، اور ہم لکھتے ہیں۔

فرض کریں، اور پہلا مستحق بھی صفر ہو۔
نوٹ۔ جب ہم متواتر مستحقوں کی عددی قیمتیں نکال رہے
ہوں تو متذکرہ بالا مسئلہ عمل کی صحت کی جانچ کرنے کا ایک
سادہ اور آسان ذریعہ ہے۔

نتیجہ صریح ا۔ ہر ایک مستحق مفرد ترین شکل میں ہوتا ہے
کیونکہ اگر ق_۱ اور ل_۱ میں کوئی جزو ضربی مشترک ہو تو

یہ ق_۱ ل_۱ - ق_۱ ل_۱ یعنی ا کو پورا تقسیم کریگا جو صریحاً

ناممکن ہے۔

نتیجہ صریح ۲۔ دو متواتر مستحقوں کا فرق ایک کسر ہوتی ہے
جن کا شمار کنندہ ۱ ہوتا ہے، کیونکہ

$$\frac{ق_۱}{ل_۱} - \frac{ق_۲}{ل_۲} = \frac{ق_۱ ل_۲ - ق_۲ ل_۱}{ل_۱ ل_۲} = \frac{۱}{ل_۱ ل_۲}$$

امثلہ نمبری ۲۵ (۱)

ذیل کے سلسلوں کے متواتر مستحق معلوم کرو۔

$$۱ - ۲ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۲}$$

$$۲ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}$$

$$۳ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳}$$

ذیل کی مقداروں کو مسلسل کسور کی شکل میں لاؤ اور ہر ایک چوتھا مستق معلوم کرو۔

$$\frac{1189}{3924} - 7 \quad \frac{832}{159} - 5 \quad \frac{253}{169} - 2$$

$$13439 - 9 \quad 536 - 8 \quad \frac{429}{2318} - 6$$

$$11 - 10 \quad 13029 - 11$$

۱۲۔ ایک میٹر ۳۹،۳۴،۰۴۹ انچ کے مساوی ہوتا ہے۔ کسور کے نظریہ سے ثابت کرو کہ ۳۲ میٹر تقریباً ۳۵ گز مساوی ہونگے۔

۱۳۔ کسروں کا ایک ایسا سلسلہ معلوم کرو جو ۲۲۲۲۲ کی جا مستق ہو، یہ کسر اعشاریہ ۳۶۵ دنوں پر شمسی سال کی زیادہ کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۴۔ ایک کلومیٹر تقریباً ۶۲۱۳۸ میل کے مساوی ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ کسور $\frac{5}{8}$ ، $\frac{18}{29}$ ، $\frac{23}{34}$ ، $\frac{43}{103}$ اس نسبت کی جوا

کلومیٹر کو ایک میل کے ساتھ ہے متواتر مستق قیمتیں ہیں۔ ۱۵۔ مساوی طول کی دو پٹریاں بالترتیب ۱۶۲ اور ۲۰۹ برا حصوں میں تقسیم کی گئی ہیں اگر ان کے صفر کے نشان دوسرے پر منطبق ہوں تو بتاؤ کہ ایک کا ۳۱ واں نشان کے ۴۰ ویں نشان پر تقریباً منطبق ہوگا۔

۱۶۔ اگر $\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + n + 1}$ کو مسلسل کسر میں تبدیل کیا جا تو ثابت کرو کہ خارج قسمت متبادلاً $n - 1$ اور $n + 1$ ہونگا نیز متواتر مستق معلوم کرو۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ

$$(1) \quad \frac{Q_n}{L_n} = \frac{Q_{n-1} - Q_n}{L_{n-1} - L_n}$$

$$(2) \quad \left(1 - \frac{Q_{n-1}}{L_{n-1}}\right) \left(1 - \frac{Q_n}{L_n}\right) = \left(1 - \frac{Q_n}{L_n}\right) \left(1 - \frac{Q_{n-1}}{L_{n-1}}\right)$$

۱۸۔ اگر $\frac{Q_n}{L_n}$ ایک مسلسل کسر کا n واں مستحق ہو اور اس کا متناظر خارج قسمت L_n ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{Q_{n-2}}{L_{n-2}} - \frac{Q_{n-1}}{L_{n-1}} = \frac{Q_{n-1}}{L_{n-1}} \times \frac{Q_n}{L_n} - \frac{Q_n}{L_n} \times \frac{Q_{n-1}}{L_{n-1}}$$

۳۳۹۔ ہر مستحق اپنے پلے کے مستحق کی نسبت مسلسل کسر کی قیمت کے مقابلہ زیادہ قریب ہوتا ہے۔
فرض کرو کہ مسلسل کسر لا ہے اور اس کے تین متواتر مستحق

$$\frac{Q_n}{L_n}, \frac{Q_{n-1}}{L_{n-1}}, \frac{Q_{n-2}}{L_{n-2}}$$

میں فرق صرف اس قدر ہے کہ لا میں L_n کی بجائے (L_{n-2}) واں پورا خارج قسمت لیا گیا ہے، اس پورے خارج قسمت کو L_n سے تقسیم کرو، تب

$$لا = \frac{Q_n + Q_{n-1}}{L_n + L_{n-1}}$$

$$\frac{ق}{ل} = \frac{ک (ق + ل) - ق (ل + ک)}{ل (ک + ل) - ل (ل + ک)}$$

$$\frac{ق + ل}{ل} = \frac{ق + ل - ق (ل + ک)}{ل (ک + ل) - ل (ل + ک)}$$

اب ک ایک سے بڑا ہے اور ل چھوٹا ہے ل + ک سے، اسلئے
ان دونوں وجوہات کی بناء پر $\frac{ق + ل}{ل}$ اور لا کا فرق چھوٹا
ہے $\frac{ق}{ل}$ اور لا کے فرق سے اس سے ثابت ہوا کہ کسی

سلسلہ کسر کا ہر ایک مستحق اپنے عین پہلے مستحق کی نسبت
اور بنا برین پہلے مستحقوں میں سے ہر ایک کی نسبت کسر مذکور
کی قیمت کے زیادہ قریب ہوتا ہے۔ دفعہ ہذا کے نتیجہ کو دفعہ
۳۳۵ کے نتیجہ کے ساتھ ملانے سے یہ ظاہر ہے کہ
طاق رتبہ کے مستحق قیمت میں بالمتسلل بڑھتے جاتے ہیں
لیکن کسر کی قیمت سے کبھی تجاوز نہیں کر سکتے۔
جست رتبہ کے مستحق قیمت میں بالمتسلل کم ہوتے جاتے
ہیں لیکن مسلسل کسر کی قیمت سے کبھی کم نہیں ہوتے۔
۳۳۶۔ کسی مستحق کو مسلسل کسر کے مساوی لینے سے جو غلطی
واقع ہوتی ہے اسکی حدود معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $\frac{ق}{ل}$ ، $\frac{ق + ل}{ل}$ ، $\frac{ق + ۲ل}{ل}$ تین مسلسل مستحق

ہیں اور ک پورے (ن + ۲) میں خارج قسمت کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\text{تب لا} = \frac{\text{ک قن} + ۱ + \text{قن}}{\text{ک ل} + ۱ + \text{لن}}$$

$$\text{لا} = \frac{\text{قن}}{\text{لن}} = \frac{\text{ک}}{\text{لن} (\text{ک ل} + ۱ + \text{لن})} = \frac{۱}{\text{لن} (\text{لن} + ۱ + \text{لن})}$$

اب ک ایک سے بڑا ہے، اس لئے $\frac{\text{قن}}{\text{لن}}$ اور لا کا فرق

$$\frac{۱}{\text{لن} + ۱ + \text{لن}} \text{ سے کم ہے اور } \frac{۱}{\text{لن} (\text{لن} + ۱ + \text{لن})} \text{ سے بڑا ہے}$$

نیز چونکہ $\text{لن} + ۱ < \text{لن}$ اس لئے $\frac{\text{قن}}{\text{لن}}$ کو لا کی بجائے لینے سے

جو غلطی واقع ہوتی ہے وہ $\frac{۱}{\text{لن}}$ سے کم ہے اور $\frac{۱}{\text{لن} + ۱ + \text{لن}}$ سے

زیادہ ہے۔

۳۴۱۔ دفعہ ماقبل سے یہ ظاہر ہے کہ $\frac{\text{قن}}{\text{لن}}$ کو سلسل

کسر کی بجائے لینے سے جو غلطی واقع ہوتی ہے وہ $\frac{۱}{\text{لن} + ۱ + \text{لن}}$ یا

۱ سے کم ہے یعنی $\frac{1}{14}$ سے کم

ہے، پس $\frac{1}{14}$ جتنا بڑا ہوگا اتنا ہی $\frac{1}{14}$ کی قیمت مسلسل

کسر کی قیمت کے زیادہ قریب ہوگی۔
پس کسی بڑے خارج قیمت کے عین پہلے کا مستحق مسلسل
کسر کی قیمت بہت قریب ہوتا ہے۔

اب چونکہ غلطی $\frac{1}{2}$ سے کم ہے اس لئے ایک ایسا مستحق
معلوم کرنے کے لئے جس کی قیمت اور مسلسل کسر کی قیمت کا باہمی
فرق ایک معلومہ مقدار $\frac{1}{2}$ سے کم ہو ہیں $\frac{1}{2}$ تک متواتر

مستحق نکالنے چاہئیں جہاں $\frac{1}{2}$ بڑا ہے اسے۔

۳۴۲۔ مسلسل کسروں کے خواص کی مدد سے ہم دو ایسے چھوٹے
صحیح اعداد معلوم کر سکتے ہیں جن کی نسبت دو متبائن مقادیر
کی نسبت کے بہت قریب ہو یا دو ایسی مقادیر کی باہمی نسبت
کے بہت قریب ہو جنکی ٹھیک نسبت صرف دو بڑے صحیح عددوں سے تعبیر ہوگی
مثال۔ کسور کا ایک ایسا سلسلہ معلوم کرو جو عدد ۳۱۴۱۵۹
کی طرف مستحق ہو ۱۴۱۵۹ اور ۱۰۰۰۰۰ کا عدا اعظم
نکالنے کے عمل میں متواتر خارج قیمت ۱، ۱۵، ۱، ۲۵، ۱، ۴۰،
۴ ہیں، تب

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + 3 = 3.12159$$

پس متواتر مستدق

$$\dots\dots\dots \frac{3}{1}, \frac{22}{2}, \frac{333}{104}, \frac{355}{113}$$

ہیں، آخر کا مستدق جو کہ بڑے خالص قسمت ۲۵ سے پہلے ہے کسر کی قیمت کے نہایت قریب ہے، اس مستدق اور کسر کی قیمت میں

اختلاف $\frac{1}{(113) \times 25}$ سے کم ہے اور اس لئے $\frac{1}{(100) \times 25}$ سے

یعنی ۰.۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ سے کم ہے۔ کوئی مستدق کسی ایسی کسر کی نسبت جس کا نسب نما مستدق کے نسب نما سے کم ہو مسلسل کسر کی قیمت کے زیادہ قریب

ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ مسلسل کسر لا ہے، $\frac{ق}{ل}$ اور $\frac{ق-۱}{ل-۱}$ دو

متصل مستدق ہیں اور $\frac{ق-۱}{ل-۱}$ ایک ایسی کسر ہے جس کا نسب نما $\frac{ق}{ل}$ سے کم ہے۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ کسر $\frac{ق-۱}{ل-۱}$ مستدق $\frac{ق}{ل}$ کی

نسبت لا کے زیادہ قریب ہے تب دفعہ ۳۳۹ کی رو سے $\frac{ق-۱}{ل-۱}$

مستدق $\frac{ق-۱}{ل-۱}$ کی نسبت بھی لا کے زیادہ قریب ہوگا۔

بہرچو کہ لا، $\frac{ق}{ل}$ اور $\frac{ق-۱}{ل-۱}$ کے درمیان وقع ہے ۱۔

وژا $\frac{ر}{س}$ کو $\frac{ق}{ل}$ اور $\frac{ق-۱}{ل-۱}$ کے درمیان واقع ہونا چاہئے۔

اسلئے $\frac{ر}{س} \sim \frac{ق-۱}{ل-۱} > \frac{ق}{ل} \sim \frac{ق-۱}{ل-۱}$ یعنی $\frac{ر}{س} > \frac{ق-۱}{ل-۱}$

۲۔ $\frac{ر}{ل} \sim \frac{س}{ق} > \frac{س}{ل}$

یعنی ایک صحیح عدد ایک کسر سے کم ہے جو صریحاً ناممکن۔

لہذا $\frac{ق}{ل}$ کسر $\frac{ر}{س}$ کی نسبت مسلسل کسر کے زیا قریب ہوگا۔

۳۴۴۔ اگر $\frac{ق}{ل}$ اور $\frac{ق}{ل}$ کسی مسلسل کسر کے دو

متواتر مستق ہوں تو $\frac{ق}{ل}$ بڑا ہوگا لاً سے جب $\frac{ق}{ل}$

بڑا ہو $\frac{ق}{ل}$ سے اور $\frac{ق}{ل}$ چھوٹا ہوگا لاً سے جب $\frac{ق}{ل}$

چھوٹا ہو $\frac{ق}{ل}$ سے۔

فرض کر دو کہ $\frac{ق}{ل}$ کے عین بعد جو مستق ہے اور

جواب میں مکمل غلط قیمت ک ہے، تب لا = $\frac{ک ق + ق}{ک ل + ل}$

$\frac{ق ق}{ل ل} - لا = \frac{1}{ل ل (ک ل + ل)} \{ ق ق (ک ل + ل) \}$

$\frac{ل ل (ک ق + ق)}{ل ل (ک ل + ل)}$

$\frac{ل ل (ک ق - ق ل) (ق ل - ق ل)}{ل ل (ک ل + ل)}$

جزو ضربی کا ق ل - ق ل مثبت ہے کیونکہ ق < ق ل < ل
اور ک < اسلے $\frac{ق ق}{ل ل}$ یا > لا یعنی اگر بالترتیب ق ل - ق ل
مثبت ہو یا منفی ہو یعنی اگر بالترتیب $\frac{ق ق}{ل ل}$ یا > $\frac{ق ق}{ل ل}$
یہ نتیجہ صریح - اوپر کی تحقیقات سے ظاہر ہے کہ جلات
ق ل - ق ل، ق ل - ق ل، ل ل - لا، ق ل - لا، ق ل - ق ل
کی علامت ایک ہی ہوگی۔

امثلہ نمبری ۲۵ (ب)

- (۱) $\frac{۲۲۲}{۲۰۳}$ گزوں کو ایک میٹر کا معادل لینے میں جو غلطی
ہوگی اس کی حدود دیانت کرو، معلوم ہے کہ ایک میٹر = ۱.۰۹۳۶ گز
- (۲) سلسلہ $1 + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۵} + \frac{1}{۷} + \frac{1}{۹} + \frac{1}{۱۱} + \dots$ کی ایسی
تقریبی قیمت معلوم کرو جس میں اور سلسلہ بالا کی اصلی قیمت
میں اختلاف ۰.۰۰۱ سے کم ہو۔
- (۳) مسلسل سلسلوں کے نظریہ کی رو سے ثابت کرو کہ $\frac{۹۹}{۷}$

اور ۱۱۸۳ کا فرق $\frac{1}{1183}$ سے کم ہے۔

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2}{1 + 2 + 3 + \dots + 10} \quad (۳)$$

کوسید مسلسل کی شکل میں لاؤ اور تیسرا مستحق معلوم کرو
(۵) ثابت کرو کہ پہلے اور ن ویں مستحق کا فرق تعداداً

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots - \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

کے مساوی ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ اگر مستحق $\frac{Q_n}{L_n}$ کے جواب میں خارج قسم
ہو تو

$$\frac{Q_n}{L_n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \quad (۱)$$

$$\frac{L_n}{L_{n-1}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \quad (۲)$$

(۷) مسلسل کسر $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ میں ثابت کرو

$$(۱) \quad Q_n + Q_{n-1} = Q_{n-1} + Q_{n-2} + Q_{n-3} + \dots + Q_1 + Q_0$$

$$(۲) \quad Q_n = L_{n-1}$$

۸۔ اگر $\frac{Q_n}{L_n}$ مسلسل کسر

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+d} + \frac{1}{d+e} + \dots$$

کا نواں مستحق ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+d} + \frac{1}{d+e} + \dots = \frac{1}{a} - \frac{1}{e}$$

۹۔ مسلسل کسر

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+d} + \frac{1}{d+e} + \dots$$

میں ثابت کرو کہ $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+d} + \frac{1}{d+e} + \dots = \frac{1}{a} - \frac{1}{e}$

$$\text{اور } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+d} + \frac{1}{d+e} + \dots = \frac{1}{a} - \frac{1}{e}$$

۱۰۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+d} + \frac{1}{d+e} + \dots = \frac{1}{a} - \frac{1}{e}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \dots = \frac{1}{a} - \frac{1}{e}$$

$$\text{۱۱۔ اگر مسلسل کسور } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+d} + \frac{1}{d+e} + \dots = \frac{1}{a} - \frac{1}{e}$$

میں سے پہلی کا عوا، دوسری کا (ع-۱) واں، تیسری کا

(ع-۲) واں مستحق بالترتیب $\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{b}$ ، $\frac{1}{c}$ ، $\frac{1}{d}$ ، $\frac{1}{e}$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$m = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \dots = \frac{1}{a} - \frac{1}{e}$$

۱۲۔ اگر سلسلہ

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b} + \dots$$

کان واں مستق $\frac{ق}{ل}$ ہو تو ثابت کرو کہ $ق$ اور $ل$ با

$$\frac{لا + لا + لا}{1 - لا - لا - لا} \text{ اور } \frac{لا}{1 - لا - لا - لا}$$

کی تفصیلوں میں $لا$ کے سرہیں۔ اس سے ثابت کرو کہ

$$ق = ل = ۱ = \frac{عہ - بک}{عہ - بہ} \text{ جہاں عہ اور بہ مساوات}$$

ت^۱۔ ات^۲۔ ا = ۱ = ۰ کی اصلیں ہیں۔

۱۳۔ اگر کسر مسلسل

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b} + \dots$$

کان واں مستق $\frac{ق}{ل}$ ہو تو ثابت کرو کہ $ق$ اور $ل$ با

$$\frac{لا + ب لا + لا^۳}{1 - (ا + ب) لا - لا^۲} \text{ اور } \frac{لا + ب لا + لا^۳}{1 - (ا + ب) لا - لا^۲}$$

کی تفصیلوں میں $لا$ کے سرہیں، اس سے ثابت کرو کہ

$$ق = ل = ۱ = \frac{عہ - بک}{عہ - بہ}$$

$$ق = ل = ۱ = \frac{عہ + ۱ - ب + ۱ - (عہ - بک)}{عہ - بہ}$$

کسور مسلسل

۱۴۱

پہلا مطالعہ نمبر دوم

جہاں عہ اور یہ مساوات

$$۱ - (۲ + ب) لا' + لا' = ۰$$

میں لا' کی قیمتیں ہیں -



چھپواں باب

درجہ اول کی غیر متعین مساواتیں

۳۴۵۔ دسویں باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کس طرح عددی سروں والی غیر متعین مساواتوں کے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم ہو سکتے ہیں۔ یہاں ہم درجہ اول کی کسی غیر متعین مساوات کے عام حل حاصل کرنے کے لئے مسلسل کسروں کے خواص کو کام میں لائیں گے۔

۳۴۶۔ ہم درجہ اول کی کسی مساوات کو جس میں دو مہول لا اور ما شامل ہوں $a \pm b = c$ ج کی شکل میں تحول کر سکتے ہیں جہاں a ، b ، c مثبت صحیح اعداد کو تفسیر کرتے ہیں۔ اس مساوات کے بے شمار حل ہو سکتے ہیں لیکن اگر سوال کی شرائط کی رو سے لا، ما مثبت صحیح اعداد ہوں تو ممکن ہے کہ حلوں کی تعداد محدود ہو۔

یہ ظاہر ہے کہ مساوات $a \pm b = c$ ج کا کوئی حل مثبت صحیح عدد نہیں ہو سکتا، نیز مساوات $a - b = c$ ج وہی ہے جو مساوات $b - a = c$ ج ہے، اس لئے صرف مساوات $a \pm b = c$ ج پر بحث کرنا کافی ہو گا۔

اگر a اور b میں کوئی جزو ضربی m ہو اور c میں یہ جزو ضربی شامل نہ ہو تو مساوات $a \pm b = c$ ج میں سے کوئی

بھی لا، یا کی صحیح عددی قیمت سے پوری نہیں ہوتی کیونکہ $\frac{1}{2}$ لا + $\frac{1}{2}$ با
 م پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے لیکن ج پورا تقسیم نہیں ہوتا۔
 اگر $\frac{1}{2}$ با ج میں کوئی جزو ضربی مشترک ہو تو تقسیم کرنے
 سے اسے نکال دیا جاسکتا ہے، پس ہم یہ فرض کر چکے کہ
 $\frac{1}{2}$ با ج میں کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہے اور $\frac{1}{2}$ اور
 ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں۔

۳۴۷۔ مساوات $\frac{1}{2}$ لا۔ با = ج کا عام حل مثبت
 صحیح اعداد میں دریافت کرو۔

$\frac{1}{2}$ کو مسلسل کسر کی شکل میں تحویل کرو اور $\frac{1}{2}$ کے عین

پہلے مستند کو $\frac{1}{2}$ سے تعبیر کرو تب $\frac{1}{2}$ لا۔ با = ج ۱

[وضفہ ۳۳۸]

۱۔ اگر $\frac{1}{2}$ لا۔ با = ج ۱ تو مساوات بالا کو ذیل کی شکل
 میں لکھا جاسکتا ہے۔

$\frac{1}{2}$ لا۔ با = ج (۱ لا۔ با)

۲۔ $\frac{1}{2}$ (لا۔ ج) = با (ما۔ ج)

اب چونکہ $\frac{1}{2}$ اور با میں کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہے اس لئے
 لا۔ ج ل با پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے، پس لا۔ ج ل = با د
 جہاں د کوئی صحیح عدد ہے

۳۔ لا۔ ج ل = با د = ج ۱

یعنی لا = با د + ج ل، ما = ل د + ج ق

جس سے د کو مثبت صحیح عددی قیمتیں دینے سے یا کوئی
 ایسی منفی صحیح عددی قیمتیں دینے سے جو تعداداً مقادیر

ج ل اور ج ق میں سے چھوٹی مقدار سے کم ہوں مطلوب

صحیح عددی حل حاصل ہو سکتے ہیں، نیز د مفر کے مساوی ہو ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ حلوں کی تعداد غیر محدود ہے۔

۲۔ اگر ل - ب ق = ۱ - ۱ تو

۱ لا - ب ما = ج (ل - ب ق)

۱ (لا + ج ل) = ب (ما + ج ق)

۱ لا + ج ل = ب ما + ج ق = د ... کوئی صحیح عدد

اس لئے لا = ب د - ج ل، ما = ل د - ج ق
ان مساواتوں میں د کو کوئی ایسی مثبت صحیح عددی قیمت

دینے سے جو مقادیر **ج ل اور ج ق** میں سے بڑی مقدار

سے زیادہ ہو مطلوبہ عددی حل حاصل ہو سکتے ہیں، پس اس صورت میں بھی حلوں کی تعداد غیر محدود ہے۔

۳۔ اگر ل اور ب میں سے کوئی ایک، اسے مساوی ہو تو

کسر $\frac{1}{ب}$ کو ایسی مسلسل کسر کی صورت میں تحول نہیں کیا جاسکتا

جس میں شمار کنندگان 'ا' ہوں اس لئے آگے عمل نہیں کیا جاسکتا

تاہم ان صورتوں میں حل محض دیکھنے سے معلوم ہو سکتے ہیں

مثلاً اگر ب = ۱ تو مساوات ہو جاتی ہے لا - ما = ج جس سے

ما = لا - ج، اس میں لا کو $\frac{ج}{ب}$ سے بڑی کوئی مثبت

صحیح عددی قیمت دینے سے مطلوبہ حل حاصل ہو سکتے ہیں۔

نوٹ۔ دیکھنے سے معلوم ہو گا کہ لا اور ما کی قیمتوں کے سلسلے

دو حسابی سلسلے ہیں جن میں مشترک فرق بالترتیب ب اور ا ہیں۔
مثال۔ مساوات ۲۹ لا۔ ۴۲ ما = ۵ کا عام حل مثبت صحیح
اعداد میں معلوم کرو۔

$\frac{۴۲}{۲۹}$ کو مسلسل کسر میں تحویل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{۴۲}{۲۹}$
کے عین پہلے کا مستحق $\frac{۱۳}{۹}$ ہے، پس

$$۱ - = ۹ \times ۴۲ - ۱۳ \times ۲۹$$

$$۵ - = ۴۵ \times ۴۲ - ۶۵ \times ۲۹$$

اس کو اصلی مساوات کے ساتھ ملانے سے

$$(۴۵ + ۶) ۴۲ = (۶۵ + ۹) ۲۹$$

$$\therefore \frac{۴۵ + ۶}{۲۹} = \frac{۶۵ + ۹}{۴۲} = \text{د ایک صحیح عدد}$$

پس عام حل ہوا

$$لا = ۴۲ - ۶۵، ما = ۲۹ - ۶۵$$

۳۴۸۔ اگر مساوات ا لا۔ ب ما = ج کا ایک حل مثبت صحیح
اعداد میں دیا ہوا ہو تو عام حل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ہ، ک مساوات ا لا۔ ب ما = ج کا ایک حل
ہے، تب ا ہ۔ ب ک = ج

$$\therefore ا لا۔ ب ما = ا ہ۔ ب ک$$

$$\therefore ا (لا۔ ہ) = ب (ما۔ ک)$$

$$\therefore \frac{لا۔ ہ}{ب} = \frac{ما۔ ک}{ا} = \text{د، کوئی صحیح عدد}$$

لہذا لا = ہ + ب د، ما = ک + ا د جو عام حل ہے۔

۳۴۹۔ مساوات ا لا + ب ما = ج کا عام حل مثبت صحیح

اعداد میں معلوم کرو۔

ب کو مسلسل کسر میں تحول کرو اور فرض کرو کہ $\frac{1}{b}$ کے

عین پہلے کا مستحق $\frac{1}{b}$ ہے، تب

۱۔ $\frac{1}{b} - \frac{1}{b} = 0$ اگر ۱۔ $\frac{1}{b} - \frac{1}{b} = 0$ تو

$\frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b}$ ج (۱۔ $\frac{1}{b}$ - $\frac{1}{b}$)

$\frac{1}{b} - \frac{1}{b} = 0$ ج (۱۔ $\frac{1}{b}$ - $\frac{1}{b}$)

$\frac{1}{b} - \frac{1}{b} = 0$ ج (۱۔ $\frac{1}{b}$ - $\frac{1}{b}$)

$\frac{1}{b} - \frac{1}{b} = 0$ ج (۱۔ $\frac{1}{b}$ - $\frac{1}{b}$)

جس سے د کو $\frac{1}{b}$ سے بڑی اور $\frac{1}{b}$ سے چھوٹی مثبت

صحیح عددی قیمتیں دینے سے مطلوبہ مثبت صحیح عددی حل حاصل ہو سکتے ہیں۔

پس اس صورت میں مطلوبہ حلوں کی تعداد محدود ہوگی اور اگر کوئی صحیح عدد ایسا نہ ہو جو ان شرائط کو پورا کرے تو کوئی حل نہ ہوگا۔

۲۔ اگر ۱۔ $\frac{1}{b} - \frac{1}{b} = 0$ تو

$\frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b}$ ج (۱۔ $\frac{1}{b}$ - $\frac{1}{b}$)

$\frac{1}{b} - \frac{1}{b} = 0$ ج (۱۔ $\frac{1}{b}$ - $\frac{1}{b}$)

$\frac{1}{b} - \frac{1}{b} = 0$ ج (۱۔ $\frac{1}{b}$ - $\frac{1}{b}$)

جس سے د کو ایسی مثبت صحیح عددی قیمتیں دینے سے

جو $\frac{ج}{ب}$ سے بڑی اور $\frac{ج}{ب}$ سے چھوٹی ہوں مطلوبہ حاصل
صحیح عددوں میں حاصل ہو سکتے ہیں۔ حسب سابق متلوں کی
کی تعداد اس صورت میں بھی محدود ہے اور ممکن ہے کہ کوئی
بھی حل نہ ہو۔

۳۔ اگر $ا + ب = ایک$ کے مساوی ہو تو دفعہ ۴، ۳ کی طرح
حل محض دیکھنے سے معلوم ہو سکتے ہیں۔

۳۵۰۔ اگر مساوات $ا + لا + ب = ما = ج$ کا ایک حل مثبت
صحیح اعداد میں معلوم ہو تو عام حل معلوم کرو۔
فرض کرو کہ $ا + لا + ب = ما = ج$ کا ایک حل $ص = ک$ ہے،
تب $ا + ص + ب = ک = ج$

$$: لا + ب = ما = ا + ص + ب = ک$$

$$: (ا - لا) = ص = ب = (ک - ما)$$

$$: لا = ص = \frac{ک - ما}{ا} = د \quad (\text{صحیح عدد})$$

$$: لا = ص + ب = د + ب = ک - ا$$

جو مطلوبہ عام حل ہے۔

۳۵۱۔ معلوم کرو کہ مساوات $ا + لا + ب = ما = ج$ کے مثبت
صحیح عددوں میں کتنے حل ہیں۔

$\frac{ا}{ب}$ کو مسلسل کسر میں تحویل کرو اور فرض کرو کہ $\frac{ا}{ب}$ کے

عین پہلے کا مستحق $\frac{ق}{ل}$ ہے، تب $ا + ل = ب + ق = ۱ \pm$

(۱) فرض کرو کہ $ا + ل = ب + ق = ۱$ ، تب عام حل ہوگا

لا = ج ل - ب د = ا = د - ج ق [اضرب ۲۴۹
 ان مساواتوں میں ذ کو ایسی مثبت صحیح عددی قیمتیں
 سے جو $\frac{ج ل}{ب}$ سے بڑی نہ ہوں اور $\frac{ج ق}{د}$ سے چھو
 مطلوبہ مثبت صحیح عددی حل حاصل ہو سکتے ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ $\frac{ج ق}{د}$ اور $\frac{ج ل}{ب}$ صحیح اعداد نہیں۔

فرض کرو کہ $\frac{ج ق}{د} = م + ن$ ، $\frac{ج ل}{ب} = گ + م$
 م اور ن مثبت صحیح اعداد ہیں اور ف اور گ کسور
 ہیں، تب د کی جو کم سے کم قیمت ہو سکتی ہے وہ م
 اور بڑی سے بڑی قیمت ن ہے
 لہذا حلوں کی تعداد ہے

$$ن - م = \frac{ج ل}{ب} - \frac{ج ق}{د} + ف - گ$$

$$= \frac{ج ل}{ب} + ف - گ$$

اب یہ ایک صحیح عدد ہے جو اس صورت میں جب ف
 گ سے $\frac{ج ل}{ب}$ + ایک کسر کی شکل میں اور جب
 ہو گ سے تو $\frac{ج ل}{ب}$ - ایک کسر کی شکل میں لکھا
 ہے، باغاف دیگر حلوں کی تعداد اس صحیح عدد سے تعبیر
 جو $\frac{ج ل}{ب}$ کے قریب ترین ہو اور جو اس سے بڑا ہو

ف < گ اور چھوٹا ہو اور > گ

۲۔ فرض کرو کہ $\frac{ج}{ب}$ کوئی صحیح عدد ہے

اس صورت میں گ =۔ اور لا کی ایک قیمت صفر ہے،

اگر ہم اس کو شامل کر لیں تو حلوں کی تعداد $\frac{ج}{ب} + ن$ ہے

جو لازماً ایک صحیح عدد ہو گا۔ پس اگر ہم صفروائے حل کو شمار میں لائیں تو حلوں کی تعداد اس بڑے سے بڑے صحیح عدد سے

تعبیر ہوگی جو $\frac{ج}{ب} + ۱$ میں شامل ہے اور اگر صفروائے

حل کو شمار میں نہ لائیں تو اس بڑے سے بڑے صحیح عدد سے

تعبیر ہوگی جو $\frac{ج}{ب}$ میں شامل ہے۔

۳۔ فرض کرو کہ $\frac{ج}{ب}$ ایک صحیح عدد ہے

اس صورت میں ن =۔ اور ما کی ایک قیمت صفر ہے، اگر ہم اس کو شامل کر لیں تو د کی کم سے کم قیمت م اور بڑی سے بڑی قیمت ن ہے، پس حلوں کی تعداد ن - م + ۱ یا

$\frac{ج}{ب} - گ + ۱$ ہے، لہذا اگر ہم صفروائے حل کو شمار کریں تو حلوں

کی تعداد اس بڑے سے بڑے صحیح عدد سے تعبیر ہوگی

جو $\frac{ج}{ب} + ۱$ میں شامل ہے اور اگر ہم صفروائے حل کو

شمار میں نہ لائیں تو اس بڑے سے بڑے صحیح عدد سے

تعبیر ہوگی جو $\frac{ج}{ب}$ میں شامل ہے۔

۴۔ فرض کرو کہ $\frac{ج}{ب}$ اور $\frac{ج}{ب}$ دونوں صحیح اعداد ہیں۔

اس صورت میں ف = اور گ = اور لا اور ما دونوں ایک ایک قیمت صفر ہے۔ اگر ہم ان کو شمار میں لائیں

کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت م ہو سکتی ہے اور بڑی سے

ن، پس حلوں کی تعداد ن - م + ۱ یا $\frac{ج}{ب} + ۱$ ہے،

ہم صفروالی قیمتوں کو شمار نہ کریں تو حلوں کی تعداد $\frac{ج}{ب}$

ہے۔ اگر ل - ب ق = ۱، تو عام حل ہے

لا = ب د - ج ل، ما = ج ق - ل د

اور حماش نتیجے مستنبط ہو سکتے ہیں

۳۵۲۔ مساوات لا + ب ما + ج می = ر کے حل صحیح اعداد میں معلوم کرنے کے لئے یوں عمل کرنا چاہئے

عمل نقل سے لا + ب ما = ر - ج می، اس میں م

بالتواتر قیمتیں ۱، ۲، ۳، ... دینے سے ہیں لا + ب

کی شکل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جن کو حسب سابق

کیا جاسکتا ہے۔

۳۵۳۔ اگر ہمارے پاس دو ہمزاد مساواتیں

لا + ب ما + ج می = ر

لا + ب ما + ج می = ر

ہوں تو ایک مجہول مثلاً می کو ساقط کرنے سے ہمیں

لا + ب ما = ج کی شکل کی ایک مساوات حاصل ہو

فرض کرو کہ اس مساوات کا ایک حل $لا = فن$ اور $ما = گ$ ہے،
تب عام حل کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے
 $لا = فن + بپس، ما = گ - ا$ اس جہاں $س$
کوئی صحیح عدد ہے۔

لا اور ما کی یہ قیمتیں اوپر کی مساواتوں میں سے کسی ایک
میں مندرج کرنے سے ہمیں $فن + س + گ = ی = م$ کی
شکل کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے، فرض کرو کہ اس کا
عام حل یہ ہے

$$س = م + گ - د$$

$$ی = ک - فن - د$$

س کی قیمت مندرج کرنے سے

$$لا = فن + بپس + م + گ - د$$

$$ما = گ - ا - م - د - گ - د$$

لا، ما، ی کی قیمتیں، د کو مناسب صحیح عددی قیمتیں دینے
سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

۳۵۴-۱ اگر معلومات

لا + ب + ما + ج = ی = ر اور لا + ب + ما + ج = ی = ر
کا ایک حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم ہو سکے تو عام حل
معلوم کرنے کے لئے یوں عمل کرنا چاہئے۔
فرض کرو کہ $فن، گ، م$ ایک حل ہے، تب

$$رف + ب + گ + ج = م = ر اور رف + ب + گ + ج = م = ر$$

تفریق کرنے سے

$$ر(لا - فن) + ب(ما - گ) + ج(ی - م) = ۰$$

$$ا (لا - ف) + ب (ما - گ) + ج (ی - ہ) = .$$

$$ان سے \frac{لا - ف}{ب - ج} = \frac{ما - گ}{ج - ا} = \frac{ی - ہ}{ا - ب} = \frac{د}{س}$$

جہاں د ایک صحیح عدد ہے اور ک نسب نماؤں ب ج - ج ب ا ج ا - ج ا اور ا ب - ا ب کے عدا اعظم کو تعبیر کرتا ہے، پس عام حل یہ ہے

$$لا = ف + (ب - ج) \frac{د}{س}، ما = گ + (ج - ا) \frac{د}{س}$$

$$ی = ہ + (ا - ب) \frac{د}{س}$$

امثلہ نمبری ۲۶

ذیل کی مساواتوں کا عام حل اور چھوٹے سے چھوٹا مثبت حل صحیح اعداد میں معلوم کرو۔

$$۱ - ۴۴۵ لا - ۶۷۱ ا = ۲ - ۴۵۵ لا - ۵۱۹ ا = ۱$$

$$۳ - ۴۳۶ لا - ۶۳۹ ا = ۵$$

۴ - ۱ پونڈ ۱۹ شنگ ۶ پنس کتنے طریقوں سے فلورنوں اور نصف کراؤنوں میں ادا کئے جاسکتے ہیں۔

۵ - معلوم کرو کہ مساوات ۱۱ لا + ۱۵ ا = ۱۰۳۱ کے حل مثبت صحیح اعداد میں کتنے ہیں۔

۶ - دو کسیریں معلوم کرو جن کے نسب نا بالترتیب ۷ اور ۹

ہوں اور چیکا مجموعہ $\frac{۱۰}{۶۳}$ کے مساوی ہو۔

واقع ہوں گے۔

۲۰۔ تین گھنٹے ایک ساتھ بچنا شروع ہوتے ہیں اور بالترتیب ۳۴، ۳۹، ۴۴ سکندوں کے وقفوں سے بچتے ہیں، دوسرا اور تیسرا گھنٹہ پہلے گھنٹہ کی نسبت بالترتیب ۳۹ اور ۴۴ سکند زیادہ بچتے ہیں اگر شب ۲۰ منٹ سے پہلے بچنا بند ہو جائیں تو بتاؤ کہ ہر ایک گھنٹہ کتنی دفعہ بچا ہے۔

۲۱۔ ج کی ایسی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو کہ مساوات $۹۹ + ۹ = ج$ کے مثبت صحیح اعداد میں پورے چھ حل ہوں۔
۲۲۔ ج کی ایسی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو کہ مساوات $۱۴ + ۱۱ = ج$ کے مثبت صحیح اعداد میں پورے پانچ حل ہوں۔
۲۳۔ وہ حدود معلوم کرو جن کے اندر ج کو واقع ہونا چاہئے تاکہ مساوات $۱۹ + ۱۴ = ج$ کے چھ حل ہوں جبکہ صفروں کے حل شمار میں نہ لائے جائیں۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ اگر مساوات $۱۹ + ۱۴ = ج$ کے مثبت صحیح اعداد میں پورے ن حل ہوں تو ج کی بڑی سے بڑی قیمت $(ن + ۱) ۱۹ + ۱۴$ ہے اور چھوٹی سے چھوٹی $(ن - ۱) ۱۹ + ۱۴$ جبکہ صفروں کے حلوں کو شمار میں نہ لایا جائے۔

————— (+) —————

متاویات

متوالی مسلسل کسو

۳۵۵۔ پچیسویں باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک مسلسل کسر کو جس کے خارج قسمت ناطق ہوں ایک ایسی معمولی کسر میں تحویل کیا جاسکتا ہے جس کا شمار کنندہ اور قسب نما دونوں صحیح عدد ہوں، اس لحاظ سے یہ کسر غیر ناطق یا اصم مقدار کے مساوی نہیں ہو سکتی۔ لیکن بیان ہم ثابت کرینگے کہ درجہ دوم کی مقدار اصم ایک ایسی لاقتناہی مسلسل کسر میں تحویل ہو سکتی ہے جس کے خارج قسمت متوالی ہوں، پہلے ہم ایک عددی مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال ۱۹۷۔ کو مسلسل کسر کی شکل میں لاؤ اور ان کسروں کا ایک ایسا سلسلہ معلوم کرو جو اس کی قیمت کی طرف استقلق کرے۔

$$\frac{3}{2+197} + 2 = (2-197) + 2 = 197$$

$$\frac{5}{2+197} + 2 = \frac{2-197}{3} + 2 = \frac{4+197}{3}$$

$$\frac{2}{3+197} + 1 = \frac{3-197}{5} + 1 = \frac{2+197}{5}$$

$$\frac{5}{2+19\sqrt{2}} + 3 = \frac{3-19\sqrt{2}}{2} + 3 = \frac{3+19\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{3}{2+19\sqrt{2}} + 1 = \frac{2-19\sqrt{2}}{5} + 1 = \frac{3+19\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{1}{2+19\sqrt{2}} + 2 = \frac{2-19\sqrt{2}}{3} + 2 = \frac{2+19\sqrt{2}}{3}$$

$$\dots\dots\dots + 8 = (2-19\sqrt{2}) + 8 = 2+19\sqrt{2}$$

اس کے بعد خارج قسمت ۲، ۱، ۳، ۱، ۲، ۸ شوالی ہونا شروع ہوتے ہیں، اس لئے

$$\dots\dots\dots \frac{1}{2+19\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + 2 = 19\sqrt{2}$$

یہاں یہ بات قابل غور ہے کہ جب ہم اس خارج قسمت پر پہنچ جاتے ہیں جو پہلے خارج قسمت سے دگنا ہو تو خارج قسمت شوالی ہونا شروع ہوتے ہیں۔ دفعہ ۳۶۱ میں ہم ثابت کر چکے کہ ہر صورت میں یہی واقع ہوتا ہے۔

[تشریح - اوپر کی ہر ایک سطر میں ہم نے ایک ہی طرح کا

عمل کیا۔ مثلاً دوسری سطر پر غور کرو۔ ہم پہلے $\frac{2+19\sqrt{2}}{3}$ کا بڑے

سے بڑا صحیح عدد معلوم کرتے ہیں یہ عدد ۲ ہے اور باقی $\frac{2+19\sqrt{2}}{3} - 2$

یعنی $\frac{2-19\sqrt{2}}{3}$ ہے، اس کے بعد ہم شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو

$2-19\sqrt{2}$ کے مزدوج سے ضرب دیتے ہیں پھر حاصل یعنی $\frac{5}{2+19\sqrt{2}}$

کو انکار ہم منطق نسب نما سے نئی سطر شروع کرتے ہیں]

سات مستحق جو دفعہ ۳۲۶ کے مطابق بنائے گئے ہیں یہ ہیں

$$\frac{۴}{۱} \quad \frac{۹}{۲} \quad \frac{۱۳}{۳} \quad \frac{۱۸}{۱۱} \quad \frac{۶۱}{۱۳} \quad \frac{۱۷۰}{۳۹} \quad \frac{۱۴۲۱}{۳۲۶}$$

سات مستحق کو کسر کی بجائے لینے سے غلطی $(\frac{۱}{۳۲۶})$ سے کم ہے

$(\frac{۱}{۳۲۶})$ سے یا $\frac{۱}{۱۰۲۳}$ سے کم ہے اور بناءً علیہ

۱۔ سے کم ہے گویا ساتویں مستحق سے اعشاریہ کے کم از

۳۔ ہر دوری کسر تسلسل کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

۳۔ ہر دوری کسر تسلسل کی قیمت ایک ایسی مساوی درجہ دوم

۱۔ اصل کے مساوی ہوتی ہے جس کے سرناطقی ہوں

۱۔ مل کسر کو لا سے اور دوری حصہ کو ما سے تعبیر کرو اور

$$لا = ۱ + \frac{۱}{ب} + \frac{۱}{ج} + \dots + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۱}$$

$$ما = ۲ + \frac{۱}{ن} + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۱} + \dots + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۱}$$

۱۔ ب، ج، د، ک، م، ن، ... ۱۰ و قیمت صحیح اعداد ہیں

۱۔ کہ $\frac{ق}{ل}$ ، $\frac{قی}{لی}$ بالترتیب خارج قسموں د، ک کے مناظر

مستحق ہیں تب چونکہ ماکمل خارج قسمت ہے اس لئے

$$\frac{قی + ما}{لی + ۱} = \frac{ق - لا}{لی - ۱}$$

۱۔ کہ $\frac{س}{ل}$ ، $\frac{سی}{لی}$ بالترتیب خارج قسموں ۱، د کے جوا

میں ماسکے مستحق ہیں، تب ما = $\frac{ل + م + ن}{ل + م + ن}$
 ماسکے قیمت لا کی رقم میں مندرج گئے اور مختصر کر کے ہیں
 درجہ دوم کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جس کے سرنامق ہیں۔
 ماسکے قیمت جس مساوات سے حاصل ہوتی ہے وہ
 $\frac{ل + م + ن}{ل + م + ن}$ (س۔ ل۔ م۔ ل۔ پ۔ ہے، اس کی اصلیں حقیقی اور مختلف ہیں
 اگر ماسکے قیمت لا = $\frac{ق + م + ق}{ل + م + ل}$ میں درج کی جائے
 اور نسب نما کو ماطق بنایا جائے تو لا کی جو قیمت حاصل ہوگی
 اس کی شکل $\frac{ل + م + ن}{ل + م + ن}$ ہوگی جہاں ل، م، ن، ج، صبح
 اعداد ہیں اور ب، گ، ثبوت ہے کیونکہ ماسکے قیمت حقیقی ہے۔
 مثال۔۔۔ سلسلہ $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \dots$ کو مقدار اضم کی شکل میں لاؤ
 فرض کرو کہ کسر مسلسل کی قیمت لا ہے، تب
 لا = $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \dots$ جس سے $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \dots = ۱$
 مسلسل کسر کی قیمت اس مساوات کی مثبت اصل کے مساوی
 ہے اور اس لئے $\frac{۱ - ۱۵۶}{۲}$ کے مساوی ہے۔

امثلہ نمبری ۲۷ (ل)

ذیل کی مقادیر اضم کو مسلسل کسر کی شکل میں لاؤ اور ہر ایک
 کسر کا ۶ واں مستحق معلوم کرو۔

۱۔ $\frac{۳۶}{۱۰۰}$ ۲۔ $\frac{۵۶}{۱۰۰}$ ۳۔ $\frac{۶۶}{۱۰۰}$ ۴۔ $\frac{۸۶}{۱۰۰}$ ۵۔ $\frac{۱۱۶}{۱۰۰}$ ۶۔ $\frac{۱۳۶}{۱۰۰}$

جہاں $\frac{1}{2}$ = بے لہ - $\frac{1}{2}$ اور لہ لہ = ٹ - $\frac{1}{2}$
 مٹی ہا قیاس عام طور پر

$$\frac{a_n}{a_n + b_n} + \frac{b_n}{b_n + a_n} = \frac{a_n - b_n}{a_n - b_n} + \frac{b_n - a_n}{b_n - a_n} = \frac{a_n + b_n}{a_n + b_n} = 1$$

کم ہو گا لہذا سے پس 1 بڑا نہیں ہو سکتا 1 سے، لہذا یہ سوائے
 1 ، 2 ، 3 ، ... کے اور کوئی قیمت اختیار نہیں کر سکتا یعنی 1
 جو مختلف قیمتیں اختیار کر سکتا ہے ان کی تعداد کبھی 1 سے بڑی
 نہیں ہو سکتی۔

نیز 1 = 1 ب - 1 یعنی 1 ب = 1 + 1 ، پس
 1 ب 2 سے بڑا نہیں ہو سکتا، نیز 1 ب ایک مثبت صحیح عدد ہے
 اس لئے 1 ب کبھی 2 سے بڑا نہیں ہو سکتا لہذا 1 ب سوائے 1 ، 2 ،
 3 ، ... کے اور کوئی قیمت اختیار نہیں کر سکتا یعنی 1 ب جو مختلف قیمتیں
 اختیار کر سکتا ہے ان کی تعداد کبھی 2 سے بڑی نہیں ہو سکتی۔
 پس مکمل خارج قسمت 1 ب + 1 کی مختلف قیمتوں کی تعداد
 کبھی 2 سے بڑی نہیں ہو سکتی، اس لئے ضرور ہے کہ کوئی
 ایک مکمل خارج قسمت اور بناویں اس کے بعد کے تمام خارج
 قسمت عود کریں یعنی متوالی ہوں۔

نیز 1 ب، 1 ب + 1 میں کا بڑے سے بڑا صحیح عدد ہے،
 پس جزوی خارج قسمت بھی ضرور متوالی ہوں گے۔ اور ہر دور
 میں جزوی خارج قسمتوں کو تعداد 2 سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔
 ۳۶۰۔ ثابت کرو کہ 1 ب + 1 1 ب سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔

ہم جانتے ہیں کہ 1 ب + 1 = 1 ب + 1 ۔

۱۔ 1 ب + 1 = 1 ب + 1 یا 1 ب + 1 ۔

چونکہ 1 ب، ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۱: $\text{اٹ} + \text{اٹ} < \text{اٹ}$ ۔

لیکن $\text{اٹ} - \text{اٹ} = \text{اٹ}$ ۔

۲: $\text{اٹ} - \text{اٹ} > \text{اٹ}$ ۔

۳: $\text{اٹ} - \text{اٹ} > \text{اٹ}$ ، پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۳۶۱۔ ثابت کرو کہ دور دوسرے جزوی خارج قسمت سے شروع ہوتا ہے اور پہلے جزوی خارج قسمت سے دگنے خارج

قسمت پر ختم ہوتا ہے۔ ہم دفعہ ۳۵۹ میں دیکھ چکے ہیں کہ خارج قسمتوں کا متوالی

ہونا لازمی ہے، اس لئے ہم فرض کرتے ہیں کہ $(ن + ۱)$ واں

کامل خارج قسمت $(س + ۱)$ ویں کامل خارج قسمت پر محو

کر کے آتا ہے یعنی $(ن + ۱)$ واں اور $(س + ۱)$ واں کامل

خارج قسمت باہم مساوی ہیں، تب

$$\text{اٹ} = \text{اٹ}، \text{اٹ} = \text{اٹ}، \text{اٹ} = \text{اٹ}$$

ہم ثابت کر چکے کہ

$$\text{اٹ} = \text{اٹ}، \text{اٹ} = \text{اٹ}، \text{اٹ} = \text{اٹ}$$

ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{اٹ} = \text{اٹ}، \text{اٹ} = \text{اٹ}، \text{اٹ} = \text{اٹ}$$

$$\text{اٹ} = \text{اٹ}$$

$$\text{اٹ} + \text{اٹ} = \text{اٹ}، \text{اٹ} + \text{اٹ} = \text{اٹ}$$

اب ہاتھ = $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$
 گویا $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$ کے متناظر جزوی خارج قسمت ۲ ہے اسلئے

$$\frac{2}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

اس منزل پر پورا خارج قسمت ذیل کے دور پر مشتمل ہے

$$2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

اور اس لئے $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$ ہند

$$2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

کسروں سے پاک کرنے اور ناطق اور غیر ناطق حصوں کو جداگانہ مساوی کرنے سے

$$2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

$$\frac{2}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

$$2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

یہ جو $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$ کے مساوی ہے $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$ کی قیمت

ماصل ہو سکتی ہے۔

$$\frac{(1 + \frac{Q_n}{L_n})(\frac{Q_{n-1}}{L_{n-1}} + 1)}{\frac{Q_n}{L_n} + (\frac{Q_{n-1}}{L_{n-1}} + 1)} = \frac{Q_{n-1}}{L_{n-1}}$$

$$\frac{Q_{n-1}}{L_{n-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_n}{L_n} + \frac{Q_{n-1}}{L_{n-1}} \right) \dots \dots (2)$$

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ج ویں متوالی دور
میں قبل الآخر مستحق $\frac{Q_{j-1}}{L_{j-1}}$ ہو تو

$$1 \frac{Q_j}{L_j} + 1 \frac{Q_{j-1}}{L_{j-1}} = 1 \frac{Q_{j-1}}{L_{j-1}} + 1 \frac{Q_{j-2}}{L_{j-2}}$$

اور ان مساواتوں کو استعمال کرنے سے ہمیں $\frac{Q_{j-1}}{L_{j-1}}$ ، $\frac{Q_{j-2}}{L_{j-2}}$ ،

کی قیمتیں یکے بعد دیگرے معلوم ہو سکتی ہیں۔

طالب علم دیکھ لے کہ مساوات (۲) ن کے تمام اضعاف
کے لئے درست رہتی ہے، مثلاً

$$\frac{Q_{j-1}}{L_{j-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_j}{L_j} + \frac{Q_{j-1}}{L_{j-1}} \right)$$

ثبوت دیا ہی ہے جو پہلے دیا جا چکا ہے۔

۳۶۵۔ دفعہ ۳۵۶ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک دوری سلسلہ
کسر مطلق سروں والی مساوات درجہ دوم کی اصل سے تعبیر ہو سکتی
ہے۔ برعکس اس کے دفعہ ۳۵ کے طریقہ سے ہم یہ ثابت

کر سکتے ہیں کہ $\frac{1}{1+ab}$ کی شکل کے کسی جملہ کو جس میں a و b ج
مثبت صحیح اعداد ہیں اور b پورا مربع نہیں ہے ایک بتوالی
مسلسل کسور میں تحویل کیا جاسکتا ہے، اس صورت میں دوری
حصہ بالعموم دوسرے جزوی خارج قسمت سے شروع نہیں ہوگا،
نہ ہی آخری جزوی خارج قسمت پہلے سے دگنا ہوگا۔
بتوالی مسلسل کسور کے مضمون کے متعلق مزید معلومات حاصل
کرنے کے لئے طالب علم کو چاہئے کہ سیرٹ کے اعلیٰ الجبرا
کے کورس کا مطالعہ کرے یا طاسس مائیکروسحاب ایم۔ اے
ایف۔ آر۔ ایس کی کتاب ”درجہ دوم کی مقدار اصم کی تعبیر
مسلسل کسروں میں“ ملاحظہ کرے۔

امثلہ نمبری ۲۷ (ب)

ذیل کی مقادیر اصم کو مسلسل کسور کی شکل میں بیان کرو
اور ہر ایک کا چوتھا مستق معلوم کرو

$$1 - \sqrt{1+a} \quad 2 - \sqrt{1+a} \quad 3 - \sqrt{1+a}$$

$$4 - \sqrt{1+a} \quad 5 - \sqrt{1+a} \quad 6 - \sqrt{1+a}$$

۷۔ ثابت کرو کہ $\sqrt{1+a} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$
اور پانچواں مستق معلوم کرو۔
۸۔ ثابت کرو کہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

۹۔ ثابت کرو کہ

$$ق(۱) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

۱۰۔ اگر $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ کو مسلسل کسر کی شکل میں لایا جائے تو ثابت کرو کہ

$$۲(۱ + \frac{1}{2}) = ۱ + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$۲(۱ + \frac{1}{2}) = ۱ + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$۱۱۔ اگر لا = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$ما = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$می = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

نو ثابت کرو کہ لا (ما - می) + ما (می - لا) + می (لا - ما) = ۰

۱۲۔ ثابت کرو کہ

$$(۱ + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

$$۱۳۔ اگر لا = ۱ + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$ما = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

$$ل_۱ = ۲ ق_۱ ل_۱$$

$$ق_۱ = ۲ ق_۱ + (-۱)^{۱+۱}$$

۱۱۔ اگر ہاتھ کو سلسل کسر میں تھوپل کیا جائے اور اگر پہلے، دوسرے، تیسرے... ک دیں متوالی دور میں ماقبل الآخر، صدقوں کو بالترتیب $ن_۱$ ، $ن_۲$ ، $ن_۳$ ، $ن_۱$ سے تعبیر کیا جائے و ثابت کرو کہ

$$\frac{ن_۱ + ل_۱}{ن_۱ - ل_۱} = \frac{ن_۲ + ل_۲}{ن_۲ - ل_۲}$$



اٹھائیسواں باب

درجہ دوم کی غیر معین مساواتیں

۳۶۶۔ جن غیر معین مساواتوں کا درجہ ایک سے زیادہ ہو ان کا حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرنا اگرچہ علی طور پر زیادہ سہو و مستند نہیں لیکن اس کا جو تعلق اعداد کے نظریہ کے ساتھ ہے اس کی وجہ سے دلچسپ ضرور ہے۔ اس باب میں ہم صرف دو متغیروں کی معادلات درجہ دوم پر بحث کریں گے۔

۳۶۷۔ لا اور ما کی ایسی قیمتیں مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرو جو مساوات

لا + ۲ھ + ۲ب + ۲ا + ۲گ + ۲ف + ۲ج = ۰
کو پورا کریں جہاں لا، ب، ج، ف، گ، ھ صحیح اعداد ہیں۔
اس مساوات کو لا میں درجہ دوم کی ایک مساوات فرض کر کے اسکو دفعہ ۱۲ کے مطابق حل کرنے سے

$$لا + ۲ھ + ۲ب + ۲ا + ۲گ + ۲ف + ۲ج = ۰ \quad (۱)$$

اب اگر لا اور ما کی قیمتیں مثبت صحیح اعداد ہوں تو ضرور ہے کہ علامت جذر کے اندر کا جملہ جوق ما + ۲ل + ۲ا سے تعبیر ہو سکتا ہے پورا مربع ہو یعنی فرض کرو کہ

ق + ما + ل + ر = ی
 ن کو ما میں مساوات درجہ دوم سمجھ کر حل کرنے سے

$$ق + ما + ل = ی - ق + ر = ی$$

ب سابق علامت جذر کے اندر کا جملہ پورا مریج ہونا چاہئے۔
 ن کر کے یہ نتائج کے مساوی ہے، تب

$$ق + ی = ل - ق + ر$$

ماں ت اور ی متغیر ہیں اور ق، ل، ر مستقل ہیں۔
 ابتدائی مساوات کو مثبت صحیح اعداد میں حل کرنا اسی صورت
 ممکن ہو سکتا ہے جبکہ مندرجہ بالا مساوات کا مثبت صحیح
 اعداد میں حل کرنا ممکن ہو۔ اس بحث کی طرف ہم دفعہ ۳۷۴
 کا رجوع کر چکے۔

اگر وہاں سب مثبت ہوں تو یہ ظاہر ہے کہ حلوں
 تعداد محدود ہوگی کیونکہ لا اور ما کی بڑی قیمتوں کے لئے
 انہیں جانب کے رکن کی علامت لا + ما + ل + ر = ی
 علامت پر موقوف ہوگی (دیکھو دفعہ ۲۶۹) اور اس لئے لا
 ر ما کی بڑی قیمتوں کے لئے جو مثبت صحیح اعداد ہوں یہ صفر
 کے مساوی نہیں ہو سکتی۔

نیز اگر وہاں لا + ر منفی ہو تو (۱) میں ما کا سرمنفی ہوگا۔
 یہ اسی قسم کے استدلال سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ حلوں کی تعداد
 محدود ہوگی۔

مثبت صحیح اعداد میں مساوات

$$لا - ۴ لا + ما + ۶ ما - ۲ لا - ۶۲۰ = ۲۹$$

کے حل معلوم کرو۔

اس کو لا میں درجہ دوم کی ایک مساوات سمجھ کر حل کرنے سے

$$لا = ۱ + ۲ + ۳ + ۲۴ - ۲ - ۲$$

لیکن $۳۰ = ۲۴ + ۲ - ۲ = ۲ - ۱۰۲ = ۲ - (۶ - ۲)$ پس
 $(۶ - ۲)$ سے بڑا نہیں ہو سکتا۔ جانچ کرنے سے ہم دیکھ
 سکتے ہیں کہ علامت جذر کے اندر کی رقم پورا فرم ہوگی جبکہ
 $(۶ - ۲) = ۱$ یا ۴۹ ، لہذا $ما$ کی مثبت صحیح عددی قیمتیں
 ۵، ۱۳ ہیں۔

$$\text{جب } ما = ۵، لا = ۲۱ \text{ یا } ۱$$

$$\text{جب } ما = ۱۳، لا = ۲۵ \text{ یا } ۵$$

$$\text{جب } ما = ۲۵، لا = ۲۹ \text{ یا } ۲۵$$

۳۶۸ - ہم اوپر دیکھ چکے ہیں کہ مثبت صحیح اعداد میں مساوات

$$لا + ۲ = ۲ + ما + ب + ۲ + گ + لا + ۲ + ج =$$

کے حلوں کو ایک ایسی مساوات کے حلوں پر موقوف کر سکتے ہیں
 جس کی شکل

$$لا + ۲ + ۲ = ۲ + ۲$$

ہو جہاں ۲ اور ۲ مثبت صحیح اعداد ہیں۔

مساوات $لا + ۲ + ۲ = ۲ + ۲$ کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے۔

مساوات $لا + ۲ + ۲ = ۲ + ۲$ کے حلوں کی تعداد محدود ہے

جو آناش سے معلوم ہو سکتے ہیں، اس لئے ہم صرف ان مساواتیں

پر بحث کریں گے جنکی شکل $لا + ۲ + ۲ = ۲ + ۲$ ہو۔

۳۶۹ - ثابت کرو کہ مساوات $لا + ۲ + ۲ = ۲ + ۲$ کو ہمیشہ مثبت

صحیح عددوں میں حل کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ $ما$ کو ایک مسلسل کسر کی شکل میں تحول کیا

گیا ہے اور $\frac{ق}{ل}$ ، $\frac{ق}{ل}$ ، $\frac{ق}{ل}$ کوئی سے تین مسلسل مستحق ہیں۔

نیز فرض کرو کہ مستحق $\frac{ق}{ل}$ کے جواب میں مکمل خارج قسمت $\frac{ا}{ل}$ + $\frac{ا}{ل}$ ہے، تب

لے (ق ا - ق ل) = ث ل - ق ا [صفحہ ۳۵۸]

لیکن ہر ایک دور کے آخر میں لے = ا [دیکھو صفحہ ۳۶۱]

ق ا - ث ل = ق ل - ق ل

جہاں $\frac{ق}{ل}$ کسی متوالی دور کا ماقبل الاخر مستحق ہے۔

اگر دور میں خارج قسموں کی تعداد جفت ہو تو $\frac{ق}{ل}$ جفت

مستحق ہے اور اسلئے $\frac{ا}{ل}$ سے بڑا ہے اور بنا بریں $\frac{ق}{ل}$ سے

بھی بڑا ہے۔ پس ق ل - ق ل = ا، اس صورت میں

ق ا - ث ل = ا، لہذا لا = ق ا اور ما = ل مساوات

لا - ث ما = ا کا حل ہے۔

چونکہ $\frac{ق}{ل}$ ہر ایک متوالی دور کا ماقبل الاخر مستحق ہے،

اس لئے حلوں کی تعداد محدود ہے۔

اگر دور میں خارج قسموں کی تعداد طاق ہو تو پہلے دور کا ماقبل الاخر مستحق طاق واں مستحق ہوگا لیکن دوسرے

دور کا مابل الآخر مستحق جنت و اس مستحق ہے پس لا = ق،
 ما = ل رکھنے سے صحیح عددی حل حاصل ہوں گے جہاں
 ق = دوسرے جوتے، چھٹے متوالی دور کا مابل الآخر
 مستحق ہے۔

لہذا اس صورت میں بھی حلوں کی تعداد غیر محدود ہے۔
 ۳۷۰۔ مثبت صحیح اعداد میں مساوات لا = ث ما = ا کا
 حل معلوم کرو۔
 دغہ مابل کی طرح

$$ق = ث ل = ق ل = ق ل$$

اگر دور میں خارج قسموں کی تعداد طاق ہو اور $\frac{ق}{ل}$ کسی
 متوالی دور کا طاق و اس مابل الآخر مستحق ہو تو $\frac{ق}{ل} > \frac{ق}{ل}$ ،
 اس لئے ق ل = ق ل = ا اس صورت میں ق = ث ل = ا
 اور مساوات لا = ث ما = ا کے صحیح عددی حل لا = ق، ما = ل
 رکھنے سے حاصل ہو سکتے ہیں جہاں $\frac{ق}{ل}$ پہلے، تیسرے،
 پانچویں، متوالی دور کا مابل الآخر مستحق ہے۔
 مثال۔ لا = ۱۳ ما = ۱۱ کے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرو
 ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$۱۳ = ۱۱ + \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۱} + \dots$$

یہاں دور میں خارج قسموں کی تعداد طاق ہے، پہلے دور
 میں مابل الآخر مستحق $\frac{۱}{۱۱}$ ہے، پس لا = ۱۸، ما = ۵ مساوات

$$لا^۱ - ۱۳ ما^۱ = ۱ -$$

ایک حل ہے۔
۶۲۹ کی رو سے دوسرے متوالی دور کا ماقبل الآخر مستحق

$$\frac{۱}{۲} \left(\frac{۱۸}{۵} + ۱۳ \right) \text{ یعنی } \frac{۶۲۹}{۱۸۰}$$

اس لئے لا = ۶۲۹ ، ما = ۱۸۰ مساوات

$$لا^۱ - ۱۳ ما^۱ = ۱$$

حل ہے۔
اس طرح متوالی دوروں کے مسلسل ماقبل الآخر مستحق بنائے
ہم مساواتوں

$$لا^۱ - ۱۳ ما^۱ = ۱ \text{ اور } لا^۱ - ۱۳ ما^۱ = ۱$$

جتنے حل چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔

۳۔ جب مساوات لا^۱ - ۱۳ ما^۱ = ۱ کا ایک حل مثبت
اعداد میں معلوم کریا جائے تو ذیل کے طریقہ سے ہم
اور حل چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ لا = ھ ، ما = ک ایک حل ہے جہاں
ک مثبت صحیح اعداد ہیں، تب (ھ - ۱۳ک) = ۱
ما کوئی مثبت صحیح عدد ہے،

$$\text{پس } لا^۱ - ۱۳ ما^۱ = (ھ - ۱۳ک) = ۱$$

$$۱. (لا + ۱۳ ما) (لا - ۱۳ ما) = (ھ + ۱۳ک) (ھ - ۱۳ک)$$

$$۱ ما = (ھ + ۱۳ک) (لا - ۱۳ ما) = ھ - ۱۳ک$$

$$۲. لا = (ھ + ۱۳ک) (لا - ۱۳ ما) + ھ - ۱۳ک$$

۲ ما مائٹ = (ھ + ک مائٹ) - (ھ - ک مائٹ) ث

لا اور ما کی جو قیمتیں اس طرح معلوم ہوتی ہیں وہ مثبت صحیح اعداد ہیں اور ث کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، قیمتیں دینے سے ہم جتنے حل چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔

اسی طرح سے اگر لا = ھ، ما = ک مساوات لا - ث ما = ۱ - کا ایک حل ہو اور ث کوئی طاق مثبت صحیح عدد ہو تو لا - ث ما = (ھ - ک مائٹ) ث

پس لا اور ما کی قیمتیں وہی ہیں جو پہلے معلوم کی جا چکی ہیں لیکن ث کی قیمتیں ۱، ۲، ۳، تک محدود ہیں۔
۳، ۲ - لا = لا، لا = ما = لا ما رکھنے سے مساوات لا - ث ما = ۱ رہا ہو جاتی ہے لا - ث ما = ۱ اور ہم پہلے بتا چکے ہیں کہ اس کو کس طرح حل کرنا چاہئے۔
۳، ۳ - ہم دفعہ ۳۶۹ میں دیکھ چکے ہیں کہ

ق - ث ل = - (ق ل - ق ل) = ل

لہذا مائٹ کو متناظر کسر مسلسل میں تخیل کرنے سے اگر اس کسر کے کسی مکمل خارج قسمت کا نسب نما لا ہو اور اس مکمل خارج قسمت کی بجائے جزوی خارج قسمت لینے سے جو مستحق حامل ہو وہ ق ہو

تو مساوات لا - ث ما = ل میں سے ایک مساوات لا = ق اور ما = ل سے پوری ہوگی۔

نیز طاق مستحق سب مائٹ سے کم ہیں اور جفت مستحق

لا۔ ٹ ما = \pm کے حل یقینی طور پر صحیح عددوں میں ہو سکتے ہیں تاہم کسی عددی مثال میں بعض اوقات ایسا کہ ہم محض جانچ یا آزمائش سے مساواتوں لا۔ ٹ ما = کا ایک حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کر لیتے ہیں جبکہ بالا نسب نماؤں میں سے نہ ہو۔ مثلاً ہم آسانی سے کر سکتے ہیں کہ مساوات لا۔ ٹ ما = ± 53 لا۔ ٹ ما = ± 2 سے پوری ہوتی ہے، جب ایک حل معلوم تو حلوں کی کوئی تعداد معلوم ہو سکتی ہے جیسا کہ ذیل کی میں بتایا گیا ہے۔

۳۷۶۔ فرض کرو کہ لا = ف، ما = ک، مساوات لا۔ ٹ کا ایک حل ہے، نیز فرض کرو کہ مساوات لا۔ ٹ ما = ا، مل لا = ح، ما = ک ہے۔ تب

لا۔ ٹ ما = (ف۔ ٹ گ) (ح۔ ٹ ک)

= (ف ح \pm ٹ گ ک)۔ ٹ (ف ک \pm گ)

لا = ف ح \pm ٹ گ ک اور ما = ف ک \pm گ چھ رکھنے سے ا ح، ک کو انکی قیمتیں جو دفعہ ۳۷۱ کے مطابق معلوم کی جاسکتی دینے سے حلوں کی کوئی تعداد معلوم ہو سکتی ہے۔

۳۷۷۔ اب تک ہم نے یہ فرض کیا ہے کہ ٹ پورا مربع ہے اگر ٹ پورا مربع ہو تو مساوات کی شکل لا۔ ٹ ما = ہو جاتی ہے، جس کو ذیل کے طریقہ سے فوراً حل کیا جاسکتا فرض کرو کہ لا = ب ج جہاں ب اور ج دو مثبت اعداد ہیں جن میں ب بڑا ہے، تب

(لا + ٹ ما) (لا۔ ٹ ما) = ب ج

رکھو لا + ثا = ب اور لا - ثا = ج ، اگر لا اور ما کی وہ
قیمتیں جو ان مساواتوں سے حاصل ہوں صحیح اعداد ہوں تو
ب اور ج کو سب ممکن قیمتیں دینے سے باقی حل معلوم
ہو سکتے ہیں ۔

مثال ۔ دو مثبت صحیح اعداد معلوم کرد جن کے مربعوں کا فرق ۶۰ ہو
فرض کرو کہ لا اور ما مطلوبہ اعداد ہیں ، تب لا - ما = ۶۰

یعنی (لا + ما) (لا - ما) = ۶۰

اب ۶۰ ذیل کے زوجوں میں سے ہر ایک کے حاصل ضرب کے
مساوی ہے

۱۰ × ۶ ، ۱۲ × ۵ ، ۱۵ × ۴ ، ۲۰ × ۳ ، ۳۰ × ۲ ، ۶۰ × ۱
اور مطلوبہ قیمتیں مساواتوں

لا + ما = ۳۰ لا + ما = ۱۰

لا - ما = ۲ اور لا - ما = ۶

سے معلوم ہو سکتی ہیں ، باقی مساواتوں سے لا ، ما کی جو قیمتیں
حاصل ہوتی ہیں وہ کسری ہیں ۔

پس اعداد مطلوبہ ۱۶ ، ۱۴ اور ۸ ، ۲ ہیں ۔
نتیجہ صریح ۔ اسی طرح سے ہم مساوات

لا + ۲ھ لا + ما + ب + ما + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ک

کے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کر سکتے ہیں جبکہ دائیں جانب کے
رکن کو دو ناطق خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا ممکن ہو ۔

۸ ، ۳ ۔ اگر عام مساوات میں لا یا ب یا دونوں صفر ہوں تو
دفعہ ۳۶ کا طریقہ استعمال کرنے کی بجائے ذیل کی مثال کے مطابق
عمل کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے ۔

مثال ۔ مثبت صحیح اعداد میں حل کرو

۲ لا ۲ - ۴ لا ۲ + ۱۲ لا - ۵ = ۱۱
ما کو لا کی رقوم میں بیان کرو۔

$$۶ = \frac{۱۱ + ۱۲ لا - ۴ لا ۲}{۵ لا ۲} + ۱ لا ۲ = \frac{۶}{۵ لا ۲}$$

اگر ما کوئی صحیح عدد ہو تو $\frac{۶}{۵ لا ۲}$ بھی صحیح عدد ہو گا لہذا
۵ لا ۲ لازماً ۱ کے یا ۲ کے یا ۳ کے یا ۴ کے یا ۵ کے مساوی
۲ اور ۶ کی صورتیں صریحاً ناقابل تسلیم ہیں، اور لا کو
قابل قبول قیمتیں صرف ۵ لا ۲ = ۱ اور ۵ لا ۲ = ۲
سے حاصل ہوتی ہیں جو ۳، ۴، ۵ ہیں۔
ان قیمتوں کو یکے بعد دیگرے لینے سے ہمیں حسب ذیل
ماصل ہوتے ہیں

۱ لا ۲ = ۱، ۲ لا ۲ = ۲، ۳ لا ۲ = ۳، ۴ لا ۲ = ۴، ۵ لا ۲ = ۵
پس قابل قبول حل صرف لا ۲ = ۳، لا ۲ = ۴ اور لا ۲ = ۵ ہیں
۳، ۴، ۵۔ اس اصول کی مدد سے جو ابھی مذکور ہوا ہم معلوم
کر سکتے ہیں کہ متغیروں کی کن قیمتوں کے لئے لا اور ما کا کو
دیا ہوا ثقل درجہ اول یا دوم پورا مربع ہو سکتا ہے۔

اس قسم کے سوالوں کو بعض اوقات واقفین کے سوا
کہتے ہیں کیونکہ ان پر پہلے پہل یونان کے ایک ریاضی دار
واقفین تائی نے چوتھی صدی عیسوی میں بحث کی تھی۔
مثال ۱۔ دو مثبت صحیح اعداد ایسے ہیں کہ اگر ان کے مربع
کے حاصل جمع میں سے ان کا حاصل ضرب تفریق کیا جائے
ماصل تفریق پورا مربع ہوتا ہے، ان اعداد کے لئے عام حل
معلوم کرو۔

مطلوبہ اعداد کو لا، ما سے تعبیر کرو

لا۔ لا + ما = می (فرض کرو)

لا (لا۔ ما) = می۔ ما

یہ مساوات مفروضات

ما = لا + ن (می + ما) اور ن (لا۔ ما) = ما (می۔ ما)
سے پوری ہوتی ہے جہاں ما اور ن مثبت صحیح اعداد ہیں۔
لہذا ما۔ لا۔ ن۔ ما۔ ن۔ می = ۰

اور ن۔ لا + (ما۔ ن)۔ ما۔ می = ۰
ضرب چلیپائی سے ان مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

لا = ما = می
ما۔ ن۔ ن۔ ما۔ می = ما۔ ن۔ ن۔ ما۔ می
اور چونکہ مساوات زیر بحث متجانس ہے، اس لئے ہم اس کے
عام حل

لا = ما۔ ن۔ ن۔ ما۔ می = ما۔ ن۔ ن۔ ما۔ می

لے سکتے ہیں۔ یہاں ما اور ن دو مثبت صحیح اعداد ہیں۔
جن میں سے ما بڑا ہے مثلاً اگر ما = ۷، ن = ۳ تو

لا = ۴، ما = ۳۳، می = ۳۷

مثال ۲۔ تین مثبت صحیح اعداد سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور
یہ عدد ایسے ہیں کہ ان میں سے ہر دو کا مجموعہ پورا مربع
ہے، ان کے لئے عام حل معلوم کرو۔

ان اعداد کو لا۔ ما، لا، لا + ما سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ

لا۔ ما = ق، لا = ن، لا + ما = ر

تب ق + ر = ن

یا $ل - ل' = ل - ق'$
 یہ مساوات ذیل کے مفروضات

$$م (ل - ل') = م (ل - ق') \quad م (ل + ل') = م (ل + ق')$$

سے پوری ہوتی ہے جہاں $م$ اور $ن$ مثبت صحیح اعداد ہیں۔
 ضرب چلیپائی سے ہمیں ان مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ل}{ق} = \frac{ل'}{ق'} = \frac{ل + ل' + م}{ل + ل' + م + ن} = \frac{ل + ل' + م}{ل + ل' + م + ن}$$

پس عام حل

$$ق = ن + م + م + ل' = ل' + م + ن' \quad ر = م + م + م + ن = م + م + م + ن$$

لے سکتے ہیں جہاں

$$لا = \frac{1}{4} (م + ن') \quad ما = م + ن (م - ن')$$

اور پھر تین صحیح اعداد مطلوبہ آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں۔
 لا کی قیمت سے ظاہر ہے کہ $م$ اور $ن$ یا دونوں مثبت
 ہیں یا دونوں طاق۔ نیز ان کی قیمتیں ایسی ہونی چاہئیں

$$کہ لا < ما یعنی (م + ن') < م + ن (م - ن')$$

$$یعنی م (م - ن) + م + ن + م + ن < م + ن (م - ن) + م + ن + م + ن$$

یہ شرط پوری ہوتی ہے اگر $م < ن$

اگر $م = ۹$ ، $ن = ۱$ تو $لا = ۳۳۶۲$ ، $ما = ۲۸۸۰$ اور اعداد ہیں
 ۳۸۴۴ ، ۳۳۶۲ ، ۶۲۴۲ ، ان میں سے دو دو کے مال جمع
 ۳۸۴۴ ، ۶۲۴۴ اور ۹۶۰۴ ہیں جو بالترتیب ۶۲ ، ۸۲ ، ۹۸ کے
 مربعے ہیں۔

اشد نمبری ۲۸

۱۰ کی مساواتوں کے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرو۔

$$cc = bc + bp - b^2$$

$$r' = \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - 4}$$

$$r = 91.0 - 9.5 + 6.9r - 6$$

$$10 = 6r - 69r + 9r \quad -5 \quad \wedge = 6 - 9r - 69$$

$$315 = 6 \cdot 52$$

۴۵۔ ماسوائے ہر ایک کا چھوٹے سے چھوٹا مل
- صحیح اعداد میں معلوم کرو۔

لا - ١٤١ = ١ لا - ١٩ = ١

$$-1 = 0 + 16 - 17 \quad -1 = 1 - 16 = -15$$

9-16-59

۱۔ مساواتوں میں سے ہر ایک کا عام سے عام مثبت
عددی حل معلوم کرو۔

1=65-9-13 1=63-9

1-2614-5

اور ماکی ایسی عام سے عام قیمتیں دریافت کرو جن سے
کا ہر ایک جملہ پورا مربع بن جائے۔

$$9-3 \text{ لا } 3 + 3 \text{ لا } 3 = 14 \quad 9-2 \text{ لا } 2 + 2 \text{ لا } 2$$

76 + 750

دو مثبت صحیح عدد ایسے معلوم کرو کہ ان میں سے ایک
 دوسرے کے مربع سے بقدر ۱-۵ کے بڑا ہو۔
 تین ایسے عددوں کے لئے عام سے عام ضابطہ معلوم

کرو جن سے قائم الزاویہ مثلث کے اضلاع کے طول تعبیر ہو سکتے ہیں۔

۲۰۔ دو مثبت صحیح عدد ایسے ہیں کہ اگر ان کے مربعوں کے مجموعہ میں ان کا حاصل ضرب جمع کر دیا جائے تو کل مجموعہ پورا مربع ہوتا ہے، ان عددوں کے لئے عام ضابطہ معلوم کرو۔
۲۱۔ میرے پاس تین نئے شادی شدہ آدمی مع اپنی بیویوں کے ملنے کے لئے آئے مردوں کے نام دیوی دیال، متھرا داس اور رام گوپال تھے اور عورتوں کے بستی، کیسری اور چامی لیکن مجھے یہ معلوم نہیں کہ ہر مرد کی بیوی کا نام کیا ہے۔ انہوں نے مجھ سے کہا کہ وہ سب بازار میں گائے کے بچھڑے خریدنے گئے تھے اور ہر ایک نے اتنے بچھڑے خریدے جتنے کہ ایک بچھڑے کے لئے مثلث کا کئے۔ دیوی دیال نے کیسری کی نسبت ۲۳ بچھڑے زیادہ خرید کئے اور متھرا داس نے بستی کی نسبت ۱۱ زیادہ خریدے۔ نیز ہر ایک آدمی نے اپنی بیوی کی نسبت ۳ گنی زیادہ خرچ کئے، مین ہر ایک مرد کی بیوی کا نام جداگانہ معلوم کرنا چاہتا ہوں۔

۲۲۔ اگر ۲۱ کے کسی طاق مستحق کا شمار کنندہ ک ہو اور کسی جفت مستحق کا شمار کنندہ ک ہو تو ثابت کرو کہ پہلے ک یا ک۔ ۱ طبعی اعداد کا حاصل جمع پورا مربع ہوگا



انتیسواں باب

سلسلوں کو جمع کرنا

۳۰۔ ابواب ماقبل میں بعض قسم کے سلسلوں کے جمع کرنے کی مثالیں درج کی جا چکی ہیں، سلسلوں کے جمع کرنے کے لئے جن طریقوں کی تفصیل پہلے آ چکی ہے وہ حسب ذیل ہیں۔

- (۱) سلسلہ حسابیہ باب ۴
 - (۲) سلسلہ ہندیہ باب ۵
 - (۳) وہ سلسلے جو جزوی طور پر حسابیہ اور جزوی طور پر ہندیہ ہوتے ہیں۔ دفعہ ۶۰
 - (۴) طبعی اعداد کی قوتوں اور ان کے متعلقہ سلسلوں کے ماضی جمع دفعات ۶۸ تا ۷۵
 - (۵) نامعلوم سروں کی مدد سے جمع کرنا دفعہ ۳۱۲
 - (۶) متوالی سلسلے باب ۲۴
- بہم زیادہ عام طریقوں پر بحث کرنے کی طرف متوجہ تے ہیں۔ لیکن بائیں حصہ باب ہذا کے دوران میں یہ معلوم ہوا کہ متذکرہ بالا طریقے بھی بعض صورتوں میں مفید طور پر استعمال ہو سکتے ہیں۔
- ۲۔ اگر ایک سلسلہ کی دو یا دو ایسی مقادیر کے سے تعبیر ہو سکے جن میں سے ایک رقم رکا دہی تفاعل

ہو جو دوسری رقم ر۔ اکا ہے تو سلسلہ کا حامل جمع آسانی سے
محسوب ہو سکتا ہے
فرض کرو کہ ایسا سلسلہ

$$۶ + ۶ + ۶ + \dots + ۶ + ۶$$

ہے اور اس کا حامل جمع ج ہے ، نیز فرض کرو کہ اس کی
ر دین رقم و۔ و۔ کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے۔ تب

$$ج = (۶ - و) + (۶ - و) + \dots + (۶ - و) + (۶ - و)$$

$$+ (۶ - و)$$

$$= ۶ - و$$

مثال۔ سلسلہ ذیل

$$\dots + \frac{1}{(۹۳+۱)(۹۲+۱)} + \frac{1}{(۹۲+۱)(۹۱+۱)} + \frac{1}{(۹۱+۱)(۹۰+۱)}$$

کون رقموں تک جمع کرو۔
اگر ہم سلسلہ بالا کو

سے تعبیر کریں تو ظاہر ہے کہ

$$۶ = \frac{1}{۹۰} - \left(\frac{1}{۹۱+۱} - \frac{1}{۹۲+۱} \right)$$

$$۶ = \frac{1}{۹۱} - \left(\frac{1}{۹۲+۱} - \frac{1}{۹۳+۱} \right)$$

$$۶ = \frac{1}{۹۲} - \left(\frac{1}{۹۳+۱} - \frac{1}{۹۴+۱} \right)$$

.....

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

پس جمع کرنے سے

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

مثال - تیسویں باب کی نو سے بعض اوقات $\frac{1}{n}$ کو
جزوی کسور میں تبدیل کرنے سے نہایت مناسب استعمال
معلوم ہو سکتا ہے۔

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots \right)$$

مثال -

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots \right)$$

اور $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots$ کے بعد دیگرے صفر کے مساوی
فرض کرنے سے

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots \right)$$

پس

$$\text{اسی طرح سے } \frac{1}{1-a} = \left(\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a^2} \right) + \frac{1}{1-a^2}$$

$$\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-a} - \frac{1-a^{n-1}}{1-a^n} + \frac{1-a^{n-1}}{1-a^n}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-a} - \frac{1-a^{n-1}}{1-a^n} + \frac{1-a^{n-1}}{1-a^n}$$

۳۸۳۔ ایک سلسلہ کی ہر ایک رقم کے اجزائے ضربی سے بنی ہوئی ہے اور یہ اجزائے ضربی سلسلہ حسابیہ میں ہیں، نیز ہر ایک رقم کے ابتدا میں جداگانہ جو جزو ضربی واقع ہوتے ہیں وہ سب ایک ہی سلسلہ حسابیہ میں ہیں، اس سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔
فرض کرو کہ سلسلہ

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$\text{جہاں } a = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)\dots(1+a^{2^{n-1}})$$

ن کی بجائے ن-۱ رکھنے سے

$$a = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)\dots(1+a^{2^{n-1}})$$

$$a = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)\dots(1+a^{2^{n-1}}) = \text{فرض کرو}$$

ن کی بجائے ن+۱ رکھنے سے

$$(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\dots(1+a^{2^n}) = a$$

لہذا تفریق کرنے سے

$$(۱+۱)ب \times ع = ۱-۱-۱-۱$$

$$\text{اسی طرح } (۱+۱)ب \times ۱ = ۱-۱-۱-۱$$

$$(۱+۱)ب \times ۱ = ۱-۱-۱-۱$$

$$(۱+۱)ب \times ۱ = ۱-۱-۱-۱$$

$$\text{جمع کرنے سے } (۱+۱)ب \times ج = ۱-۱-۱-۱$$

$$\text{یعنی ج} = \frac{۱-۱-۱-۱}{(۱+۱)ب}$$

$$= \frac{(۱+۱)ن + (۱+۱)ع}{(۱+۱)ب} = \text{ہر جہاں ہر}$$

کوئی مقدار ہے جو ن کے تابع نہیں اور جس کی قیمت ن کو کوئی خاص قیمت دینے سے معلوم ہو سکتی ہے۔

مندرجہ بالا جواب سے ہمیں ذیل کا آسان کلیہ معلوم ہوتا ہے

پہلے ن میں رقم لکھ لو اور اس کے آخری جزو ضربی کے

بعد کا (یعنی ن + ۱ واں) جزو ضربی بعد میں لکھ دو پھر

اضافہ شدہ اجزائے ضربی کی تعداد اور مشترک فرق کے

حاصل ضرب پر تقسیم کر کے ایک مستقل رقم جمع کر دو۔

$$\text{یہ دیکھ لینا چاہئے کہ ہر} = \frac{۱-۱-۱-۱}{(۱+۱)ب} = \frac{۱-۱-۱-۱}{(۱+۱)ب}$$

لیکن ہر کی بجائے اس کی یہ قیمت نہ لینا ہی بہتر ہے، ہر

کی مثال :- حسب بالا معلوم کرنی چاہئے۔
مثال - سلسلہ

..... + ۹ × ۷ × ۵ + ۷ × ۵ × ۳ + ۵ × ۳ × ۱
کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

ن ویں رقم (۱-ن۲)(۱+ن۲)(۳+ن۲)(۵+ن۲)
پس قاعدہ کی رو سے

$$ج = \frac{(۱-ن۲)(۱+ن۲)(۳+ن۲)(۵+ن۲)}{۸}$$

م کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ن = ۱ رکھنے سے سا
میں صرف پہلی رقم رہ جاتی ہے، پس

$$\frac{۵}{۸} = م + \frac{۷ \times ۵ \times ۳ \times ۱}{۸} = ۱۵$$

$$ج = \frac{۱۵}{۸} + \frac{(۱-ن۲)(۱+ن۲)(۳+ن۲)(۵+ن۲)}{۸}$$

جو اختصار کے بعد = ن (۲+ن۲+ن۴+ن۶)
۳۸۴ - دفعہ ماقبل کا حاصل جمع نامعلوم سروں کے
سے بھی معلوم ہو سکتا ہے (دیکھو دفعہ ۲۱۲) نیز ملاحظہ
ذیل کا طریقہ -

ظاہر ہے کہ ع = (۱-ن۲)(۱+ن۲)(۳+ن۲)(۵+ن۲)
پس دفعہ (۱۷۰) کی ترقیم کی رو سے

$$ج = ۸ + ۱۲ + ۲۰ + ۳۰ = ۷۰$$

$$ج = ۲ + (۱+ن۲) + (۱+ن۲) + (۳+ن۲) + (۵+ن۲)$$

$$= ن (۲+ن۲+ن۴+ن۶)$$

۳۸۵۔ یاد رہے کہ دفعہ ۳۰۳ کا طریق صرف اسی صورت میں کارآمد ہو سکتا ہے جبکہ ہر ایک رقم کے اجزائے ضربی سلسلہ حسابیہ میں ہوں اور ہر رقم کے ابتدا میں جداگانہ جو جنو ضربی ہوتے ہیں وہ ایک ہی سلسلہ حسابیہ میں ہوں۔
مثلاً سلسلہ

.....۹x۷x۵+۷x۵x۳+۶x۳x۲+۵x۳x۱
کا حاصل جمع ان دو کلیوں میں سے جن کا دفعہ ما قبل میں ذکر ہوا ہر ایک سے نکل سکتا ہے لیکن دفعہ ۳۰۳ کے قاعدہ سے زیادہ لاست نہیں نکل سکتا۔

یہاں $n = 6$ $(n+2)(n+1) = (n+2)(n+1)(n+1)(n+1)(n+1)(n+1)$
 $= (n+2)(n+1)(n+1)(n+1)(n+1)(n+1)$
 $= (n+2)(n+1)(n+1)(n+1)(n+1)(n+1)$
یہی قاعدہ ہر رقم پر لگانے سے

ج $\frac{1}{n} = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)$

$\frac{1}{n} = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)$
رقم صفر ہے۔

۳۸۶۔ ایک سلسلہ کی ہر ایک رقم ایسے لے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے متکافی پر مشتمل ہے جو سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور نیز ہر رقم کے ابتدا میں جداگانہ جو اجزائے ضربی واقع ہوتے ہیں وہ بھی ایک ہی سلسلہ حسابیہ میں ہیں، اس سلسلہ کی n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔
سلسلہ کو

$$ع + ع + ع + \dots + ع$$

سے تعبیر کرو۔

$$\frac{1}{ع} = (ع + ن ب) (ع + ن ب) (ع + ن ب) (ع + ن ب) \dots (ع + ن ب) (ع + ن ب)$$

ن کی بجائے ن - ۱ رکھنے سے

$$\frac{1}{ع-۱} = (ع-۱ + ن ب) (ع-۱ + ن ب) (ع-۱ + ن ب) \dots (ع-۱ + ن ب) (ع-۱ + ن ب)$$

$$\frac{1}{ع} = (ع + ن ب) (ع + ن ب) (ع + ن ب) \dots (ع + ن ب) (ع + ن ب)$$

ن کی بجائے ن + ۱ رکھنے سے

$$(ع + ن ب) = ع + ۱$$

اس لئے تفریق کرنے سے

$$(ع - ۱) ب \times ع = ع - ع + ۱$$

$$\text{اسی طرح سے } (ع - ۱) ب \times ع = ع - ع + ۱$$

.....

$$(ع - ۱) ب \times ع = ع - ع + ۱$$

$$(ع - ۱) ب \times ع = ع - ع + ۱$$

$$\text{پس جمع کرنے سے } (ع - ۱) ب \times ج = ع - ع + ۱$$

$$\text{یعنی } ج = \frac{ع - ع + ۱}{(ع - ۱) ب} = م$$

جہاں م ایک مقدار ہے جو ن کے تابع نہیں اور جسکی قیمت

ن کو کوئی خاص قیمت دینے سے معلوم ہو سکتی ہے۔

پس جی = م - $\frac{1}{(1-1)ب}$ × $\frac{1}{(1+1)ب}$ × ... $\frac{1}{(1+n)ب}$ بنا حاصل جمع ذیل کے کلیہ سے معلوم ہو سکتا ہے۔

ن دیں رقم لکھ لو اور پچھلا جزو ضربی نکال دو۔ پھر ان تین ضربی کی جو تعداد لکھ جائے اُس سے اور فرق سے تنسیم کر کے ایک مستقل رقم جمع کر دو۔

م کی قیمت = $\frac{1}{(1-1)ب}$ = $\frac{1}{(1+1)ب}$ + $\frac{1}{(1-1)ب}$ + ...
لیکن ہر ایک صورت میں م کی قیمت ن کو کوئی خاص قیمت پر معلوم کرنا ہی مناسب اور مصلحت آمیز ہوتا ہے۔
مثال ۱۔ سلسلہ ذیل

$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots$
ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

ن دیں رقم = $\frac{1}{(1+n)(2+n)(3+n)}$ ہے
اس کلیہ کی رو سے

جی = م - $\frac{1}{(1+n)(2+n)(3+n)}$

ن = ۱ رکھو تب $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} = م - \frac{1}{(1+1)(2+1)(3+1)}$

س سے م = $\frac{1}{18}$

بنا جی = $\frac{1}{18} - \frac{1}{(1+n)(2+n)(3+n)}$

ن کو لا انتہا بڑا بنا دینے سے ہمیں ج کے قیمت $\frac{1}{n}$ حاصل ہوتی ہے۔
مثال ۲۔ سلسلہ

$$\dots\dots\dots + \frac{5}{1 \times 2 \times 3} + \frac{2}{5 \times 3 \times 2} + \frac{3}{2 \times 2 \times 1}$$

کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔
یہاں مندرجہ بالا قاعدہ کا بالکلست اطلاق نہیں ہو سکتا
کیونکہ اگرچہ نسب نماؤں کے پہلے اجزائے ضربی جو جداگانہ
۱، ۲، ۳، کے مساوی ہیں، سلسلہ حسابیہ میں ہیں لیکن
کسی ایک نسب نما کے اجزائے ضربی سلسلہ حسابیہ میں نہیں
ہیں۔ اس مثال میں ہمیں حسب ذیل عمل کرنا چاہئے۔
(۲ + ن)

$$\frac{1}{1} = \frac{2 + n}{n(1+n)(2+n)(3+n)}$$

$$= \frac{n(1+n)(2+n)(3+n)}{n(1+n)(2+n)(3+n)}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots + \frac{n}{n} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots + \frac{n}{n}$$

اب ان تین رقموں میں سے ہر ایک کو ن دیں رقم کا ایک جزو
خیال کیا جاسکتا ہے جو جداگانہ مندرجہ بالا قاعدہ کے تحت میں
آتی ہیں

$$= \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots + \frac{n}{n}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots + \frac{n}{n}$$

$$9 \text{ ج} = (3 - \text{ن}) (1 - \text{ن}) (2 + \text{ن}) (3 + \text{ن}) - (5 + \text{ن}) (2 + \text{ن}) (3 + \text{ن}) - 9 \times 5 \times 2 + 8 \times 5 \times 2$$

$$5 \text{ ج} = \text{ن} (3 + \text{ن} + 2 + \text{ن} + 1)$$

۳۸۸۔ جب کسی سلسلہ کی ن ویں رقم ن کا کوئی ناطق صحیح تفاعل ہو تو یہ سلسلہ ایک ایسی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جس پر دفعہ ۳۸۳ کا اطلاق آسانی سے ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ف (ن) کا ایک ناطق، صحیح، ق ابعاد کا تفاعل ہے اور مان لو کہ

ف (ن) = ۱ + بن + ج (ن) + ۲ (ن) + ۱ (ن) + ۲ (ن) +
جہاں 'ب'، 'ج'، 'د'، غیر معین مستقل ہیں جو تعداد میں ق + ۱ ہیں۔ چونکہ یہ مساوات متماثلہ ن کی سب قیمتوں کے لئے درست ہے اس لئے ہم ن کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی کر سکتے ہیں، اس طرح ہمیں ق + ۱ مستقل معلوم کرنے کے لئے ق + ۱ سادہ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔
مثال۔ ایک ایسے سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو جس کی ن ویں رقم ن + ۶ + ۵ ن ہے۔

$$\text{ن} + ۶ + ۵ \text{ ن} = ۱ + بن + ج (ن) + ۲ (ن) + ۱ (ن) + ۲ (ن)$$

+ ع (ن) (۱ + ن) (۲ + ن) (۳ + ن)
یہ فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ ۱ = ب، ۰ = ج، ۰ = د، ۱ = ع اور ۲ = ۳۔
رہنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے ج = ۶، ۰ = د، ۰ = ب، ۰ = ع

$$\text{ن} + ۶ + ۵ \text{ ن} = \text{ن} (۱ + ن) (۲ + ن) (۳ + ن) - (۲ + ن) (۳ + ن) (۱ + ن)$$

$$\text{اس لئے ج} = \frac{۱}{۵} \text{ن} (۱ + ن) (۲ + ن) (۳ + ن) - (۲ + ن) (۳ + ن) (۱ + ن)$$

$$(r + \omega + \omega^2)(r + \omega)(1 + \omega)\omega \frac{1}{\omega} =$$

کثیر ضلعی اور اشکالی اعداد

۳۸۹۔ ایک سلسلہ حسابیہ کی پہلی رقم ۱ ہے اور مشترک فرق ب ہے، ظاہر ہے کہ اس سلسلہ کی n رقموں کا حاصل جمع $n + \frac{n(n-1)}{2}b$ (۱-۱) ب ہوگا، اگر ہم اس جملہ میں b کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، قیمتیں دیں تو ہمیں اعداد

$$-\dots - \frac{1}{4} (1+n) \frac{1}{4} (1-n) \dots$$

ماصل ہوتے ہیں۔ سلسلے جنکی ن ویں رتبیں ان عددوں کے
 عددوں کے وہ سلسلے جو بالترتیب دوسرے، تیسرے، چوتھے پانچویں
 رتبہ کے کثیر ضلعی عدد کہلاتے ہیں۔ پہلے رتبہ کے کثیر ضلعی اعداد
 کے سلسلے میں ہر رقم کے مساوی ہے، دوسرے، تیسرے، چوتھے،
 پانچویں، رتبہ کے کثیر ضلعی اعداد کو خطی، مثلث، مربع،
 گول، اعداد بھی کہتے ہیں۔

۳۹۔ ر، ویں رتبہ کے بیشتر ضلعی اعداد کی پہلی ن رقموں مجموعہ معلوم کرو۔

۱۰. دیں رتبہ کے اعداد کی 'ن' دیں رقم 'ن' + $\frac{1}{p}$ 'ن' (۱-ن) (۲-ر) 'ن'

$$ج = \frac{1}{7} + 4ز(1-و)3(1-ز)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1+\omega)\omega(1-\omega)(1-\omega^2) \dots [\text{و غیره}]$$

$$\{r + (1-\psi)(r-j)\}(1+\psi)\psi \frac{1}{q} =$$

بنایا تھا۔

ہر ایک عدد اپنے اوپر کے اور اپنے دائیں جانب کے عدد کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔ مثلاً

$$۱۰ + ۵ = ۱۵ \quad ۲۱ + ۴ = ۲۵ \quad ۱۲۶ + ۵۶ = ۱۸۲$$

اعداد کو بنانے کے طریقہ سے ظاہر ہے کہ متواتر افقی قطاریں یا انتہائی ستون بالترتیب پہلے، دوسرے، تیسرے، رتبہ کے اشکالی اعداد ہیں۔

اگر ایک خط اس طرح کھینچا جائے کہ اس سے پہلی قطار اور دائیں جانب کے ستون میں سے اعداد کی مساوی تعداد قطع ہو تو اس خط کو قاعدہ کہتے ہیں اور قاعدوں کا شمار اوپر کے دائیں کونے سے کرتے ہیں۔ مثلاً چھٹا قاعدہ وہ خط ہے جو اعداد ۱، ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵ میں سے گزرتا ہے۔ یہ بات قابل توجہ ہے کہ یہ اعداد تعداد میں چھ ہیں اور (۱+۵) کے پھیلاؤ کی رقوم کے سر ہیں۔

ان اعداد کے خواص پر حکیم یاسکل نے بڑی قابلانہ بحث کی ہے بالخصوص اس نے اپنے حسابی مثلث کو اجتماع کے نظریہ کو وسعت دینے اور احتمالات کے متعلق چند دلچسپ مسئلے ثابت کرنے میں نہایت خوبی کے ساتھ استعمال کیا، احتمال کی تاریخ مصنفہ ملاؤ ہنٹر میں اس مضمون پر بسیط بحث کی ہے۔

۳۹۴۔ جہاں کسی سلسلہ میں تعداد رقوم کے متعلق کوئی اشتباہ نہ ہو وہاں ہم نے عمل جمع کو ظاہر کرنے کے لئے علامت Σ سے کام لیا ہے۔ بعض اوقات ان حدود کو ظاہر کرنے کے لئے جن کے اندر جمع کا عمل کرنا مقصود ہوتا ہے ذیل کی مرمرہ علامت کا استعمال کرنا زیادہ سہولت بخش ثابت ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ $f(x)$ لا کا کوئی تغاقل ہے تب $\sum_{x=a}^b f(x)$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r)}{(r+1)} =$$

مثلاً نمبری ۲۹ (۱) ذیل کے سلسلوں کو ن رتوں تک جمع کرو

$$(1) \dots\dots\dots + 5 \times 4 \times 3 + 4 \times 3 \times 2 + 3 \times 2 \times 1$$

$$(2) \dots\dots\dots + 6 \times 5 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 \times 3 \times 2 + 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$(3) \dots\dots\dots + 13 \times 10 \times 6 + 10 \times 6 \times 4 + 6 \times 4 \times 1$$

$$(4) \dots\dots\dots + 9 \times 6 \times 3 + 8 \times 5 \times 2 + 4 \times 3 \times 1$$

$$(5) \dots\dots\dots + 11 \times 6 \times 2 + 10 \times 4 \times 2 + 9 \times 5 \times 1$$

ذیل کے سلسلوں میں سے ہر ایک کا مجموعہ ن رتوں تک اور لاتنا ہی تک معلوم کرو۔

$$(6) \dots\dots\dots + \frac{1}{4 \times 3} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{2 \times 1}$$

$$(7) \dots\dots\dots + \frac{1}{10 \times 6} + \frac{1}{6 \times 4} + \frac{1}{4 \times 1}$$

$$(8) \dots\dots\dots + \frac{1}{9 \times 6 \times 5} + \frac{1}{6 \times 5 \times 2} + \frac{1}{5 \times 2 \times 1}$$

$$(9) \dots\dots\dots + \frac{1}{13 \times 10 \times 6} + \frac{1}{10 \times 6 \times 4} + \frac{1}{6 \times 4 \times 1}$$

$$(10) \dots\dots\dots + \frac{6}{5 \times 4 \times 3} + \frac{5}{4 \times 3 \times 2} + \frac{4}{3 \times 2 \times 1}$$

$$(11) \dots\dots\dots + \frac{3}{6 \times 4 \times 5} + \frac{2}{4 \times 5 \times 2} + \frac{1}{5 \times 2 \times 3}$$

$$(۱۲) \quad \dots + \frac{4}{4 \times 5 \times 6} + \frac{5}{5 \times 6 \times 7} + \frac{6}{6 \times 7 \times 8} + \frac{1}{7 \times 8 \times 9}$$

ذیل کے سلسلوں کی ن رتہوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

$$(۱۳) \quad \dots + 2 \times 5 \times 3 + 3 \times 4 \times 2 + 2 \times 3 \times 1$$

(۱۴) $(ن-۱) + (ن-۲) + (ن-۳) + \dots$
ان سلسلوں کی ن رتہوں کا حاصل جمع معلوم کرو جن کی
ن وین یقیناً حسب ذیل ہیں۔

$$(۱۵) \quad ن (ن-۱) \quad (۱۶) \quad (ن+۱) + (ن+۲) + (ن+۳) + \dots$$

$$(۱۷) \quad \frac{ن+۲+۳+۴}{ن+۱} \quad (۱۸) \quad \frac{ن (ن-۱)}{ن-۱}$$

$$(۱۹) \quad \frac{ن+۲+۳+۴}{ن+۱} \quad (۲۰) \quad \frac{ن+۱+۲+۳}{ن}$$

(۲۱) ثابت کرو کہ اشکالی اعداد کے ر، وین رتبہ کی ن وین
مقام ن وین رتبہ کی ر، وین رقم کے مساوی ہے۔

(۲۲) اگر اشکالی اعداد کے ر، وین رتبہ کی ن وین رقم
(ر-۲) وین رتبہ کی (ن+۲) وین رقم کے مساوی
ہو تو ثابت کرو کہ $ن+۲ = ۲$

(۲۳) پہلے رتبہ سے لیکر ر، وین رتبہ (بشمول ر، وین) تک
کے کثیر ضلعی اعداد کے مختلف جٹ لئے گئے ہیں اور ہر جٹ
میں رقوم کی تعداد ن ہے۔

ثابت کرو کہ ان سب رقوم کا حاصل جمع

اس سلسلہ بالا میں جمع کرنے سے چونکہ

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس منزل تک عددی سر اسی ضابطہ کے مطابق بنتے ہیں جس کے مطابق کہ مسئلہ تنا سے بنتے ہیں، اب ہم استقراء حسابیہ سے یہ ثابت کریں کہ یہ ضابطہ ہر صورت میں درست اور برقرار رہتا ہے۔

$$\text{فرض کرو کہ } ۱ + ۲ + ۳ + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$+ (n+1) + (n+2) + \dots + (n+j) = \dots$$

اسی طرح اگر ہم پہلے سلسلہ کو $(n+1)$ دیں تک لینے بجائے دوسرے سلسلہ کو $(n+2)$ دیں سلسلہ تک لیں

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$+ (n+1) + (n+2) + \dots + (n+j) = \dots$$

اس سلسلہ کو سلسلہ بالا میں جمع کرنے سے چونکہ

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$+ (n+1) + (n+2) + \dots + (n+j) = \dots$$

$$\text{لیکن } ج_۱ + ج_۲ + ج_۳ = (ج_۱ + \frac{۱}{۲}) \times (۱ + \frac{۱}{۲}) = ج_۱ \times \frac{۱+۲}{۲} = ج_۱ \times \frac{۱+۲}{۲}$$

$$\frac{(۱+۲)(۱+۳).....(۱+۲۰)}{۲ \times ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰ \times ۱۱ \times ۱۲ \times ۱۳ \times ۱۴ \times ۱۵ \times ۱۶ \times ۱۷ \times ۱۸ \times ۱۹ \times ۲۰}$$

$$= ج_۱$$

پس ثابت ہوا کہ اگر یہ کلیہ $ج_۱ + ج_۲$ کے لئے درست ہو تو یہ $ج_۲ + ج_۳$ کے لئے بھی درست ہوتا ہے۔ لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ یہ $ج_۱$ کے لئے درست ہے لہذا یہ $ج_۱$ کے لئے درست ہے اور علیٰ ہذا قیاس اس لئے یہ ہر صورت میں درست ہے چنے

$$ج_۱ = ج_۱ + ج_۲ + ج_۳ + ج_۴ + ج_۵ + ج_۶ + ج_۷ + ج_۸ + ج_۹ + ج_{۱۰} + ج_{۱۱} + ج_{۱۲} + ج_{۱۳} + ج_{۱۴} + ج_{۱۵} + ج_{۱۶} + ج_{۱۷} + ج_{۱۸} + ج_{۱۹} + ج_{۲۰}$$

۳۹۶۔ سلسلہ $ج_۱، ج_۲، ج_۳، ج_۴، ج_۵، ج_۶، ج_۷، ج_۸، ج_۹، ج_{۱۰}, ج_{۱۱}, ج_{۱۲}, ج_{۱۳}, ج_{۱۴}, ج_{۱۵}, ج_{۱۶}, ج_{۱۷}, ج_{۱۸}, ج_{۱۹}, ج_{۲۰}$

کی ۲۰ رقموں کا ماحصل جمع $ج_۱$ کے فرقوں کی رقوم میں معلوم

نقص کرو کہ سلسلہ $ج_۱، ج_۲، ج_۳، ج_۴، ج_۵، ج_۶، ج_۷، ج_۸، ج_۹, ج_{۱۰}, ج_{۱۱}, ج_{۱۲}, ج_{۱۳}, ج_{۱۴}, ج_{۱۵}, ج_{۱۶}, ج_{۱۷}, ج_{۱۸}, ج_{۱۹}, ج_{۲۰}$ سلسلہ ذیل

کے فرقوں کے پہلے رتبہ کا سلسلہ ہے۔

$$تب \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۳} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۷} + \frac{۱}{۱۸} + \frac{۱}{۱۹} + \frac{۱}{۲۰}$$

پس سلسلوں

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

میں ضابطہ تکوین وہی ہے جو دفعہ گذشتہ میں تھا۔

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

دفعہ ہذا اور دفعہ ماقبل کے ضوابط قدرے مختلف شکل میں بطریق ذیل بھی لکھے جاسکتے ہیں۔ اگر کسی مفروضہ سلسلہ کی پہلی رقم کو تبصیر کر اور فرقوں کے متواتر رتبوں کی پہلی رقمیں بالترتیب $1, 2, 3, \dots$ ہوں تو مفروضہ سلسلہ کا n ویں رقم

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

.....

ہوگی اور مفروضہ سلسلہ کی n رقموں کا مجموعہ

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \dots$$

ہوگا۔

مثال۔ سلسلہ ذیل

$$\dots\dots\dots 12, 20, 28, 36, 44, 52, \dots\dots\dots$$

کی عام رقم اور n رقموں کا مجموعہ معلوم کرو
فرقوں کے متواتر رتبے یہ ہیں۔

$$\dots\dots\dots 12, 20, 28, 36, 44, 52, \dots\dots\dots$$

$$12 \quad 20 \quad 28 \quad 36 \quad 44 \quad 52$$

$$6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \quad 16$$

$$2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$$

$$\text{لہذا } n \text{ ویں رقم} = 12 + (n-1)8 + \frac{(n-1)(n-2)2}{2}$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)2}{24}$$

$$= 12n + 4n^2 - 6n + n^3 - 3n^2 + 2n - 1 = n^3 + n^2 + 5n + 6$$

اب n رقموں کا حاصل جمع $12n + 4n^2 - 6n + n^3 - 3n^2 + 2n - 1$ کی
قیمت محسوب کرنے سے بھی معلوم ہو سکتا ہے، لیکن اگر ہم دفعہ
ہذا کا ضابطہ استعمال کریں تو

$$\text{ج} = 12n + \frac{(n-1)(n-2)2}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)2}{24}$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)2}{24}$$

$$= \frac{n}{12} (3n^3 + 6n^2 + 12n + 8)$$

$$= \frac{1}{14} (1 + n) (3n^2 + 2n + 27)$$

۳۹۷۔ یہ امر قابل غور ہے کہ جمع کرنے کا یہ عمل صرف
ایسی صورت میں کام آسکتا ہے جبکہ سلسلہ زیر بحث
ایسا ہو کہ فرقوں کے متوالیہ رتبوں کے لئے سلسلے نکالنے پر
ہم بالآخر ایک ایسے سلسلہ پر پہنچ سکیں جس کی سب رقیبہ
باہم مساوی ہوں، یہ صورت ہمیشہ واقع ہوگی بشرطیکہ سلسلہ کی
ن ویں رقم ن کا کوئی ناطق صحیح تفاعل ہو۔
آسانی کی خاطر ہم صرف تین ابعاد کے تفاعل پر بحث
کریں گے اگرچہ ثبوت کا طریقہ بالکل عام ہے۔
فرض کرو کہ سلسلہ ہے

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) + (n+2) + \dots$$

جہاں $1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) + (n+2) + \dots$
نیز فرض کرو کہ پہلے، دوسرے، تیسرے فرقوں کے رتبوں کا
ن ویں رقیبہ بالترتیب $1, 2, 3$ ہی ہیں۔

$$تب 1 = 1 - 1 + 1 = 1 + (1 + 2 + 3) + (1 + 2) + 1 + 1$$

$$یعنی 1 = 1 + 2 + (1 + 2 + 3) + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$اسی طرح سے 2 = 1 + 1 - 1 + 1 = 1 + 2 + (1 + 2) + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$اور 3 = 1 + 1 - 1 + 1 = 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

یعنی فرقوں کے تیسرے رتبہ میں سب رقوم باہم مساوی ہیں

عام طور پر اگر سلسلہ زیر بحث کی ن ویں رقم ق ابعاد کی ہو تو فرقوں کے ق ویں رتبہ کی رقوم باہم مساوی ہونگی اور برعکس اس کے اگر فرقوں کے ق ویں رتبہ کی رقیں باہم مساوی ہوں تو سلسلہ زیر بحث کی ن ویں رقم ن کا ایک ق ابعاد والا منطق صحیح تفاعل ہوگی۔

مثال - سلسلہ - ۱ - ۳ - ۳ - ۲۲ - ۶۳ - ۱۲۹ - کی ن ویں رقم معلوم کرو

فرقوں کے متواتر رتبے یہ ہیں۔

۲ - ۶ - ۲۰ - ۴۶ - ۶۶ -

۸ - ۱۴ - ۲۰ - ۲۶ -

۶ - ۶ - ۶ -

پس فرقوں کے متواتر رتبہ کی سب رقیں باہم مساوی ہیں۔ اسلئے

ہم فرض کر سکتے ہیں کہ $ع = ۱ + ب + ج + د + ن$ جہاں

۱، ب، ج، د کی قیمتیں دریافت کرنا مقصود ہے۔

ن کی بجائے بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴ رکھنے سے ہمیں چار

ہمزاد مساواتیں ملتی ہیں جن سے $۱ = ۳ - ب = ۲ - ج = ۲ -$

$د = ۱$ حاصل ہوتے ہیں۔

پس سلسلہ بالا کی عام رقم ۳ - ۳ - ۲ - ۲ - ۱ - ہے۔

۳۹۸ - اگر ۱، ن کا ایک ق ابعاد والا منطق صحیح

تفاعل ہو تو سلسلہ

۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱ -

ایک متوالی سلسلہ ہوگا جس کے ربط کا پیمانہ ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ہوگا

فرض کرو کہ سلسلہ بالا کا حاصل جمع ج ہے تب

ج (۱-لا) = ج + (ج-ج) لا + (ج-ج) لا +^{۱+۵}

..... + (ج-ج) لا + (ج-ج) لا +^{۱+۵}

= ج + ج لا + ج لا + + ج لا + ج لا (فرض کو)

یہاں ج = ج-ج، یعنی ج کا بعد ن میں ق-آ
آزری سلسلہ کو ا-لا سے ضرب دینے سے

ج (۱-لا) = ج + (ج-ج) لا + (ج-ج) لا +^{۱+۵}

..... + (ج-ج) لا + (ج-ج) لا +^{۱+۵}

= ج + (ج-ج) لا + ج لا + ج لا + + ج لا + ج لا

+ ج لا^{۱+۵} فرض کو

یہاں ج = ج-ج، یعنی ج کے بعد ن میں ق-آ ہیں

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلہ زیر بحث کو بالترتیب (۱-لا) سے ضرب دینے سے پہلے، دوسرے، تیسرے، حاصل ضربوں

میں لا کے جو سر حاصل ہوں گے وہ بالترتیب سروں کے پہلے، دوسرے، تیسرے فرقوں کے رتبوں کی عام رتبوں کے جڈاگانہ مساوی ہوں گے۔

حسب مفروض ج، ن کا ایک ق اباد والا ناطق صحیح

تفاعل ہے اس لئے (۱-۹) سے ق بار ضرب دینے سے
ہمیں ایک ایسا سلسلہ حاصل ہوگا کہ سوائے شروع کی
اور آخر کی ق رقموں کے سلسلہ کی باقی ماندہ رقمیں سلسلہ
ہندسیہ میں ہوں گی جن میں سے ہر ایک کا ر دہی ہوگا۔
(دیکھو دفعہ ۳۹۷)

پس ج (۱-۹) = ک (۹^ق + ۹^{ق-۱} + + ۹^۱) + ف (۹)

جہاں ک ایک مستقل ہے اور ف (۹) ، حاصل ضرب میں
ابتدائی ق اور آخری ق رقموں کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\therefore \text{ج (۱-۹)} = \frac{\text{ک (۹}^{\text{ق}} - ۹^{\text{ق-۱}})}{۹ - ۱} + \text{ف (۹)}$$

$$\text{یعنی ج} = \frac{\text{ک (۹}^{\text{ق}} - ۹^{\text{ق-۱}}) + \text{ف (۹) (۹ - ۱)}}{۹ - ۱}$$

پس سلسلہ زیر بحث ایک متوالی سلسلہ ہے جسکا پیمانہ ربط

(۱-۹)^{ق-۱} ہے [دیکھو دفعہ ۲۲۵]

اگر عام رقم نہ دی ہو تو ۱ کے ابعاد دفعہ ۳۹۷ کے
طریقے سے آسانی معلوم ہو سکتے ہیں۔

مثال - سلسلہ ذیل

$$۳ + ۵ + ۹ + ۱۵ + ۲۲ + ۳۳ + + ۳۳۳ + ۳۳۳۳ + ۳۳۳۳۳ + \dots$$

اسا تکونی تفاعل معلوم کرو۔

سروں سے متواتر فرقوں کے رتبے بنانے سے ہمیں ذیل
کے سلسلے حاصل ہوتے ہیں۔

۲ ۳ ۶ ۸ ۱۰
۲ ۲ ۲ ۲ ۲

پس ۱، ۲، ۳ کا دو ابعاد والا منطق صحیح تفاعل ہے اور
اس لئے ربط کا پیمانہ (۱-۱) ہے۔ لہذا

$$\text{ج} = ۳ + ۵ + ۹ + ۱۵ + ۲۲ + ۳۳ + \dots$$

$$\text{۲-ج} = ۹ - ۱۵ - ۲۲ - ۳۵ - ۶۹ - \dots$$

$$\text{۳-ج} = ۹ + ۱۵ + ۲۲ + ۳۵ + \dots$$

$$\text{۱-ج} = ۲ - ۵ - ۹ - \dots$$

جمع کرنے سے (۱-۱) ج = ۳ - ۲ + ۳ - ۱

$$\text{ج} = \frac{۳ - ۲ + ۳ - ۱}{(۱-۱)}$$

۳۹۹ - چوبیسویں باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی متوالی
سلسلہ کا تفاعل تکوینی ایک ناظمی کسر ہوتی ہے جس کا
نسب نامہ پیادہ ربط ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ اس پیمانہ ربط کو
اجزائے ضربی (۱-۱) (۱-۱) (۱-۱) (ج-۱) میں
تحویل کیا جاسکتا ہے، تب تفاعل تکوینی ذیل کی شکل کی
جزوی کسر

$$\dots + \frac{ج}{۱-ج} + \frac{ب}{۱-ب} + \frac{ا}{۱-ا}$$

میں علحدہ علحدہ کیا جاسکتا ہے، اب ان کسروں میں سے

جہاں ف (ن) میں ق ابعاد کا تفاعل ہے۔ اس
سلسلہ سے متواتر فرقوں کے رہتے بناؤ، تب ان مختلف رتبوں
کے سلسلوں میں سے کسی ایک سلسلہ کی ہر ایک رقم
دوسروں کے مجموعہ پر مشتمل ہوتی ہے، ایک حصہ وہ جو ابتدائی
سلسلہ کی ۱-۲ کی شکل کی رقم سے حاصل ہوتا ہے
اور دوسرا وہ جو ابتدائی سلسلہ کی ف (ن) کی شکل کی
رقم سے حاصل ہوتا ہے، نیز چونکہ ف (ن) ق ابعاد
کا جملہ ہے اس لئے متواتر فرقوں کے رتبوں کی ہر ایک
رقم کا وہ حصہ جو ف (ن) سے حاصل ہوتا ہے (ق + ۱)
ویں رتبہ سے (اور نیز بعد کے فرقوں کے رتبوں) میں صفر
ہوگا۔ اس لئے یہ سلسلے ہندسی سلسلے ہوں گے جن کی
مشترک نسبت رہوگی (دیکھو دفعہ ۴۰۰)
پس اگر کسی سلسلہ کی چند ابتدائی رقمیں دی ہوئی ہوں
اور ان رقموں کے ف میں فرق کے رہتے سلسلہ ہندسیہ
میں ہوں جس کی مشترک نسبت رہو تو ہم فرض کر سکتے
ہیں کہ دئے ہوئے سلسلہ کی عام رقم

۱۔ 'ف' (ن) ہوگی جہاں 'ف' (ن) 'ن' میں

(بقیہ) ابعاد کا کوئی ناطق صحیح تفاعل ہے۔

مثال - سلسلہ ۱۰، ۳، ۶، ۱۶، ۳۹، ۹۴،

کی کتابیں رقم معلوم کرو۔

مشواتر فرقوں کے تہے یہ ہیں۔

۳۳۵۶ ۱۰۹ ۶ ۳۷۰۱۳

..... '114 6 24 '22

تشریح چوبیسویں باب میں ہو چکی ہے۔ لیکن جب سر تعداد بڑے ہوں تو ربط کا پیمانہ بہت سے پر مشقت حسابی عمل کے بعد حاصل ہوتا ہے۔ پس عام طور پر متواتر فرقوں کے رتبوں کے چند سلسلے لکھ لینا زیادہ مناسب ہوتا ہے تاکہ یہ معلوم ہو سکے کہ آیا کہ کسی ایسے سلسلہ پر پہنچنا ممکن ہے جس کی رقوم کی تفسیر کا قانون از خود بتیں اور ظاہر ہو۔

۳۰۳۔ مذکورہ بالا اصولوں کی مزید توضیح کے لئے ہم چند مثالیں ذیل میں حرج کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ سلسلہ ذیل

$$\dots + \frac{1}{3} \times \frac{11}{5 \times 7} + \frac{1}{3} \times \frac{9}{7 \times 11} + \frac{1}{3} \times \frac{7}{11 \times 13} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{13 \times 17} + \dots$$

کی ن رقوم کا حاصل جمع معلوم کرو۔

$$\text{یہاں } \frac{1}{3} \times \frac{3 + 2n}{n(n+1)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{فرض کرو } \frac{1}{3} + \frac{1}{n} = \frac{3 + 2n}{n(n+1)}$$

$$\text{پس } 1 = 3, \text{ ب} = 1$$

$$\text{اس لئے } \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\text{لہذا حاصل جمع مطلوبہ } = \text{ج} = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{n+1}$$

مثال ۲۔ سلسلہ ذیل

$$\dots + \frac{4}{10 \times 11 \times 6 \times 3} + \frac{5}{11 \times 6 \times 3} + \frac{3}{6 \times 3} + \frac{1}{3}$$

کی ن رقوم کا حاصل جمع معلوم کرو۔

کی ن، دیں رقم معلوم کرتے ہیں جو $ن + ۲ + ۱$ ہے،
نیز سلسلہ

..... ۹، ۲۱، ۳۷، ۵۷، ۸۱،

کی ن دیں رقم $ن + ۲ + ۱$ ہے۔

اسلئے $ع = (ن + ۱)(ن + ۲) \{ ۱ + (ن + ۳) \}$

$۲ن(ن + ۱)(ن + ۲) (ن + ۳) + (ن + ۱)(ن + ۲)$

∴ ج = $\frac{۲}{۵} ن(ن + ۱)(ن + ۲)(ن + ۳)$

مثال ۴۔ سلسلہ ذیل $ن + \frac{۱}{۲} (ن + ۱)(ن + ۲)(ن + ۳) - ۲$

..... $۲ \times ۲ + ۳ \times ۶ + ۴ \times ۱۲ + ۵ \times ۲۰ + ۶ \times ۳۰ + ۲۲ \times ۴۰$

کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

سلسلہ ۲، ۶، ۱۲، ۲۰، ۳۰، کی ن، دیں رقم $ن + ۲$

لہذا $ع = ۲(ن + ۲)$

اب فرض کرو کہ $۲(ن + ۲) = ۲(ن + ۲ + ۱ + ۲ + ۳ + ج)$

$- \{ ۱(ن + ۱) + ۲(ن + ۲) + ۳(ن + ۳) \}$

۱-۳ پر تقسیم کرنے اور ن کی یکساں قوتوں کے سروں کو مسا کرنے سے

$۲ = ۲ + ۲ + ۲ + ج - ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۱۲ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۵ - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۸ - ۶۹ - ۷۰ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۷۴ - ۷۵ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴ - ۹۵ - ۹۶ - ۹۷ - ۹۸ - ۹۹ - ۱۰۰$

∴ $۱ = ۲ - ۲ = ج = ۴$

∴ $ع = ۲(ن + ۲) - ۲(ن + ۲ + ۱ + ۲ + ۳) - ۲(ن + ۱) - ۲(ن + ۲) - ۲(ن + ۳) - ۲(ن + ۴) - ۲(ن + ۵) - ۲(ن + ۶) - ۲(ن + ۷) - ۲(ن + ۸) - ۲(ن + ۹) - ۲(ن + ۱۰) - ۲(ن + ۱۱) - ۲(ن + ۱۲) - ۲(ن + ۱۳) - ۲(ن + ۱۴) - ۲(ن + ۱۵) - ۲(ن + ۱۶) - ۲(ن + ۱۷) - ۲(ن + ۱۸) - ۲(ن + ۱۹) - ۲(ن + ۲۰) - ۲(ن + ۲۱) - ۲(ن + ۲۲) - ۲(ن + ۲۳) - ۲(ن + ۲۴) - ۲(ن + ۲۵) - ۲(ن + ۲۶) - ۲(ن + ۲۷) - ۲(ن + ۲۸) - ۲(ن + ۲۹) - ۲(ن + ۳۰) - ۲(ن + ۳۱) - ۲(ن + ۳۲) - ۲(ن + ۳۳) - ۲(ن + ۳۴) - ۲(ن + ۳۵) - ۲(ن + ۳۶) - ۲(ن + ۳۷) - ۲(ن + ۳۸) - ۲(ن + ۳۹) - ۲(ن + ۴۰) - ۲(ن + ۴۱) - ۲(ن + ۴۲) - ۲(ن + ۴۳) - ۲(ن + ۴۴) - ۲(ن + ۴۵) - ۲(ن + ۴۶) - ۲(ن + ۴۷) - ۲(ن + ۴۸) - ۲(ن + ۴۹) - ۲(ن + ۵۰) - ۲(ن + ۵۱) - ۲(ن + ۵۲) - ۲(ن + ۵۳) - ۲(ن + ۵۴) - ۲(ن + ۵۵) - ۲(ن + ۵۶) - ۲(ن + ۵۷) - ۲(ن + ۵۸) - ۲(ن + ۵۹) - ۲(ن + ۶۰) - ۲(ن + ۶۱) - ۲(ن + ۶۲) - ۲(ن + ۶۳) - ۲(ن + ۶۴) - ۲(ن + ۶۵) - ۲(ن + ۶۶) - ۲(ن + ۶۷) - ۲(ن + ۶۸) - ۲(ن + ۶۹) - ۲(ن + ۷۰) - ۲(ن + ۷۱) - ۲(ن + ۷۲) - ۲(ن + ۷۳) - ۲(ن + ۷۴) - ۲(ن + ۷۵) - ۲(ن + ۷۶) - ۲(ن + ۷۷) - ۲(ن + ۷۸) - ۲(ن + ۷۹) - ۲(ن + ۸۰) - ۲(ن + ۸۱) - ۲(ن + ۸۲) - ۲(ن + ۸۳) - ۲(ن + ۸۴) - ۲(ن + ۸۵) - ۲(ن + ۸۶) - ۲(ن + ۸۷) - ۲(ن + ۸۸) - ۲(ن + ۸۹) - ۲(ن + ۹۰) - ۲(ن + ۹۱) - ۲(ن + ۹۲) - ۲(ن + ۹۳) - ۲(ن + ۹۴) - ۲(ن + ۹۵) - ۲(ن + ۹۶) - ۲(ن + ۹۷) - ۲(ن + ۹۸) - ۲(ن + ۹۹) - ۲(ن + ۱۰۰)$

اور ج = $۲(ن + ۲) - ۲(ن + ۲ + ۱ + ۲ + ۳) - ۲(ن + ۱) - ۲(ن + ۲) - ۲(ن + ۳) - ۲(ن + ۴) - ۲(ن + ۵) - ۲(ن + ۶) - ۲(ن + ۷) - ۲(ن + ۸) - ۲(ن + ۹) - ۲(ن + ۱۰) - ۲(ن + ۱۱) - ۲(ن + ۱۲) - ۲(ن + ۱۳) - ۲(ن + ۱۴) - ۲(ن + ۱۵) - ۲(ن + ۱۶) - ۲(ن + ۱۷) - ۲(ن + ۱۸) - ۲(ن + ۱۹) - ۲(ن + ۲۰) - ۲(ن + ۲۱) - ۲(ن + ۲۲) - ۲(ن + ۲۳) - ۲(ن + ۲۴) - ۲(ن + ۲۵) - ۲(ن + ۲۶) - ۲(ن + ۲۷) - ۲(ن + ۲۸) - ۲(ن + ۲۹) - ۲(ن + ۳۰) - ۲(ن + ۳۱) - ۲(ن + ۳۲) - ۲(ن + ۳۳) - ۲(ن + ۳۴) - ۲(ن + ۳۵) - ۲(ن + ۳۶) - ۲(ن + ۳۷) - ۲(ن + ۳۸) - ۲(ن + ۳۹) - ۲(ن + ۴۰) - ۲(ن + ۴۱) - ۲(ن + ۴۲) - ۲(ن + ۴۳) - ۲(ن + ۴۴) - ۲(ن + ۴۵) - ۲(ن + ۴۶) - ۲(ن + ۴۷) - ۲(ن + ۴۸) - ۲(ن + ۴۹) - ۲(ن + ۵۰) - ۲(ن + ۵۱) - ۲(ن + ۵۲) - ۲(ن + ۵۳) - ۲(ن + ۵۴) - ۲(ن + ۵۵) - ۲(ن + ۵۶) - ۲(ن + ۵۷) - ۲(ن + ۵۸) - ۲(ن + ۵۹) - ۲(ن + ۶۰) - ۲(ن + ۶۱) - ۲(ن + ۶۲) - ۲(ن + ۶۳) - ۲(ن + ۶۴) - ۲(ن + ۶۵) - ۲(ن + ۶۶) - ۲(ن + ۶۷) - ۲(ن + ۶۸) - ۲(ن + ۶۹) - ۲(ن + ۷۰) - ۲(ن + ۷۱) - ۲(ن + ۷۲) - ۲(ن + ۷۳) - ۲(ن + ۷۴) - ۲(ن + ۷۵) - ۲(ن + ۷۶) - ۲(ن + ۷۷) - ۲(ن + ۷۸) - ۲(ن + ۷۹) - ۲(ن + ۸۰) - ۲(ن + ۸۱) - ۲(ن + ۸۲) - ۲(ن + ۸۳) - ۲(ن + ۸۴) - ۲(ن + ۸۵) - ۲(ن + ۸۶) - ۲(ن + ۸۷) - ۲(ن + ۸۸) - ۲(ن + ۸۹) - ۲(ن + ۹۰) - ۲(ن + ۹۱) - ۲(ن + ۹۲) - ۲(ن + ۹۳) - ۲(ن + ۹۴) - ۲(ن + ۹۵) - ۲(ن + ۹۶) - ۲(ن + ۹۷) - ۲(ن + ۹۸) - ۲(ن + ۹۹) - ۲(ن + ۱۰۰)$

امثلہ نمبری ۲۹ (ب)

ذیل کے سلسلوں کی ن ویں رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

- ۱۔ ۱۱۴، ۸۰، ۵۲، ۳۰، ۱۴، ۴
- ۲۔ ۱۹۸، ۱۳۰، ۹۲، ۵۴، ۲۶، ۸
- ۳۔ ۲۵۲، ۱۵۰، ۸۰، ۳۶، ۱۲، ۲
- ۴۔ ۴۳۲، ۲۰۰، ۶۴، ۱۶، ۴
- ۵۔ ۳۳۶، ۱۸۹، ۹۶، ۴۲، ۱۴، ۴

ذیل کے سلسلوں کے ٹکونی تقابل معلوم کرو

- ۶۔ + ۳۱ لا + ۲۱ لا + ۱۳ لا + ۷ لا + ۳ لا + ۱ لا
- ۷۔ + ۵۳ لا + ۳۵ لا + ۲۰ لا + ۹ لا + ۲ لا + ۱ لا
- ۸۔ + ۳۷ لا + ۲۶ لا + ۱۷ لا + ۱۰ لا + ۵ لا + ۲ لا
- ۹۔ + ۱۱ لا + ۹ لا + ۷ لا + ۵ لا + ۳ لا + ۱ لا
- ۱۰۔ + ۵ لا + ۴ لا + ۳ لا + ۲ لا + ۱ لا

ذیل کے لامتناہی سلسلوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

- ۱۱۔ + $\frac{۵ \times ۴}{۳}$ + $\frac{۴ \times ۳}{۳}$ + $\frac{۳ \times ۲}{۳}$ + $\frac{۲ \times ۱}{۳}$
- ۱۲۔ + $\frac{۲۶}{۵}$ - $\frac{۵}{۵}$ + $\frac{۴}{۵}$ - $\frac{۳}{۵}$ + $\frac{۲}{۵}$

ذیل کے سلسلوں کی عام رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

- ۱۳۔ ۱۰۳، ۵۴، ۲۹، ۱۶، ۹
- ۱۴۔ ۱۶، ۸۹، ۳۹، ۱۱، ۱، ۳

- ۱۵ - ۲' ۵' ۱۲' ۳۱' ۸۶'
- ۱۶ - ۱' ۱' ۸' ۲۹' ۸۰' ۱۹۳'
- ۱۷ - ۴' ۱۳' ۲۵' ۹۴' ۲۶۲' ۷۵۵'
- ذیل کے سلسلوں میں سے ہر ایک کی ترقیوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔
- ۱۸ - ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶
- ۱۹ - ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲
- ۲۰ - $\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6}$
- ۲۱ - $\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{7}$
- ۲۲ - $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 6 + 6 \times 7$
- ۲۳ - $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 6 + 6 \times 7 + 7 \times 8$
- ۲۴ - $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 6 + 6 \times 7 + 7 \times 8 + 8 \times 9$
- ۲۵ - $\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9} + \frac{1}{4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9} + \frac{1}{5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9} + \frac{1}{6 \times 7 \times 8 \times 9} + \frac{1}{7 \times 8 \times 9} + \frac{1}{8 \times 9} + \frac{1}{9}$
- ۲۶ - $\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{10}$
- ۲۷ - $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 6 + 6 \times 7 + 7 \times 8 + 8 \times 9 + 9 \times 10$
- ۲۸ - $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 6 + 6 \times 7 + 7 \times 8 + 8 \times 9 + 9 \times 10 + 10 \times 11$
- ۲۹ - $\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18 \times 19 \times 20} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18 \times 19} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18} + \frac{1}{4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18} + \frac{1}{5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18} + \frac{1}{6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18} + \frac{1}{7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18} + \frac{1}{8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18} + \frac{1}{9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18} + \frac{1}{10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18} + \frac{1}{11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18} + \frac{1}{12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18} + \frac{1}{13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18} + \frac{1}{14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18} + \frac{1}{15 \times 16 \times 17 \times 18} + \frac{1}{16 \times 17 \times 18} + \frac{1}{17 \times 18} + \frac{1}{18}$
- ۳۰ - $\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{11} + \frac{1}{11} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{13} + \frac{1}{13} \times \frac{1}{14} + \frac{1}{14} \times \frac{1}{15} + \frac{1}{15} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{17} + \frac{1}{17} \times \frac{1}{18} + \frac{1}{18} \times \frac{1}{19} + \frac{1}{19} \times \frac{1}{20}$

$$-1 \quad \frac{1}{2} \times \frac{2}{5 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{2 \times 3 \times 2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3 \times 2 \times 1}$$

$$-2 \quad \dots + \frac{19}{11} + \frac{11}{5} + \frac{5}{7} + \frac{1}{3}$$

$$-3 \quad \frac{1}{17} \times \frac{29}{5 \times 2 \times 3} + \frac{1}{8} \times \frac{28}{2 \times 3 \times 2} + \frac{1}{4} \times \frac{19}{3 \times 2 \times 1}$$

$$\dots + \frac{1}{32} \times \frac{52}{2 \times 5 \times 2}$$

۴- بہت سے سلسلے ایسے ہیں جو کسی خاص کلمہ کے تحت جمع نہیں کئے جاسکتے۔ بعض اوقات متذکرہ بالا عددوں میں مناسب تغیر ترتیب ل کر نا کافی ہوتا ہے جس صورتوں میں جمع کا عمل چند معلومہ سلسلوں (مثلاً) ملکہ ثنائی کا سلسلہ، لوکارہی سلسلہ، قوت کا سلسلہ، خواص پر مبنی ہوتا ہے۔

مثال ۱- ذیل کے لائقناہی سلسلہ

$$\dots + \frac{48}{5} + \frac{50}{11} + \frac{28}{17} + \frac{12}{11} + \frac{2}{11}$$

حاصل جمع معلوم کرو۔

سلسلہ ۲، ۱۲، ۲۸، ۵۰، ۷۸، کی ن ویں رقم ۳ ن + ۲ - ن

$$\text{لئے } n = \frac{2 - n + 3n}{n} = \frac{2 - n + (1 - n) \cdot 2}{n}$$

$$= \frac{3}{2-n} - \frac{1}{1-n} + \frac{1}{n}$$

کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ... کے برابر فرض کرنے سے

اور علیٰ ہذا قیاس

اور علیٰ ہذا تقیاس

اس سے ج. $r + 9 = (1 - r) r - 9r + 9r =$

مثال ۲۔ اگر $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$

توابع $1^{\text{ج}}$ ، $2^{\text{ج}}$ ، $3^{\text{ج}}$ ، $4^{\text{ج}}$ ، $5^{\text{ج}}$ ، $6^{\text{ج}}$ ، $7^{\text{ج}}$ ، $8^{\text{ج}}$ ، $9^{\text{ج}}$ ، $10^{\text{ج}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

دفعہ ۳۹۸ کی طرح ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{y+1}{y-1} = \dots + \frac{1}{y^3} + \dots + \frac{1}{y^5} + \frac{1}{y^7} + \frac{1}{y^9} + \frac{1}{y^{11}} + \dots$$

نیز ج_۱ + ج_۲ + ... + ج_{۲-۱} + ج_{۲-۱} + ج_{۲-۱} + ... + ج_۱ = (۱+۱)^۲

این دونوں نتیجوں کو باہم ضرب دو، تب سلسلہ زیر بحث $\frac{(1+9)^{10}}{(1-9)^{10}}$

کی بنے $\frac{(2-1-9)^{1+5}}{(9-1)^2}$ اسی تفصیل میں لا^{۱-۵} کے سر کے مساوی

ہے یعنی اس تفصیل کی وہ قسمیں جن سے لائق^۱ حاصل ہو سکتا ہے وہ

$$1 - (1 - \frac{1}{2})^{1-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} - (1 - \frac{1}{2})^{1+\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

∴ دیا ہوا سلسلہ = $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} + \dots$

مثال ۳۔ اگر $b = 1 + 1$ اور n کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

$$b - (n-1)b^{n-1} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} b^{n-2} - \dots$$

$$- \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6} b^{n-3} + \dots$$

کی قیمت معلوم کرو۔
مسئلہ ثنائی کی رو سے

$$1 - n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6} + \dots$$

(۱-لا)، (۱-لا)، (۱-لا)، (۱-لا)، (۱-لا) کی تفصیلوں

میں بالترتیب $1, 1, 1, 1, 1, \dots$

کے سر ہیں؛ پس حاصل جمع مطلوبہ سلسلہ ذیل

$$1 - \frac{1}{b-1} + \frac{1}{(b-1)^2} - \frac{1}{(b-1)^3} + \dots$$

کی تفصیل میں لا کے سر کے مساوی ہے اور اگرچہ دیا ہوا
جلہ رقوم کی ایک محدود تعداد پر مشتمل ہے لیکن ہم اس سلسلہ
کو لامتناہی بھی خیال کر سکتے ہیں۔

$$1 - \frac{1}{b-1} + \frac{1}{(b-1)^2} - \frac{1}{(b-1)^3} + \dots = \frac{1}{b}$$

$$= \frac{1}{b} \text{ کیونکہ } b = 1 + 1$$

لہذا دیا ہوا سلسلہ = لا شکا سر $\frac{1}{(1-1)(1-1)}$ کی تفصیل میں

$$= لا شکا سر \frac{1}{(1-1)(1-1)} - \frac{1}{(1-1)(1-1)} \text{ کی تفصیل میں}$$

$$= \frac{1-1}{1-1}$$

مثال ۴۔ اگر سلسلوں

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots$$

کو بالترتیب ا، ب، ج سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$ا + ب + ج = ۱$$

اگر ایک کا خیالی جذر الکعب سے ہو تو

$$ا + ب + ج = ۱ - ۲ا + ۳ا^2 - ۴ا^3 + \dots$$

$$(ا + ب + ج)$$

$$ا + ب + ج = ۱ - ۲ا + ۳ا^2 - ۴ا^3 + \dots$$

$$اور ا + ب + ج = ۱ - ۲ا + ۳ا^2 - ۴ا^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots$$

$$=$$

مساوی رکھنے سے

$$1 = 1 + r \text{ یعنی } 1 = \frac{1}{1+r}$$

ن^۱ کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$r = \frac{1 + (1+r)^2}{2} + 1 + r \text{ جس سے } 1 = \frac{1}{2}$$

اسی طرح ن^۲ کے سروں کو مساوی رکھو، اور اِسی طرح
ان کی قیمتیں مندرج کرو اور مساوات کے دونوں جانب

بقی

$$\frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^n}$$

سے ضرب دو اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$1 = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \dots + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \dots + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r}$$

(۱) میں ن کی بجائے (ن-۱) رکھنے اور تفریق کرنے سے

$$1 = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \dots + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r}$$

$$1 = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \dots + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r}$$

ن^۲ کے سروں کو مساوی کرنے سے اور اِسی طرح
ان کی قیمتیں مندرج کرنے سے

$$1 = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \dots + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r}$$

(۲) اور (۳) کو بالترتیب جمع کرنے اور تفریق کرنے سے

ان متادیر ب، ب، ب، ب، وغیرہ کو برنولی کے عدد کہتے ہیں، طالب علم جانے تو دوسرے سلسلوں کے جمع کرنے میں ان اعداد اس کے استعمال کے متعلق مزید مثالیں بول کی مصنفہ کتاب محدود فرق (فائی نائیٹ ڈفرنس) میں ملاحظہ کر سکتا ہے۔

مثال - $1 + 2 + 3 + \dots + n$ کی قیمت معلوم کرو

حسب قاعدہ مندرجہ بالا ج = $\frac{n}{4} + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{1} + \frac{n}{4}$

- ب = $\frac{3 \times 2 \times 5}{4} + n$

$$= \frac{n}{4} + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} - \frac{n}{12} - \frac{n}{12} + \frac{n}{12} \text{ (مستقل صفر ہے)}$$

امثلہ نمبری ۲۹ (ج)

ذیل کے سلسلوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

$$(1) \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$(2) \dots + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{2 \times 1}$$

$$(3) \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$(4) \dots + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1}$$

جمع معلوم کرو۔

$$(۱) ۱ + ۲ + ۳ + \dots + n$$

$$(۲) ۱ + ۲ + ۳ + \dots + n$$

(۱۵) سلسلہ ذیل کا حاصل جمع معلوم کرو

$$۱ + ۲ + \frac{۳}{۲} + \frac{۴}{۳} + \frac{۵}{۴} + \dots$$

(۱۶) ثابت کرو کہ $\frac{n}{(۱-n)(۲-n)(۳-n)\dots}$ کی تفصیل میں لاٹکاسر یہ ہے

$$n \left\{ ۱ + \frac{n}{۲} + \frac{n(n-۱)}{۲ \cdot ۳} + \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۲ \cdot ۳ \cdot ۴} + \dots \right\}$$

(۱۷) اگر n ایک مثبت صحیح عدد ہو تو سلسلہ

$$۱ - \frac{n}{۲} + \frac{n(n-۱)}{۲ \cdot ۳} - \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۲ \cdot ۳ \cdot ۴} + \dots$$

کا حاصل جمع معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر n ، ۳ کا کوئی ضعیف ہو تو

$$۱ - \frac{n}{۲} + \frac{n(n-۱)}{۲ \cdot ۳} - \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۲ \cdot ۳ \cdot ۴} + \dots = ۰$$

(۱۸) اگر n کوئی مثبت صحیح عدد ہو جو ۳ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ

$$۱ + \frac{n}{۲} + \frac{n(n-۱)}{۲ \cdot ۳} + \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۲ \cdot ۳ \cdot ۴} + \dots = ۲^n$$

$$= ۲^n (۱ + \frac{n}{۲} + \frac{n(n-۱)}{۲ \cdot ۳} + \dots)$$

(۱۹) ذیل کے دو سلسلوں کی n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

$$(۱) \dots + \frac{۱}{۱+۱} + \frac{۲}{۲+۲+۱} + \frac{۳}{۳+۳+۱} + \dots$$

$$r = \frac{2}{1-r} (r + r^2 + r^3 + \dots) \text{ اور } \frac{1042}{315}$$

(۲۵) اگر 'ن' کا کوئی ضعف ہو تو ثابت کرو کہ ذیل کے دو سلاسل میں سے ہر ایک صفر کے مساوی ہے۔

$$n - \frac{n(1-n)(2-n)}{2} + 3 \times \frac{n(1-n)(2-n)(3-n)}{6}$$

.....

$$n - \frac{1}{3} \times \frac{n(1-n)(2-n)}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{n(1-n)(2-n)(3-n)}{6}$$

.....

(۲۶) اگر 'ن' کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$(f+q)^2 - (1-n)f^2 + \frac{(2-n)(3-n)f^2}{2} + \frac{(3-n)(4-n)f^2}{2}$$

$$\frac{f^2 + 1 + q^2}{f - q} = \dots$$

$$(۲۷) \text{ اگر } r = (n-1)(n-2) \dots (n-r+1) \dots (n-r+1) \dots (n-r+1) \dots (n-r+1)$$

$$q = r(1+r)(2+r) \dots (r+q-1)$$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{f^2 + 1 + q^2}{f - q} = \frac{f^2 + 1 + q^2}{f - q} + \dots + \frac{f^2 + 1 + q^2}{f - q}$$

(۲۸) اگر 'ن' کا کوئی ضعف ہو تو ثابت کرو کہ

$$1 - \frac{n-3}{2} + \frac{(n-4)(n-5)}{2} - \frac{(n-5)(n-6)}{6} + \dots$$

$$+ \frac{(1-n)(2-n) \dots (n-2)(n-1)}{2}$$

سادہ ہے $\frac{3}{7}$ کے اگر ن طاق ہو اور سادہ ہے $\frac{1}{7}$ کے

ن جفت ہو۔ اگر لا کوئی کسر واجب ہو تو ثابت کر دو کہ

$$\dots - \frac{1^0}{1^0 - 1} + \frac{1^2}{1^2 - 1} - \frac{1^4}{1^4 - 1}$$

$$\dots + \frac{1^0}{1^0 + 1} + \frac{1^2}{1^2 + 1} + \frac{1^4}{1^4 + 1} =$$



تیسواں باب

عددوں کا نظریہ

۴۰۷۔ اس باب میں ہم لفظ عدد کو مثبت صحیح عدد کے معنوں میں استعمال کریں گے۔ وہ عدد جو سوائے اپنے آپ کے اور ایک کے کسی دوسرے عدد پر پورا تقسیم نہ ہو سکے عدد مفرد یا محض مفرد کہلاتا ہے۔ برعکس اسکے جو عدد اپنے اور ایک کے سوائے کسی دوسرے عدد پر بھی پورا تقسیم ہو سکے مرکب عدد کہلاتا ہے مثلاً ۵۳ عدد مفرد ہے اور ۳۵ عدد مرکب۔ دو عدد جن میں سوائے ایک کے کوئی مشترک جزو ضربی نہ ہو بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد عدد کہلاتے ہیں مثلاً ۲۴ اور ۷۷ بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہیں۔

۴۰۸۔ ہم ذیل کے چند ابتدائی مسائل کو کثرت سے استعمال میں لائیں گے ان میں سے بعض تو عدد مفرد کی تعریف ہی سے اس قدر واضح ہیں کہ ان کو علوم متعارفہ تصور کیا جاسکتا ہے (ا) اگر عدد ۱ ایک حاصل ضرب ب ج کو پورا تقسیم کرے اور حاصل ضرب ب کے ایک جزو ضربی ب سے بلحاظ اسے مفرد ہو تو یہ دوسرے جزو ضربی ج کو پورا تقسیم کرے گا۔ چونکہ ۱ (ب ج) کو پورا تقسیم کرتا ہے اس لئے ۱ کا ہر جزو ضربی ب ج میں شامل ہے نیز چونکہ ۱ بلحاظ ب کے

مغز ہے اس لئے و کا کوئی جزو ضربی ب میں شامل نہیں ہے پس ا کے تمام اجزائے ضربی ج میں موجود ہیں یعنی ا ج کو پورا تقسیم کرتا ہے۔

(۲) اگر ایک عدد مفرد ا حاصل ضرب ب ج د کو پورا تقسیم کرے تو یہ حاصل ضرب مذکور کے ایک جزو ضربی کو پورا تقسیم کرے گا، بنا بریں اگر ایک عدد مفرد ا ب کو پورا تقسیم کرے جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے تو یہ ب کو پورا تقسیم کرے گا۔

(۳) اگر ا بلحاظ ب اور ج دونوں کے مفرد ہو تو یہ حاصل ضرب ب ج کے لحاظ سے بھی مفرد ہوگا، ظاہر ہے کہ ا کا کوئی جزو ضربی ب کو یا ج کو پورا تقسیم نہیں کر سکتا اس لئے حاصل ضرب ب ج ا کے کسی جزو ضربی پر تقسیم نہیں ہو سکتا یعنی ا بلحاظ ب ج کے مفرد ہے، برعکس اس کے اگر ا بلحاظ ب ج کے مفرد ہو تو یہ بلحاظ ب اور ج دونوں کے مفرد ہوگا۔

نیز اگر ا بلحاظ ب ج د میں سے ہر ایک کے مفرد ہو تو یہ بلحاظ حاصل ضرب ب ج د کے مفرد ہوگا اور برعکس اس کے اگر ا کسی عدد کے لحاظ سے مفرد ہو تو یہ اس عدد کے ہر جزو ضربی کے لحاظ سے مفرد ہوگا۔

(۴) اگر ا اور ب بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہوں تو ا کی ہر مثبت صحیح قوت اور ب کی ہر مثبت صحیح قوت بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہونگی، یہ امر از روئے (۳) فوراً واضح ہو جاتا ہے۔

(۵) اگر ا بلحاظ ب کے مفرد ہو تو کسور $\frac{ا}{ب}$ اور $\frac{ا}{ب م}$

ادنیٰ ترین رقوم میں ہونگی یعنی ان کا مزید اختصار نہیں ہو سکیگا، نیز اگر $\frac{ا}{ب}$ اور $\frac{ا}{ج}$ کوئی دو مساوی کسریں ہوں اور

۱۔ ادنیٰ ترین رقوم میں ہو تو ج اور د بالترتیب لا اور ب کے مساوی الضعیف ہونگے۔

۹۔ مفرد عددوں کی تعداد لامتناہی ہے۔

اگر ایسا نہیں ہے تو فرض کرو کہ سب سے بڑا مفرد عدد

ف ہے، تب حاصل ضرب $۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ \times \dots$ ف

جسکا ہر جزو ضربی عدد مفرد ہے، ان کے ضربی ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ... ف

میں سے ہر ایک پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے، اس لئے حاصل

ضرب مذکور میں ایک جمع کر دینے سے جو عدد حاصل ہوگا

وہ ان کے ضربی ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ... ف میں سے کسی پر بھی

پورا تقسیم نہیں ہو سکیگا لہذا یا تو یہ حاصل ضرب خود مفرد

ہے یا ف سے کسی بڑے عدد مفرد پر تقسیم ہوتا ہے ظاہر

ہے کہ دونوں صورتوں میں ف سب سے بڑا مفرد عدد

نہیں ہو سکتا، پس اعداد مفرد کی تعداد غیر محدود ہے۔

۱۰۔ کوئی ناطق جبرہ ضابطہ ایسا نہیں ہے جو محض

مفرد عددوں کو تعبیر کرے۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ضابطہ

$$۱ + ب + لا + ج + لا + د + لا + \dots$$

محض مفرد اعداد کو تعبیر کرتا ہے۔

اگر لا = م تو فرض کرو کہ اس جملہ کی قیمت ف کے

مساوی ہے، یعنی

$$ف = ۱ + ب + م + ج + م + د + م + \dots$$

جب لا = م + ن + ن، تو جملہ مذکور ہو جاتا ہے

۱+ب (م+ن+ف) + ج (م+ن+ف) + د (م+ن+ف) +
 یعنی = ۱+ب م + ج م + د م + + ن کا کوئی ضعف
 یعنی = ن + ن کا کوئی ضعف
 پس جملہ مذکورہ ن پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے اور اسلئے عدد
 مفرد نہیں ہے۔

۴۱۱۔ کوئی عدد اپنے مفرد اجزائے ضربی میں صرف ایک طریقہ
 سے تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

عدد مذکور کو ع سے تقسیم کرو اور فرض کرو کہ ع = ۱+ب م + ج م + د م
 جہاں ۱+ب م + ج م + د م اعداد مفرد ہیں،

نیز فرض کرو کہ ع = ع م + ب م + ج م + د م +
 جہاں ع م + ب م + ج م + د م کوئی اور اعداد مفرد ہیں۔

تب ۱+ب م + ج م + د م + = ع م + ب م + ج م + د م +
 اس لئے ع حاصل ضرب ۱+ب م + ج م + د م کو پورا تقسیم
 کرتا ہے لیکن چونکہ اس حاصل ضرب کا ہر جزو ضربی مفرد
 ہے، اس لئے ع ان اجزائے ضربی میں سے صرف ایک کو
 (فرض کرو کہ ۱+ب م) پورا تقسیم کرتا ہے لیکن ع اور ۱+ب م دونوں
 مفرد ہیں اس لئے ع لازماً ۱ کے مساوی ہوگا۔

پس ۱+ب م + ج م + د م = ب م + ج م + د م اور حسب سابق ب م حاصل ضرب
 ۱+ب م + ج م + د م کے اجزائے ضربی میں سے ایک جزو ضربی
 (فرض کرو کہ ب م) کے مساوی ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس، لہذا ع م + ب م + ج م + د م
 کے اجزائے ضربی ۱+ب م + ج م + د م کے اجزائے ضربی کے
 مساوی ہیں۔ پس ع کے مفرد اجزائے ضربی کا صرف
 ایک ہی جٹ ہے۔

۴۱۲۔ کسی عدد مرکب کے جو مختلف مقسوم علیہ ہوسکتے

ہیں ان کی تعداد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ عدد زیر بحث E ہے اور $E = 10^a \times 2^b \times 3^c \times \dots$
 جہاں 10^a ، 2^b ، 3^c ، \dots مختلف اعداد مفرد ہیں اور F ،
 G ، H ، \dots مثبت صحیح اعداد ہیں، تب ظاہر ہے کہ حاصل
 ضرب
 $(1 + 10^a + 10^{2a} + \dots)(1 + 2^b + 2^{2b} + \dots)(1 + 3^c + 3^{2c} + \dots)(1 + \dots)$

کی ہر ایک رقم عدد مذکور کو تقسیم کرتی ہے ان کے علاوہ اور
 کوئی عدد مقسوم علیہ نہیں ہے، پس مقسوم علیہوں کی
 تعداد حاصل ضرب مذکورہ کی کل رقموں کی تعداد کے مساوی
 ہے یعنی

$(1 + 10^a + 10^{2a} + \dots)(1 + 2^b + 2^{2b} + \dots)(1 + 3^c + 3^{2c} + \dots)(1 + \dots)$
 ہے، اس تعداد میں خود عدد اور مقسوم علیہ ایک بھی شامل
 ہیں۔

۴۱۳۔ کوئی عدد مرکب جن مختلف طریقوں سے دو اجزاء
 ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے۔ ان کی تعداد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ عدد E ہے اور $E = 10^a \times 2^b \times 3^c \times \dots$ جہاں
 10^a ، 2^b ، 3^c ، \dots مختلف اعداد مفرد ہیں اور F ، G ، H ، \dots
 مثبت صحیح عدد ہیں۔
 تب حاصل ضرب

$(1 + 10^a + 10^{2a} + \dots)(1 + 2^b + 2^{2b} + \dots)(1 + 3^c + 3^{2c} + \dots)(1 + \dots)$

.....

کی ہر ایک رقم E کا ایک مقسوم علیہ ہے، لیکن E کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کے ہر ایک طریقہ کے جواب میں دو مقسوم علیہ ہیں۔ لہذا

تعداد مطلوبہ $\frac{1}{p} (1 + F)(1 + Q)(1 + R) \dots$ ہے۔

اس میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ E پورا مربع نہیں ہے گویا اعداد F, Q, R, \dots میں سے کم از کم ایک عدد طاق ہے اگر E پورا مربع ہو تو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کا ایک

طریقہ $\overline{AE} \times \overline{AE}$ ہے اور اس طریقہ کے جواب میں صرف

ایک مقسوم علیہ \overline{AE} ہے اگر ہم اس کو نکال دیں تو تحلیل کے طریقوں کی تعداد

$$\frac{1}{p} \{ (1 + F)(1 + Q)(1 + R) \dots - 1 \}$$

رہ جاتی ہے، اس میں ہمیں $\overline{AE} \times \overline{AE}$ کا ایک طریقہ جمع کرنا چاہئے اسی طرح سے ہمیں مطلوبہ تعداد

$$\frac{1}{p} \{ (1 + F)(1 + Q)(1 + R) \dots + 1 \}$$

حاصل ہوتی ہے۔
۴۱۴۔ ایک عدد مرکب کتنے طریقوں سے دو ایسے اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے جو بلحاظ ایک دوسرے کے منفرد ہوں۔

حسب سابق فرض کر دو کہ عدد $E = R \cdot Q \cdot J \dots$

مذکورہ دو اجزائے ضربی میں سے ایک میں لازماً $\frac{1}{2}$ واقع ہوگا کیونکہ اگر ایسا نہ ہوتا تو کسی کوئی قوت ایک جزو ضربی میں شامل ہوگی اور کوئی اور قوت دوسری میں اور اس طرح سے یہ دو اجزائے ضربی لمحاظ ایک دوسرے کے مفرد نہیں ہوں گے۔
اسی طرح $\frac{1}{3}$ بھی صرف ایک جزو ضربی میں شامل ہوگا اور علیٰ ذہن القیاس

میں مطلوبہ تعداد اُن طریقوں کی تعداد کے مساوی ہے جنہیں حاصل ضرب $a \times b \times c \times \dots$ کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے، یعنی طریقوں کی تعداد

$\frac{1}{4}(1+1)(1+1)(1+1) \dots$ یعنی 2^3 کے مساوی ہے
 جہاں ن، ع کے مختلف مفرد اجزائے ضربی کی تعداد کے
 مساوی ہے۔

۴۱۵۔ ایک عدد کے مقسوم علیہوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔
 فرض کرو کہ عدد مذکور حسب سابق 10^7 ج..... ہے

تب مائل ضرب

کی ہر ایک رقم ایک مقسوم علیہ ہے، اس لئے مقسوم علیہوں کا حاصل جمع اس حاصل ضرب کے مساوی ہے، یعنی حاصل جمع مطلوبہ

$$\frac{1 - j^{n+1}}{1 - j} \times \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b} \times \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c} =$$

مثال ۱۔ عدد ۲۱۶۰۰ پر غور کرو۔

چونکہ $5 \times 3 \times 2 = 5 \times 2 \times 3 \times 2 = 10 \times 6 = 21600$

مقسوم علیہوں کی تعداد $= (1+2)(1+3)(1+5) = 6$

مقسوم علیہوں کا حاصل جمع $= \frac{1-5}{1-5} \times \frac{1-3}{1-3} \times \frac{1-2}{1-2}$

$$= 120 = 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

نیز ۲۱۶۰۰ دو ایسے اجزاء ضربی میں جو بلحاظ ایک دوسرے کے منقسم ہوں $1-3$ یعنی ۳ طریقوں سے تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

مثال ۲۔ اگر n طاق ہو تو ثابت کرو کہ $n(n-1)$ پر ۲۴

تقسیم ہو سکتا ہے ظاہر ہے کہ $n(n-1) = n(n-1)(1+n)$

چونکہ n طاق ہے اس لئے $(n-1)$ اور $(1+n)$ دو متصل

جفت عدد ہیں، اس لئے ان میں سے ایک عدد ۲ پر اور دوسرے

۳ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

نیز $n(n-1)(1+n)$ تین متصل عدد ہیں، اس لئے ان میں

سے ایک ۳ پر تقسیم ہو سکتا ہے، لہذا جملہ بالا ۲، ۳ اور ۴ کے

حاصل ضرب یعنی ۲۴ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے۔

مثال ۳۔ ۳ کی بڑی سے بڑی قوت معلوم کرو جو $n!$ میں

شامل ہے۔ پہلے ۱۰۰ عددوں میں سے اتنے عدد ۳ پر تقسیم ہو سکتے

ہیں جتنی بار کہ ۳۰۰ میں آسکتا ہے، یعنی ۳۳ عدد ۳ پر تقسیم

ہو سکتے ہیں۔ یہ اعداد ۳، ۶، ۹، ۱۲، ۹۹ ہیں، ان عددوں

میں سے بعض میں جزو ضربی ۳ دو دفعہ آتا ہے مثلاً ۹، ۱۸، ۲۷، ...

میں ایسے عددوں کی تعداد اس خارج قسمت کے مساوی ہے جو ۱۰۰ کو ۹ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے، بعض ایسے ہیں جن میں جزو ضربی ۳ تین بار شامل ہے مثلاً ۲۷، ۵۴، ۸۱، ...

ان کی تعداد ۱۰۰ ÷ ۲ = ۵۰ کے خارج قسمت کے برابر ہے وہ عدد جس میں جزو ضربی ۳ چار بار آتا ہے وہ صرف ایک عدد ہے۔ پس مطلوبہ بڑی سے بڑی قوت = $۲۲ + ۱۱ + ۳ + ۱ = ۳۷$ یہ مشق دفعہ مابعد کے مسئلہ کی ایک خاص صورت ہے۔

۴۱۶۔ مفرد عدد ۱ کی بڑی سے بڑی قوت جو ۱۱ میں شامل ہے اسے معلوم کرو۔

فرض کرو کہ بڑے سے بڑے صحیح عدد جو $\frac{1}{1}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، ... میں شامل ہیں بالترتیب $\left(\frac{1}{1}\right)$ ، $\left(\frac{1}{2}\right)$ ، $\left(\frac{1}{3}\right)$ ، ... سے تعبیر ہوتے ہیں، تب اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ۱۱ میں $\left(\frac{1}{1}\right)$ سے مدد یہ ہیں جن میں ۱ کم از کم ایک بار شامل ہوتا ہے، یہ اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ ہیں، اسی طرح $\left(\frac{1}{2}\right)$ سے مدد یہ ہیں جن میں ۲ کم از کم ایک بار شامل ہوتا ہے، اور $\left(\frac{1}{3}\right)$ سے مدد یہ ہیں جن میں ۳ کم از کم ایک بار شامل ہوتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس، پس ۱ کی بڑی سے بڑی قوت جو ۱۱ میں شامل ہے یہ ہے

$$\left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{11}\right) + \dots$$

۴۱۷۔ اس باب کے باقی حصہ میں سہولت کی خاطر ن کے کسی ضعف کو ضعف (ن) سے تعبیر کیا جائے گا۔

۴۱۸۔ ثابت کرو کہ متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب ۱ پر

پورا تقسیم ہوتا ہے متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب ضی ہے
 جہاں n ان اعداد میں سب سے چھوٹا ہے
 تب ضی = $n(1+n)(2+n) \dots (n-1+n)$

اور ضی_۱ = $(1+n)(2+n) \dots (n-1+n)$

$$n \text{ ضی} = (1+n) \text{ ضی} = n \text{ ضی} + r \text{ ضی}$$

$$n \text{ ضی} = \text{ضی} - \frac{\text{ضی}}{n} \times r$$

$(1+n) =$ متصل صحیح اعداد کے حاصل ضرب کا رہ گیا۔
 پس اگر $(1+n)$ متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب لے کر تقسیم ہو جائے تو

$$\text{ضی} = \text{ضی} - r \text{ ضعف } (1+n)$$

$$= \text{ضعف } (1+n)$$

اب ضی = $(1+n)$ ، اس لئے ضی، $(1+n)$ کا ضعف ہے، بنا بریں
 ضی، ضی_۱ بھی $(1+n)$ کے ضعف ہیں۔ اس طرح ہم نے یہ
 ثابت کر دیا ہے کہ اگر $(1+n)$ متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب
 لے کر پورا تقسیم ہو جائے تو متصل صحیح اعداد کا حاصل
 ضرب لے کر پورا تقسیم ہو جائیگا۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ
 ہر دو متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب لے کر تقسیم ہو جاتا
 ہے، اس لئے ہر تین متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب لے کر
 تقسیم ہو سکتا ہے، اور علیٰ ہذا قیاس کر سکتے ہیں۔

اس مسئلہ کو اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں۔
 دفعہ ۴۱۶ کے مطابق ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ہر ایک مفرد

جزو ضربی (ن) + لے میں کم از کم اتنی بار شامل ہوتا ہے جتنی بار کہ یہ (ن) لے میں شامل ہوتا ہے اسے ہم طالب علم کے لئے بطور مشق کے چھوڑتے ہیں۔

۹۴- اگر ف کوئی مفرد صحیح عدد ہو تو (ل + ب) کی تفصیل میں پہلی اور آخری رقم کے سوائے باقی سب رقم کے سر ف پر تقسیم ہو سکتے ہیں۔

پہلی اور آخری رقم کے سوائے ہر ایک رقم کا سر

ف (ن-۱) (ف-۲) (ف-ل) (ل+۱)

کی شکل کا ہے جہاں ل کوئی ایسا صحیح عدد ہو سکتا ہے جو ف-۱ سے بڑا نہ ہو۔ اب یہ جملہ ایک صحیح عدد ہے نیز چونکہ ف عدد مفرد ہے اس لئے ل کا کوئی جزو ضربی اسکا مقسوم علیہ نہیں ہو سکتا۔ اور چونکہ ف بڑا ہے ل سے اسلئے ل کے کسی جزو ضربی کو تقسیم نہیں کر سکتا یعنی

(ف-۱) (ف-۲) (ف-۳) (ف-ل) (ل+۱) لازماً ل پر تقسیم ہو سکتا ہے، لہذا ابتدائی اور آخری رقم کے سوائے ہر رقم کا سر ف پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

۲۰۴- اگر ف کوئی عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ

(ل+ب+ج+د+....) = ل + ب + ج + د + ... + ضعف (ف)

ب + ج + د + ... کی بجائے یہ رکھو

تب حسب دفعہ ماقبل (ل + ب) = ل + ب + ضعف (ف)

نیز ب = (ب + ج + د + ... + ل) = فرض کرو (ب + ج +

= ب + ج + د + ... + ضعف (ف)

اسی طرح مسلسل عمل کرنے سے ہم مطلوبہ نتیجہ پر پہنچ جاتے ہیں
۴۲۱۔ (فرما کا مسئلہ)۔ اگر ف کوئی عدد مفرد ہو اور عدد
ع مفرد ہو بلحاظ ف کے، تو $ع^1 - ۱ = ف$ کا کوئی

ضعیف ہوگا
ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

(۱ + ب + ج + د + + ف + ب + ج + د + + ضعیف ف)
فرض کرو کہ مقادیر ۱، ب، ج، د، وغیرہ میں سے ہر ایک
مقدار کے مساوی ہے اور ان کی تعداد ع ہے، تب

$$ع^1 = ع + ضعیف (ف)$$

یعنی $ع (ع^1 - ۱) = ضعیف (ف)$

لیکن ع بلحاظ ف کے مفرد ہے اسلئے $ع^1 - ۱$ ، ف کا
ضعیف ہے۔
نتیجہ صحیح۔ چونکہ ف مفرد ہے اسلئے ف۔ کوئی جفت
عدد ہوگا سوائے اس صورت کے جبکہ $ف = ۲$

اس لئے $(ع^1 + \frac{ع^1 - ۱}{۲}) (ع^1 - ۱) = ضعیف (ف)$

لہذا $ع^1 + \frac{ع^1 - ۱}{۲}$ یا $ع^1 - ۱$ ضعیف ہے ف کا

یعنی $ع^1 - ۱ = ک ف$ جہاں ک کوئی مثبت صحیح

عدد ہے۔

۴۲۲۔ یاد رہے کہ دفعہ ۴۲۱ میں یہ بتایا جا چکا ہے کہ
 $ع = ضیف (ف)$ خواہ $ع$ لمخاطف کے مفرد ہو
 یا نہ ہو، یہ نتیجہ اکثر اوقات فرما کے مسئلہ کی نسبت زیادہ
 مفید ثابت ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ $ن - ن = ۲$ پر تقسیم ہو سکتا ہے۔
 چونکہ ۲ عدد مفرد ہے اس لئے $ن - ن = ضیف (۲)$

نیز $ن - ن = ن (ن - ۱) = ن (ن + ۱) (ن - ۱) (ن + ۱)$
 اب $(ن - ۱) (ن + ۱)$ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے، اسلئے
 $ن - ن$ پورا تقسیم ہو سکتا ہے ۲ ، یعنی ۴ پر۔

مثال ۲۔ اگر $ف$ عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ کسی دو اعداد
 کی $ف$ میں قوتوں کا فرق ان اعداد کے فرق سے بقدر $ف$
 کے کسی ضیف کے زیادہ ہوگا۔
 فرض کرو کہ $لا$ اور $ما$ دو عدد ہیں، تب

$لا - لا = ضیف (ف)$ اور $ما - ما = ضیف (ف)$

یعنی $لا - ما - (لا - ما) = ضیف (ف)$ اور یہی ثابت کرنا تھا
 مثال ۳۔ ثابت کرو کہ ہر مربع عدد ۵ یا ۵ ± ۱ کی
 شکل کا ہوتا ہے۔

اگر $ع$ لمخاطف کے مفرد نہ ہو تو $ع = ۵$ ن جہاں $ن$ کوئی مثبت
 صحیح عدد ہے اگر $ع$ لمخاطف کے مفرد ہو تو
 $ع = ۵$ یا فرما کے مسئلہ کی رو سے ۵ کا ضیف ہے،
 پس یا $ع = ۱$ یا $ع = ۱ + ۵$ کا ضیف ہوگا یعنی $ع = ۵ \pm ۱$

مثلاً نمبری ۳ (۱)

۱۔ بتاؤ کہ ان اعداد

- ۷۴۰۸۸، ۱۸۳۷۵، ۴۳۷۴، ۳۶۷۵
کو جداگانہ کن چھوٹے سے چھوٹے اعداد کے ساتھ ضرب دیا جائے
کہ حاصل ضرب پورے مربع بن جائیں۔
۲۔ بتاؤ کہ ان اعداد
- ۷۶۲۳، ۱۰۹۳۵، ۵۳۹۵۳۹
کو جداگانہ کن چھوٹے سے چھوٹے اعداد کے ساتھ ضرب دیا جائے
کہ حاصل ضرب پورے مکعب بن جائیں۔
۳۔ اگر لا اور ما مثبت صحیح عدد ہوں اور لا۔ ما جفت
ہو تو ثابت کرو کہ لا۔ ما، ۴ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔
۴۔ ثابت کرو کہ کسی عدد اور اس کے مربع کا فرق جفت
ہوتا ہے۔
۵۔ اگر ۴ لا۔ ما، ۳ کا ضعف ہو تو ثابت کرو کہ
۴ لا + ۷ لا۔ ما، ۲ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔
۶۔ ۸۰۶۴ کے مقسوم علیہوں کی تعداد معلوم کرو۔
۷۔ عدد ۷۰۵۶ کتنے مختلف طریقوں سے دو اجزائے ضربی
میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔
۸۔ ثابت کرو کہ ۲۴، ۱۵ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔
۹۔ ثابت کرو کہ $n(n+1)(n+5)$ کا ضعف ہے
۱۰۔ ثابت کرو کہ اگر کسی عدد اور اس عدد کے مکعب دونوں
کو ۶ پر تقسیم کیا جائے تو دونوں صورتوں میں وہی باقی حال
ہوتی ہے۔
۱۱۔ اگر n جفت ہو تو ثابت کرو کہ $n(n+20)$ ، ۴۸ پر پورا تقسیم
ہو سکتا ہے۔
۱۲۔ ثابت کرو کہ $n(n-1)(n+3)$ ، ۲۴ پر پورا تقسیم
ہو جاتا ہے۔

- ۱۳۔ اگر n سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ n ۔ $5n + 4$ کا تقسیم ہو سکتا ہے۔
- ۱۴۔ ثابت کرو کہ n کا ضعف ہے۔
- ۱۵۔ اگر n کوئی عدد مفرد ہو جو 3 سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ n ۔ 1 کا کوئی ضعف ہے۔
- ۱۶۔ ثابت کرو کہ n کی تمام قیثوں کے لئے n ۔ 3 پر تقسیم ہو سکتا ہے اور اگر n طاق ہو تو 240 پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔
- ۱۷۔ ثابت کرو کہ اگر دو عدد مفرد 6 سے بڑے ہوں تو ان کے مربعوں کا فرق 24 پر تقسیم ہو سکتا ہے۔
- ۱۸۔ ثابت کرو کہ کوئی مربع عدد $3n$ ۔ 1 کی شکل کا نہیں ہو سکتا۔
- ۱۹۔ ثابت کرو کہ ہر مکعب عدد $9n$ یا $9n \pm 1$ کی شکل کا ہوتا ہے۔
- ۲۰۔ ثابت کرو کہ اگر کسی مکعب عدد کو 2 پر تقسیم کیا جائے تو باقی 1 یا 8 بچے گی۔
- ۲۱۔ اگر ایک عدد مربع بھی ہو اور مکعب بھی تو ثابت کرو کہ یہ $72n$ یا $72n + 1$ کی شکل کا ہو گا۔
- ۲۲۔ ثابت کرو کہ کوئی مثلث عدد $3n$ نہیں ہو سکتا۔
- ۲۳۔ اگر n کوئی عدد مفرد ہو تو n ۔ 1 کا تقسیم ہو سکتا ہے۔
- ۲۴۔ ثابت کرو کہ n اور $n + 1$ کے درمیان میں کوئی عدد نہیں ہو سکتا۔

- ۲۵۔ ثابت کرو کہ ہر طاق عدد کی جفت قوت ۸ اور ۱ کی شکل کی ہوتی ہے۔
- ۲۶۔ ثابت کرو کہ کسی عدد کی ۱۲ ویں قوت ۱۳ ان ۱۴ ان کی شکل کی ہوتی ہے۔
- ۲۷۔ ثابت کرو کہ کسی عدد کی ۸ ویں قوت ۹ ان ۱۰ ان ۱۱ ان کی شکل کی ہوتی ہے۔
- ۲۸۔ اگر n کوئی عدد مفرد ہو جو ۵ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ n^2 پر تقسیم ہو سکتا ہے۔
- ۲۹۔ اگر n کوئی مفرد عدد ہو جو ۳ سے بڑا ہو بشرطیکہ n نہ ہو تو ثابت کرو کہ n^2 پر تقسیم ہو سکتا ہے۔
- ۳۰۔ اگر n بلحاظ ۳، ۴، ۵ اور ۶ سے مفرد ہو تو ثابت کرو کہ n^2 پر ۳۰ تقسیم ہو سکتا ہے۔
- ۳۱۔ اگر $(n^2 + 1)$ اور $(n^2 + 4)$ دونوں مفرد عدد ہوں تو ثابت کرو کہ n^2 پر تقسیم ہو سکتا ہے۔ $(n^2 + 1)$ اور $(n^2 + 4)$ پر بشرطیکہ n بلحاظ ۲، ۳، ۴ اور ۵ سے مفرد ہو۔
- ۳۲۔ اگر n عدد مفرد ہو اور n^2 بلحاظ ۴ کے مفرد ہو تو ثابت کرو کہ n^2 پر تقسیم ہو جاتا ہے n^2 پر۔
- ۳۳۔ اگر m ایک عدد مفرد ہو اور n اور b دو اور عدد ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(n^2 + 1) + (n^2 + 4) + (n^2 + 9) + \dots + (n^2 + (m-1)^2) = m \cdot n^2$$

م کا نصف ہوگا۔
۳۴۔ اگر n کوئی عدد ہو تو کوئی اور عدد x اس شکلیں
 $x = n^2 + b$ میں لکھا جاسکتا ہے جہاں b اور n

بالترتیب خارج قسمت اور باقی ہیں جو α کو α پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ عدد α کو جس کے ساتھ کوئی اور عدد اس طرح منسوب کیا جاتا ہے مقیاس کہتے ہیں۔ بلحاظ کسی خاص مقیاس کے عدد α کی مختلف شکلیں ہیں جن میں سے ہر ایک شکل باقی β کی مختلف قیمتوں کے جواب میں پیدا ہوتی ہے مثلاً مقیاس ۳ کے جواب میں 3α ، $3\alpha + 1$ ، $3\alpha + 2$ کی شکل کے عدد ہیں۔ ان کو اختصاراً 3α ، $3\alpha + 1$ ، $3\alpha + 2$ لکھ سکتے ہیں کیونکہ

$3\alpha + 2 = 3(\alpha + 1) - 1$ ، اسی طرح سے مقیاس ۵ کے جواب میں عدد α ذیل کی پانچ شکلوں 5α ، $5\alpha + 1$ ، $5\alpha + 2$ ، $5\alpha + 3$ ، $5\alpha + 4$ میں سے کسی ایک شکل کا ہوگا۔

۴۲۴۔ اگر β اور γ دو ایسے صحیح عدد ہوں کہ اگر α کو α پر تقسیم کیا جائے تو وہی باقی بے تو ان عدوں کو بلحاظ مقیاس α کے مستطابق کہتے ہیں۔ اس صورت میں $\beta - \gamma$ کا ضعف ہوگا۔ گاس کی ترقیم کے موافق ہم اس کو بعض اوقات یوں تحریر کریں گے۔

$\beta \equiv \gamma \pmod{\alpha}$ یا $\beta - \gamma \equiv 0 \pmod{\alpha}$ ۔
ان ضابطوں میں سے ہر ایک ضابطہ مستطابق کہلاتا ہے۔
۴۲۵۔ اگر بلحاظ مقیاس α کے β اور γ مستطابق ہوں تو β اور γ مستطابق ہونگے جہاں α کوئی صحیح عدد ہے۔

حسب مفروض $\beta - \gamma \equiv 0 \pmod{\alpha}$ جہاں α کوئی صحیح عدد ہے اسلئے $\beta - \gamma = \alpha$ ، پس مسئلہ ثابت ہوا۔
۴۲۶۔ اگر α بلحاظ β کے مفرد ہو تو تقادیر
 α ، 2α ، 3α ، (ب۔ ۱) α

کو ب پر تقسیم کرنے سے جو باقیات حاصل ہوں گی وہ سب مختلف ہوں گی۔
 اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ جب دو مقادیر م و اور م و کو ب پر تقسیم کیا جائے تو ایک ہی باقی رہ حاصل ہوتی ہے۔
 تب $م و = ق ب + ر$ اور $م و = ق ب + ر$ یعنی (م-م) = (ق-ق) = (ر-ر)۔
 اس لئے ب (م-م) = (ق-ق) = (ر-ر) کو پورا تقسیم کرتا ہے اور چونکہ ب بلحاظ و کے مفرد ہے اس لئے ب (م-م) کو تقسیم کرتا ہے، لیکن یہ ناممکن ہے کیونکہ م اور م دونوں ب سے کم ہیں۔

پس باقیات سب مختلف ہیں اور چونکہ ان مقداروں میں سے کوئی مقدار ب پر تقسیم نہیں ہو سکتی اس لئے باقیات سلسلہ ۱، ۲، ۳،، ب-۱ کی نہیں ہونگی لیکن ضروری نہیں کہ باقیات اسی ترتیب میں ہوں۔

نتیجہ صریح۔ اگر و بلحاظ ب کے مفرد ہو اور ج کوئی عدد ہو تو ذیل کے سلسلہ حسابیہ

ج (ج+۱) (ج+۲) (ج+۳) ج+(ب-۱) + ج
 کی ب رقموں کو ب پر تقسیم کرنے سے وہی باقیات نکلتی ہیں جو سلسلہ

ج، ج+۱، ج+۲، ج+(ب-۱)

سے نکلتی ہیں اگرچہ ضروری نہیں کہ اسی ترتیب میں ہوں۔
 پس باقیات ۱، ۲،، ب-۱ ہوں گی۔

۴۲۷۔ اگر ب، ب، ب، بلحاظ مقیاس و کے مقادیر

ایک ہی باقی نکلتی ہے، پس

الف-١ (ع-١) = ضيف (ف)

لیکن (ن-۱) بلحاظ ف کے مفرد ہے، اس نے

ع^ق - ۱ = ضعف (ف)

۴۲۹۔ ہم اُن صحیح اعداد کی تعداد کو جو کسی عدد ۱ سے کم ہوں اور بلحاظ اس کے مفرد ہوں فہ (۱) سے تعبیر کر لیتے، مثلاً فہ (۲) = ۱ فہ (۱۳) = ۱۲، فہ (۱۸) = ۶ کیونکہ وہ اعداد جو ۱۸ سے کم ہیں اور بلحاظ ۱۸ کے مفرد ہیں ذیل کے چھ اعداد ۱، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ ہیں، یہ امر قابل غور ہے کہ ہم یہاں ۱ کو سب اعداد کے لحاظ سے مفرد خیال کرتے ہیں۔

۳۴۰۔ ثابت کرو کہ اگر اعداد 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'..... بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہوں تو فہ (ا، ب، ج، د.....)

فہ (ا) × فہ (ب) × فہ (ج) × فہ (د) × ...
 حاصل ضرب ارب پر غور کرو، تب پہلے ارب عدد اب
 سطروں میں اس طرح لکھے جاسکتے ہیں

۱' ۲' کی ۱
۱+۱ ۲+۱ کی ۱+۱
۱+۱۲ ۲+۱۲ کی ۱+۱۲

.....
 (ب-۱) ۱+۱ (ب-۱) ۱+۱ (ب-۱) ۱+۱ ک (ب-۱) ۱+۱
 اس انتصابی ستون پر غور کرو جو ک سے شروع ہوتا ہے
 اگر ک بلحاظ ۱ کے منفرد ہو تو اس ستون کی سب رقمیں

بلحاظ ۱ کے مفرد ہونگی، لیکن اگر ک اور ۱ میں کوئی مشترک جزو ضربی ہو تو اس ستون کا کوئی عدد بلحاظ ۱ کے مفرد نہیں ہوگا۔ اب پہلی قطار میں فہ (۱) عدد ہیں جو بلحاظ ۱ کے مفرد ہیں۔ پس فہ (۱) انتصابی ستون ایسے ہیں جن کی سب رقیں بلحاظ ۱ کے مفرد ہیں۔ فرض کرو کہ وہ ستون جو ک سے شروع ہوتا ہے اسی قسم کا ستون ہے۔ اس ستون کی رقیں سلسلہ حابیہ میں ہیں اور اگر اس سلسلہ کی رقیوں کو ب پر تقسیم کیا جائے تو بالترتیب باقیات ۱، ۲، ۳، (ب-۱) حاصل ہوتی ہیں (دیکھو نتیجہ صریح دفعہ ۴۲۶) پس اس ستون میں فہ (ب) عدد بلحاظ ب کے مفرد ہیں۔

اب فہ (۱) ستون ایسے ہیں جنکی ہر رقم بلحاظ ۱ کے مفرد ہے۔ اور ایسے ہر ستون میں فہ (ب) عدد ہیں جو بلحاظ ب کے مفرد ہیں۔ پس جدول بالا میں کل فہ (۱) \times فہ (ب) عدد ایسے ہیں جو بلحاظ ۱ اور ب دونوں کے مفرد ہیں۔ یعنی بلحاظ ۱ ب کے مفرد ہیں۔ لہذا

$$\text{فہ (۱ ب)} = \text{فہ (۱)} \times \text{فہ (ب)}$$

$$\text{فہ (۱ ب ج د)} = \text{فہ (۱)} \times \text{فہ (ب ج د)}$$

$$= \text{فہ (۱)} \times \text{فہ (ب)} \times \text{فہ (ج د)}$$

$$= \text{فہ (۱)} \times \text{فہ (ب)} \times \text{فہ (ج)} \times \text{فہ (د)}$$

۴۳۱۔ اُن مثبت صحیح اعداد کی تعداد معلوم کرو جو ایک معلوم عدد سے کم ہوں اور بلحاظ اس کے مفرد ہوں

فرض کرو کہ تعداد مذکور ع ہے اور ع = ۱ ب ج چنانچہ

صحیح عددوں کو 'ا'، 'ف'، 'ق'، 'ر'..... سے اور ان کے حامل جمع کو ج سے تعبیر کرو۔ تب

$$ج = ا + ف + ق + ر + (ع-ر) + (ع-ق) + (ع-ف) + (ع-ا)$$

اس سلسلہ میں فہ (ن) نہیں ملتا۔
اس سلسلہ کو الٹا لکھنے سے

$$ج = (ع-ا) + (ع-ف) + (ع-ق) + (ع-ر) + + ر + ق + ف + ا$$

جمع کرنے سے ۲ج = ع + ع + ع + + ع (ع) رقموں تک

$$ج = \frac{1}{2} ع \times فہ (ع)$$

۳۳۲۔ دفعہ گذشتہ سے ظاہر ہے کہ جو عدد ع سے کم ہیں اور بلحاظ اس کے مفرد نہیں ہیں ان کی تعداد

$$= ع - ع (ا - \frac{1}{ا}) (ا - \frac{1}{ب}) (ا - \frac{1}{ج}) (ا - \frac{1}{د}) \dots$$

$$\text{یعنی} = \frac{ع}{ا} + \frac{ع}{ب} + \frac{ع}{ج} + \dots - \frac{ع}{بج} - \frac{ع}{اج} - \frac{ع}{بج} - \dots + \frac{ع}{ابج} + \dots$$

یہاں $\frac{ع}{ر}$ ذیل کے عددوں

$$ا، ۲، ۳، ۴،، \frac{ع}{ر} \times ا$$

کی اس تعداد کو تعبیر کرتا ہے جن میں جزو ضربی ا شامل ہے۔

اور رقم $\frac{ع}{اب}$ عددوں ۱، ۲، ۳، ۴،،

$\frac{ع}{اب} \times ا$ کی اس تعداد کو تعبیر کرتی ہے جنہیں جزو ضربی اب

شامل ہے اور علیٰ ہذا القیاس مزید براں ہر ایک عدد ایک اور

صنف ایک بار شمار میں آتا ہے۔ مثلاً اب کا ہر ایک ضعف ایک مرتبہ ا کے اضعا میں، ایک مرتبہ ب کے اضعا میں اور مشقی طور پر ایک مرتبہ اب کے اضعا میں شامل ہوگا۔ پس کل ایک مرتبہ شمار میں آئے گا اسی طرح اب ج کا ہر ضعف (ا، ب، ج) اضعا میں جن میں بالترتیب

$\frac{ع}{ا}$ ، $\frac{ع}{ب}$ ، $\frac{ع}{ج}$ نہیں ہیں ایک ایک بار آئیں گے

اور اب، زج، ب ج کے اضعا جن میں بالترتیب

$\frac{ع}{اب}$ ، $\frac{ع}{زج}$ ، $\frac{ع}{بج}$ نہیں ہیں ایک ایک بار آئیں گے

اور اب ج کے $\frac{ع}{ابج}$ اضعا میں ایک مرتبہ آئیں گے۔

اس لئے اب ج کا ہر ایک ضعف ۳ - ۲ + ۱ یعنی کل ایک اور صنف ایک دفعہ آئیں گے۔ اسی طرح اور صورتوں پر بحث کی جاسکتی ہے۔

۴۳۳ - [دکسن، کا مسئلہ]۔ اگر ف ایک عدد مفرد ہو تو

۱+ (ف-۱) ف پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

دفعہ ۳۱۴ مشق ۲ کی رو سے

$$\frac{ف-۱}{۱} = (ف-۱) - (ف-۱)(۱-۲) + \frac{(ف-۱)(۱-۲)(۲-۳)}{۲ \times ۱} \times (ف-۳)$$

$$= \frac{(ف-۱)(۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)}{۳} + \dots + \frac{(ف-۱)(۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)\dots(ف-۱)}{۱}$$

اور فرما کے مسئلہ کی رو سے جملوں (ف-۱)، (ف-۲)، (ف-۳)، ...

جبکہ ۱ = ف - ایسا کیونکہ اگر ۱ کو ف پر تقسیم کرنے سے باقی اٹھنے تو

$$۱ - ۱ = ۰ \text{ (مقی ف)}$$

اور چونکہ ف مفرد ہے اس لئے یہ صرف اسی صورت میں ہو سکتا ہے جبکہ ۱ + ۱ = ف یا ۱ - ۱ = ۰ یعنی جبکہ ۱ = ف - ایسا لہذا حامل ضربوں ۱، ۲، ۳، ۴، (ف - ۱) ۱ میں سے صرف ایک حاصل ضرب ایسا ہے جس کو ف پر تقسیم کرنے سے باقی ۱ حاصل ہوتی ہے یعنی سلسلہ (۱) میں جو عدد ہیں ان میں سے ہر ایک کی صورت میں بالاستثنائے پہلے اور آخری عدد کے ہم ایک اور صرف ایک عدد ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ ان دونوں کا حاصل ضرب ضعف (ف) + ۱ کی شکل کا ہو۔

اس لئے صحیح عددوں ۱، ۲، ۳، ۴، (ف - ۱) ۱ میں سے جبکی تعداد جفت ہے دو دو عددوں کو لیکر ایسے زوج بنائے جاسکتے ہیں کہ ہر زوج کا حاصل ضرب ضعف (ف) + ۱ کی شکل کا ہو۔ اس لئے ان سب زوجوں کو باہم ضرب دینے سے

$$۱ + ۱ = ۲ \text{ ضعف (ف) } ۱ + ۱ = ۲ \text{ ضعف (ف) } ۱ + ۱ = ۲ \text{ ضعف (ف) } \dots \dots \dots$$

$$\text{یعنی } ۱ + ۱ = ۲ \text{ ضعف (ف) } ۱ + ۱ = ۲ \text{ ضعف (ف) } ۱ + ۱ = ۲ \text{ ضعف (ف) } \dots \dots \dots$$

$$\text{اس سے } ۱ - ۱ = ۰ \text{ ضعف (ف) } ۱ + ۱ = ۲$$

$$\text{یعنی } ۱ + ۱ = ۲ \text{ ضعف (ف) } ۱ + ۱ = ۲ \text{ ضعف (ف) } ۱ + ۱ = ۲ \text{ ضعف (ف) } \dots \dots \dots$$

نتیجہ صریح - اگر ۱ + ۱ = ۲ عدد مفرد ہو تو (ف) + ۱ = ۲

تقسیم ہو سکتا ہے ۱ + ۱ = ۲

و لیکن کے مسئلہ کی رو سے ۱ + ۱ = ۲ تقسیم ہو سکتا ہے ۱ + ۱ = ۲

$$۱ + ۱ = ۲ \text{ یعنی } ۱ + ۱ = ۲ \text{ یعنی } ۱ + ۱ = ۲ \text{ یعنی } ۱ + ۱ = ۲$$

$$\begin{aligned} (۱۲) \quad & (۱-ن) = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times \dots \times (ن-۱) \times (ن) \\ & = (۱-ن) \times ۲ \times ۳ \times \dots \times (ن-۱) \times (ن) \end{aligned}$$

$$= ن \text{ کا ضعف } + (۱-ن) (۱۲)$$

اس لئے $۱ + (۱-ن) (۱۲)$ تقسیم ہو سکتا ہے $ن$ پر یا
 $۲ + ن$ پر

لہذا $(۱۲) + (۱-ن)$ تقسیم ہو سکتا ہے $۲ + ن$ پر
 ۴۳۵۔ اعداد کے خواص کے متعلق بہت سے مسئلے استقرار
 حساب سے ثابت ہو سکتے ہیں۔
 مثال ۱۔ اگر $ف$ عدد مفرد ہو تو $لا$ ۔ $لا$ ، $ف$ پر تقسیم ہو سکتا ہے۔
 لا۔ $لا$ کو $فا$ (لا) سے تعبیر کرو، تب

$$فا (۱+لا) - فا (لا) = (۱+لا) - (لا) - (لا) - (لا)$$

$$= ف لا - ۱ + \frac{ف (۱-ف)}{۲ \times ۱} + ۲ - ف + \dots + ف لا$$

$ف$ کا ضعف، اگر $ف$ مفرد ہو (دفعہ ۴۱۹)

$$= فا (۱+لا) = فا (لا) + ف کا ضعف$$

اس لئے اگر $فا (لا)$ ، $ف$ پر تقسیم ہو سکے تو $فا (۱+لا)$ بھی $ف$ پر
 تقسیم ہو سکیگا

$$\text{لیکن } فا (۲) = ۲ - ف = ۲ - (۱+۱) - ف$$

اور یہ $ف$ کا ضعف ہے جب $ف$ مفرد ہو (دفعہ ۴۱۹)
 اس لئے $فا (۳)$ ، $ف$ پر تقسیم ہو سکتا ہے، بنا بریں $فا (۴)$ ، $ف$ پر
 تقسیم ہو سکتا ہے۔ علیٰ ہذا قیاس۔ اس لئے یہ مسئلہ ہر صورت
 میں درست ہے۔

اس سے فرما کے مسئلہ کا ایک نیا ثبوت مل جاتا ہے کیونکہ ظاہر ہے کہ اگر لا بلحاظ ف کے مفرد ہو تو لا^۱۔ ا^۱ ف کا ضعف ہوگا۔ مثال ۲۔ ثابت کرو کہ ۲۵^۱ + ۲۲^۱ - ۲۵^۱ پورا تقسیم ہو سکتا

$$۲۵^۱ + ۲۲^۱ - ۲۵^۱ کو فا (ن) سے تقسیم کرو$$

$$\text{تب } فا (ن) = ۲۵^۱ + ۲۲^۱ - ۲۵^۱ = ۲۲^۱ (۱ + ن) - ۲۵^۱$$

$$= ۲۲^۱ - ۲۵^۱ = ۲۲^۱ - ۲۵^۱$$

$$= فا (ن) - ۲۵^۱ = ۲۲^۱ (۱ + ن) - ۲۵^۱ = ۲۲^۱ + ۲۲^۱ ن - ۲۵^۱$$

$$= ۲۲^۱ (۱ + ن) - ۲۵^۱$$

اس لئے اگر فا (ن) ۲۲^۱ پر تقسیم ہو جائے تو فا (ن) + ۱ بھی تقسیم ہو جائیگا، لیکن ہم جانچ کرنے سے دیکھتے ہیں کہ یہ مسئلہ درست ہے جبکہ ن = ۱ اس لئے یہ درست ہوگا جبکہ ن = ۲ اس لئے یہ درست ہوگا جبکہ ن = ۳ اور علیٰ ہذا القیاس، پس یہ ہر صورت میں درست ہے۔

مندرجہ بالا نتیجہ ذیل کے طریقہ سے بھی حاصل ہو سکتا ہے۔

$$۲۵^۱ + ۲۲^۱ - ۲۵^۱ = ۲۲^۱ - ۲۵^۱ = ۲۲^۱ - ۲۵^۱$$

$$= ۲۲^۱ (۱ + ن) - ۲۵^۱ = ۲۲^۱ + ۲۲^۱ ن - ۲۵^۱$$

$$= ۲۲^۱ + ۲۲^۱ ن - ۲۵^۱ = ۲۲^۱ + ۲۲^۱ ن - ۲۵^۱$$

$$= ۲۲^۱ + ۲۲^۱ ن - ۲۵^۱$$

$$= ۲۲^۱ + ۲۲^۱ ن - ۲۵^۱$$

$$= ۲۲^۱ + ۲۲^۱ ن - ۲۵^۱$$

امثلہ نمبری ۳۰ (ب)

- ۱- ثابت کرو کہ $5 + 10 \times 3 + 15$ تقسیم ہو سکتا ہے ۹ پر۔
- ۲- ثابت کرو کہ $5 \times 2 + 5 \times 2 - 5$ ضعف ہے ۲۲ کا۔
- ۳- ثابت کرو کہ $5 + 10 \times 4 + 5$ کو جب ۲۰ پر تقسیم کیا جائے تو باقی ۹ حاصل ہوتی ہے۔
- ۴- ثابت کرو کہ $5 + 10 \times 4 + 5$ کی شکل کا ہے۔
- ۵- اگر n مفرد ہو تو ثابت کرو کہ $2n - 1 + 3$ کا ضعف ہے۔
- ۶- ثابت کرو کہ $1 + 4$ تقسیم ہو سکتا ہے ۳۰ پر۔
- ۷- ثابت کرو کہ $1 - 2$ میں ۲ کی بڑی سے بڑی قوت ۲-۱ ہے۔
- ۸- ثابت کرو کہ $5 + 10 \times 2 + 5$ ضعف ہے ۱۴ کا۔
- ۹- ثابت کرو کہ $5 + 10 \times 3 + 5$ تقسیم ہو سکتا ہے ۱۶۰-۵۶-۵۲-۲۳۳
- ۱۰- ثابت کرو کہ $(1 + 1 + 1 + 1 + 1) - 5$ کی تفصیل میں لا کی طاق قوتوں کے سروں کا حاصل جمع n پر تقسیم ہو سکتا ہے جبکہ n کوئی عدد مفرد ہو بلا استثناء ۵ کے۔
- ۱۱- اگر n سے بڑا کوئی عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ $n - 1$ تقسیم ہو سکتا ہے ۵۰ پر۔
- ۱۲- اگر n کوئی طاق عدد ہو تو ثابت کرو کہ $n + 3 + 2 + 1 - 1$ ضعف ہے ۲۸ کا۔
- ۱۳- اگر n کوئی عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ $(1 + 1) - 1$ کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے سروں کے کسی ضعف کی نسبت بقدر ۱ کے متبادل بڑے چھوٹے ہیں۔
- ۱۴- n ایک عدد مفرد ہے، اور n عددوں کا ایک ایسا

تو کماؤ که ف (س) + ف (س) + ف (س) + ... = ع
نیز ثابت کرد که

$$ف(۱) = \frac{۱}{۱+۱} - ف(۲) + \frac{۱}{۱+۱} ف(۳) - \frac{۱}{۱+۱} ف(۴) + \frac{۱}{۱+۱} ف(۵) - \dots$$

$$= \frac{۱ - ۱}{۱ + ۱} = ۰$$

ج - - + -

اکتیسواں باب

سلسلہ کسور کا عام نظریہ

۴۳۶۔ پچیسویں باب میں ہم نے جن سلسلہ کسروں پر بحث کی ہے وہ اس شکل کی تھیں: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ جہاں $\frac{1}{n}$ کی مثبت صحیح عدد ہیں اور $\frac{1}{n}$ یا کوئی مثبت صحیح عدد ہے یا صفر کے مساوی ہے۔ اب ہم زیادہ عام شکل کی سلسلہ کسروں پر بحث کرتے ہیں۔

۴۳۷۔ سلسلہ کسر کی عام سے عام شکل $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ہے جہاں $\frac{1}{n}$ کی کوئی مقادیر ہیں۔

کسور $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ کو سلسلہ کسر کے اجزائے ترکیبی کہتے ہیں، ہم اپنی توجہ صرف دو صورتوں تک محدود رکھتے ہیں (۱) وہ صورت جس میں ہر جزو ترکیبی کی علامت مثبت ہے (۲) وہ صورت جس میں ہر جزو ترکیبی کی علامت منفی ہے۔

۴۳۸۔ سلسلہ کسر

$$\frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots} =$$

$$\text{لہذا اگر ہم } \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots} = \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots}$$

$$\text{اور } \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots} = \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots}$$

رکھیں تو ظاہر ہے کہ $(1 + \frac{1}{n})$ میں مستحق کا شمار کنندہ اور
نسب ناما اسی کلیہ کے ماتحت بنتے ہیں جو n میں مستحق
کی صورت میں تسلیم کیا گیا تھا۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ یہ کلیہ
تیسرے مستحق کے لئے درست ہے، لہذا یہ چوتھے مستحق
کے لئے درست ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔ پس یہ عام طور پر
درست ہے۔

۲۷۹۔ سلسلہ کسر

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

کی صورت میں ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$\text{اور } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{2}$$

یہ نتیجہ دفعہ اوّل کے نتیجہ سے محض $\frac{1}{2}$ کی علامت بدلنے
سے حاصل ہو سکتا ہے۔

$$۲۸۰۔ \text{سلسلہ کسر } \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

میں ہم دیکھ رہے ہیں کہ

ق۔ لُحْ ق۔ + ب۔ ق۔ اور ل۔ = و۔ ل۔ + ب۔ ل۔

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + Q_2} = \frac{(Q_1 - Q_2) - (Q_1 - Q_2)}{Q_1 + Q_2}$$

$$= \frac{b \cdot \frac{1}{a}}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

لیکن $\frac{b + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{b}} = \frac{b + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{b}}$ جو ایک کسر واجب الہذا

$\frac{Q_{1+}}{L_{1+}} - \frac{Q_n}{L_n}$ تعداد کم ہے $\frac{Q_n}{L_n} - \frac{Q_{1-}}{L_{1-}}$ سے

اور بلحاظ علامت اس سے مختلف ہے۔

اسی قسم کے استدلال سے جو دفعہ ۲۲۵ میں کیا گیا ہے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ طاق رتبہ کا ہر مستحق مسلسل کسر سے بڑا ہوتا ہے اور جفت رتبہ کا ہر مستحق مسلسل کسر سے چھوٹا ہوتا ہے، پس طاق دیں رتبہ کا ہر ایک مستحق جفت دیں رتبہ کے ہر ایک مستحق سے بڑا ہوتا ہے۔

مثلاً $\frac{Q_{1+Q_2}}{L_{1+Q_2}} - \frac{Q_{1+Q_2}}{L_{1+Q_2}}$ مثبت ہے اور $\frac{Q_{1+Q_2}}{L_{1+Q_2}} - \frac{Q_{1+Q_2}}{L_{1+Q_2}}$

$$\text{کم ہے، لہذا } \frac{ق}{ل} \frac{۱+۵۲}{۱+۵۲} > \frac{ق}{ل} \frac{۱-۵۲}{۱-۵۲}$$

$$\text{نیز } \frac{ق}{ل} \frac{۱-۵۲}{۱-۵۲} - \frac{ق}{ل} \frac{۱-۵۲}{۱-۵۲} \text{ مثبت ہے اور } \frac{ق}{ل} \frac{۱-۵۲}{۱-۵۲} - \frac{ق}{ل} \frac{۱-۵۲}{۱-۵۲}$$

$$\text{کم ہے، لہذا } \frac{ق}{ل} \frac{۱-۵۲}{۱-۵۲} < \frac{ق}{ل} \frac{۱-۵۲}{۱-۵۲}$$

پس طاق ویں رتبہ کے سب مستحق سلسل کسر سے بڑے ہوتے ہیں اور ان کی قیمت بتدریج کم ہوتی جاتی ہے۔ لیکن جفت ویں رتبہ کے سب مستحق سلسل کسر سے چھوٹے ہوتے ہیں اور ان کی قیمت بتدریج بڑھتی جاتی ہے۔ تب اب فرض کرو کہ اجزائے ترکیبی کی تعداد لا انتہا ہے، تب طاق ویں رتبہ کے مستحقوں کی کوئی محدود انتہا ہوگی اور جفت ویں رتبہ کے مستحقوں کی بھی کوئی محدود انتہا ہوگی۔ اگر یہ انتہائیں مساوی ہوں تو کسر سلسل کی ایک معین انتہا ہوگی۔ اگر یہ انتہائیں مساوی نہ ہوں یعنی طاق ویں مستحقوں کی انتہا اور ہو اور جفت ویں مستحقوں کی کچھ اور تو سلسل کسر کو اتھرازی کسر کہا جاسکتا ہے، اس صورت میں کسر مذکور دو ایسی مفادیر کو علامتوں کے ذریعہ تعبیر کرتی ہے جن میں سے ایک جفت مستحقوں کی انتہا ہے اور دوسری طاق مستحقوں کی

۴۴۱۔ ثابت کرو کہ سلسل کسر $\frac{ب}{ا}$ $\frac{ب}{ا}$ $\frac{ب}{ا}$ کی ایک معین انتہا ہوگی اگر $\frac{ب}{ا}$ کی انتہا جبکہ لا انتہا

بڑا ہو صفر سے بڑی ہو۔

سلسلہ کسری کی قیمت ایک خاص محدین مقدار ہوگی اگر $\frac{ق}{ل}$ اور $\frac{ق+۱}{ل+۱}$

کی انتہاؤں کا فرق جبکہ $ن$ انتہا بڑا ہو جائے صفر ہو۔

$$اب \frac{ق}{ل} - \frac{ق+۱}{ل+۱} = \frac{ب}{ل} - \frac{ب+۱}{ل+۱} \left(\frac{ق}{ل} - \frac{ق+۱}{ل+۱} \right)$$

$$اسی طرح \frac{ق}{ل} - \frac{ق+۱}{ل+۱} = (i-1) \times \frac{ب}{ل} - \frac{ب+۱}{ل+۱}$$

$$\dots \times \frac{ب}{ل} - \frac{ب+۱}{ل+۱} \left(\frac{ق}{ل} - \frac{ق+۱}{ل+۱} \right)$$

$$لیکن \frac{ب}{ل} - \frac{ب+۱}{ل+۱} = \frac{۱}{ل+۱} = \frac{۱}{ل+۱} \times \frac{ب}{ب} = \frac{ب}{ل+۱}$$

$$اور \frac{ب}{ل+۱} = \frac{ب}{ل+۱} \times \frac{۱}{۱} = \frac{ب}{ل+۱}$$

$$= \frac{ب}{ل+۱} + \frac{۱}{ل+۱}$$

نیز ان رقموں میں سے کوئی رقم منفی نہیں ہو سکتی، اسلئے

اگر $\frac{1}{1+n}$ کی انتہا صفر سے بڑی ہو تو $\frac{1}{1+n}$

کی انتہا بھی صفر سے بڑی ہوگی، اس صورت میں

$\frac{1}{1+n}$ کی انتہا ایک سے کم ہوگی۔ لہذا

$\frac{1}{1+n}$ کی قیمت لا انتہا کسور واجب کے

حاصل ضرب کی انتہائی قیمت کے مساوی ہوگی گویا صفر ہوگی۔ یعنی $\frac{1}{1+n}$ اور $\frac{1}{1+n}$ کی انتہائیں ایک ہی

ہوں گی۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔ مثلاً کسیر مسلسل

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1}$$

میں نہسا $\frac{1}{1+n}$ نہسا $\frac{(1+n)(3+n)}{(1+n)^2}$

لہذا کسیر مذکور کی ایک معین انتہا ہے۔

۴۴۴۔ اگر مسلسل کسیر $\frac{1}{1+n}$ $\frac{1}{1+n}$ $\frac{1}{1+n}$

میں ہر ایک جزو ترکیبی کا نسبت نما شمار کنندہ سے کم از کم بقدر ایک کے بڑا ہو تو مستحق مثبت کسیر ہوں گی جو بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب میں ہوں گی۔

سب مفروض $\frac{ب}{ا}$ ، $\frac{ب}{ب}$ ، $\frac{ب}{ج}$ سب واجب
 کسریں ہیں جن میں سے ہر ایک کا قسب کا شمار کنندہ سے
 کم از کم بقدر ایک کے بڑا ہے۔ دوسرا مستحق $\frac{ب}{ب}$ ہے
 $\frac{ب}{ب}$ ۔

اور چونکہ $\frac{ب}{ب}$ سے کم از کم بقدر ا کے بڑا ہے اور $\frac{ب}{ب}$
 کسر واجب ہے اسلئے $\frac{ب}{ب}$ بڑا ہے $\frac{ب}{ب}$ سے، یعنی
 دوسرا مستحق مثبت کسر واجب ہے اسی طرح سے دکھایا
 جاسکتا ہے کہ $\frac{ب}{ب}$ کسر واجب ہے، اس کو ک سے
 $\frac{ب}{ب}$ ۔

تعبیر کرو، تب تیسرا مستحق $\frac{ب}{ج}$ ہے، اس لئے یہ بھی مثبت
 کسر واجب ہے اسی طرح سے یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ

$\frac{ب}{ا}$ ، $\frac{ب}{ب}$ ، $\frac{ب}{ج}$ مثبت کسر واجب ہے اسلئے چوتھا مستحق

$\frac{ب}{د}$ ، $\frac{ب}{ا}$ ، $\frac{ب}{ب}$ ، $\frac{ب}{ج}$ بھی مثبت کسر واجب ہے اور
 علیٰ ہذا قیاس۔

نیز $\frac{ق}{ا}$ ، $\frac{ق}{ب}$ ، $\frac{ق}{ج}$ ، $\frac{ق}{د}$ ، $\frac{ق}{ا}$ ، $\frac{ق}{ب}$ ، $\frac{ق}{ج}$ ، $\frac{ق}{د}$ ۔

$$\frac{\frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱+۵}}{\frac{ب}{۱-۵} - \frac{ب}{۱+۵}} = \frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱+۵}$$

لہذا $\frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱+۵}$ اور $\frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱+۵}$ کی علامت ایک ہے

$$\frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱+۵} = \frac{ب}{۱-۵} - \frac{ب}{۱+۵}$$

لیکن $\frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱+۵} = \frac{ب}{۱-۵} - \frac{ب}{۱+۵}$

یہ مثبت ہے، لہذا $\frac{ق}{۱-۵} < \frac{ق}{۱+۵}$ اور $\frac{ب}{۱-۵} < \frac{ب}{۱+۵}$

اور علیٰ ہذا القیاس - پس مسئلہ ثابت ہوا۔
 نتیجہ صریح - اگر اجزائے ترکیبی کی تعداد لامتناہی ہو تو مستقر
 کسور واجب کا ایک لامتناہی سلسلہ بناتے ہیں جو بلحاظ مقدار
 صعودی ترتیب میں ہوتا ہے اور اس صورت میں کسر مسلسل
 کی انتہا ایک معین مقدار ہوتی ہے جو ایک سے بڑی نہیں
 ہو سکتی۔

۴۴۴ - ضابطہ

$$\frac{ق}{۱-۵} + \frac{ق}{۱+۵} = \frac{ب}{۱-۵} + \frac{ب}{۱+۵}$$

سے ہم بالتواتر جتنے مستقر چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔ تاہم
 بعض صورتوں میں ن وین مستقر کے لئے ایک عام جملہ
 معلوم کیا جاسکتا ہے۔

مثال - $\frac{۶}{۵} - \frac{۶}{۵} = \frac{۶}{۵}$ کا ن وین مستقر معلوم
 ہیں معلوم ہے کہ $\frac{ق}{۱-۵} = \frac{ق}{۱+۵}$ پس شمار کنندہ

کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے سروں کے مساوی ہیں اور
نسب نا $\frac{1+1}{1-1}$ ب لا کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے
سروں کے مساوی ہیں۔

۴۴۴۔ ق اور ل کی عام قیمتوں کی تحقیق کے متعلق
طالب علم کو چاہئے کہ محدود فرقوں (فالی نائٹ ڈفرنسز)
پر کتب ریاضی کا مطالعہ کرے۔ الجبر کے ذریعہ یہ قیمتیں صرف
خاص خاص صورتوں میں معلوم ہوسکتی ہیں۔ ذیل کا طریقہ
بعض اوقات مفید ثابت ہوگا۔

مثال۔ $\frac{1}{1+1} \frac{2}{2+2} \frac{3}{3+3} \dots$
ق اور ل دونوں کے بنانے کا ایک ہی قاعدہ ہے۔ فرض
کرو کہ ان دونوں میں سے کسی کو ع سے تعبیر کیا جاتا ہے،

$$تب \text{ ع} = \text{ن} \text{ ع} + \text{ن} \text{ ع}$$

$$یا \text{ ع} - (\text{ن} + 1) \text{ ع} = - (\text{ع} - \text{ن} \text{ ع})$$

$$اسی طرح \text{ ع} - \text{ن} \text{ ع} = - (\text{ع} - \text{ن} \text{ ع})$$

$$\text{ع} - ۲ \text{ ع} = - (\text{ع} - ۳ \text{ ع})$$

ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{ع} - (\text{ن} + 1) \text{ ع} = - (\text{ع} - ۳ \text{ ع})$$

پہلے دو مستحق $\frac{1}{1}$ اور $\frac{2}{2}$ ہیں، اس لئے

$$ق - (ن + ۱) ق = (۱ - ۱) ق، ل - (ن + ۱) ل = (۱ - ۱) ل$$

$$پس \frac{ق}{۱+ن} - \frac{ق}{۱+ن} = \frac{ق}{۱+ن} - \frac{ق}{۱+ن}، \frac{ل}{۱+ن} - \frac{ل}{۱+ن} = \frac{ل}{۱+ن} - \frac{ل}{۱+ن}$$

$$\frac{ق}{۱+ن} - \frac{ق}{۱+ن} = \frac{ق}{۱+ن} - \frac{ق}{۱+ن}، \frac{ل}{۱+ن} - \frac{ل}{۱+ن} = \frac{ل}{۱+ن} - \frac{ل}{۱+ن}$$

$$\frac{ق}{۱+ن} - \frac{ق}{۱+ن} = \frac{ق}{۱+ن} - \frac{ق}{۱+ن}، \frac{ل}{۱+ن} - \frac{ل}{۱+ن} = \frac{ل}{۱+ن} - \frac{ل}{۱+ن}$$

$$\frac{ق}{۱+ن} - \frac{ق}{۱+ن} = \frac{ق}{۱+ن} - \frac{ق}{۱+ن}، \frac{ل}{۱+ن} - \frac{ل}{۱+ن} = \frac{ل}{۱+ن} - \frac{ل}{۱+ن}$$

$$\frac{ق}{۱+ن} - \frac{ق}{۱+ن} = \frac{ق}{۱+ن} - \frac{ق}{۱+ن}، \frac{ل}{۱+ن} - \frac{ل}{۱+ن} = \frac{ل}{۱+ن} - \frac{ل}{۱+ن}$$

$$\frac{ق}{۱+ن} - \frac{ق}{۱+ن} = \frac{ق}{۱+ن} - \frac{ق}{۱+ن}، \frac{ل}{۱+ن} - \frac{ل}{۱+ن} = \frac{ل}{۱+ن} - \frac{ل}{۱+ن}$$

ن کو لا انتہا بڑا بنانے سے

$$نہا \frac{ق}{ل} = \frac{۱}{۱} \div (۱ - \frac{۱}{ن}) = \frac{۱}{۱-۱/ن} \text{ جو جملہ زیر بحث کی قیمت ہے۔}$$

$$۲۲۵ - \text{اگر مسلسل کسر } \frac{ب}{ا} + \frac{ب}{ا} + \frac{ب}{ا} + \dots \text{ کا}$$

ہر ایک جزو ترکیبی ایک ایسی کسر واجب ہو جس کا شمار کنندہ اور نسب نامہ دونوں صحیح عدد ہوں تو یہ کسر مسلسل متبائن ہوگی۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ کسر مذکور متوافق ہے اور $\frac{ب}{ر}$ کے مساوی ہے جہاں $ر$ اور $ب$ مثبت صحیح اعداد ہیں۔ تب $\frac{ب}{ر} = \frac{ب}{ر+د}$ جہاں $د$ سے لامتناہی کسر مسلسل $\frac{ب}{ر+د}$ مراد ہے، پس $د = \frac{ب}{ر+د} - \frac{ب}{ر}$

$= ج$ (فرض کرو)

اب $د$ ، $ب$ ، $ر$ صحیح عدد ہیں اور $د$ مثبت ہے، اسلئے $ج$ ایک مثبت صحیح عدد ہے، اسی طرح $ج = \frac{ب}{ر+د} - \frac{ب}{ر}$ جہاں $د$ سے لامتناہی کسر مسلسل $\frac{ب}{ر+د}$ مراد ہے،

لہذا $د = \frac{ب}{ر+د} - \frac{ب}{ر} = ج$ (فرض کرو) اور حسب سابق یہ نتیجہ نکل سکتا ہے کہ $د$ مثبت صحیح عدد ہے اور علیٰ تعلقاً نیز $\frac{ب}{ر}$ ، $\frac{ب}{ر+د}$ ، $ج$ ، $د$ سب واجب کسریں ہیں۔ کیونکہ $\frac{ب}{ر}$ کم ہے $\frac{ب}{ر+د}$ سے جو کسر واجب ہے، $ج$ کم ہے

$\frac{ب}{ر+د}$ سے، $د$ کم ہے $\frac{ب}{ر+د}$ سے، وغیرہ وغیرہ

پس $د$ ، $ب$ ، $ج$ ، $د$ ، مثبت صحیح اعداد کا ایک لامتناہی سلسلہ بناتے ہیں اور بلحاظ مقدار نزولی ترتیب میں ہیں، اور

ایسا ہونا ناممکن ہے، پس مفروضہ کسریں مسلسل متوافق نہیں ہو سکتی
مندرجہ بالا نتیجہ اس صورت میں بھی برقرار رہتا ہے اگر بعض
جزو ترکیبی واجب کسریں نہ ہوں بشرطیکہ ایک خاص جزو ترکیبی سے
شروع ہو کر اس کے بعد کے سب اجزائے ترکیبی واجب کسریں
ہوں۔ اسے ہم اس طرح دیکھ سکتے ہیں۔

فرض کرو $\frac{ب}{ا}$ اور بعد کے سب اجزائے ترکیبی واجب
کسریں ہیں، پس جیسا کہ ابھی ہم نے ثابت کیا ہے کہ وہ کسریں مسلسل جو $\frac{ب}{ا}$
سے شروع ہوتی ہے متبائن ہے، اس کو $ک$ سے تعبیر کرو،
تب $\frac{ق}{ل}$ کے جواب میں جو مکمل خارج قسمت ہے وہ $\frac{ق}{ل}$ ہے
اور اس لئے کسریں مسلسل کی قیمت $\frac{ق-۱}{ل-۱} + \frac{ق-۲}{ل-۲} + \dots + \frac{ق-۲}{ل-۲}$ ہے۔

یہ متوافق نہیں ہو سکتی تاوقتیکہ $\frac{ق-۱}{ل-۱}$ برابر نہ ہو $\frac{ق-۲}{ل-۲}$ کے
اور یہ ہو نہیں سکتا تاوقتیکہ $\frac{ق-۲}{ل-۲}$ برابر نہ ہو $\frac{ق-۳}{ل-۳}$ کے

$\frac{ق-۲}{ل-۲}$ برابر نہ ہو $\frac{ق-۳}{ل-۳}$ کے اور بالآخر $\frac{ق-۲}{ل-۲}$ برابر نہ ہو $\frac{ق-۳}{ل-۳}$
کے یعنی $\frac{ب}{ا}$ برابر نہ ہو صفر کے جو ناممکن ہے لہذا مفروضہ
کسر لازماً متبائن ہے۔

۴۴۶ - اگر کسریں مسلسل $\frac{ب}{ا}$ $\frac{ب}{ا}$ $\frac{ب}{ا}$
کا ہر ایک جزو ترکیبی کسر واجب ہو جس کا شمار کنندہ اور نسبنا

صحیح عدد ہوں اور اگر کسی خاص جزو ترکیبی سے شروع ہو کر اس لامتناہی کسری کی قیمت ایک سے کم ہو تو کسری متباہن ہوگی۔
ثبوت کی سلاک استدلال دفعہ ماقبل کی مانند ہے۔

امثلہ نمبری ۳۱ (۱)

۱۔ ثابت کرو کہ کسری سلسل

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

میں $Q = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ اور $L = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

۲۔ $\left(\frac{1+2}{1}\right)$ کو ایک ایسی سلسل کسری شکل میں لاؤ جس میں سب شمار کنندگان ایک کے مساوی ہوں۔
۳۔ ثابت کرو کہ

$$(1) \sqrt{1+2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

$$(2) \sqrt{1-2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots$$

۴۔ کسری سلسل $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ میں اگر ہر ایک جزو ترکیبی کا نسب نما شمار کنندہ سے کم از کم بقدر ایک کے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ Q اور L کی قیمت N کے ساتھ بڑھتی ہے۔
۵۔ اگر $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

۶۔ ثابت کرو کہ

$$r_2 = (1 + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} + \dots) + (-1 - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2} - \dots)$$

اور $(1 + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} + \dots)(-1 - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2} - \dots) = -1 - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2} - \dots$

۷۔ کسر سلسل

$$\frac{b}{1+b} \frac{b}{1+b} \frac{b}{1+b} \dots$$

میں ثابت کرو کہ

$$q = \frac{b}{1+b} \text{ اور } b = \frac{1}{1+q} \text{۔ } q = \frac{b}{1+b} = \frac{b}{1+\frac{1}{1+q}}$$

۸۔ ثابت کرو کہ $\frac{b}{1+b} \frac{b}{1+b} \frac{b}{1+b} \dots = b \times \frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ع_1}{ع_2} \times b$ جہاں $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ب}{ب+1}$ ہے اور $ع_1$ اور $ع_2$ بہ مساوات

کے $1 - b = 0$

کی اصلیں ہیں۔

۹۔ ثابت کرو کہ سلسل کسروں

$$1 + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+b} + \dots \text{ اور } 1 - \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+b} - \dots$$

۱۰۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{(1+n)(2+n)(3+n)}{6} = \frac{(1-n)^2}{(1+n)+n} \dots \frac{1}{-1} \frac{2}{-5} \frac{3}{-13} \frac{4}{-25}$$

$$\frac{n(3+n)}{2} = \frac{1-n}{1+n^2} \dots \frac{2}{-1} \frac{3}{-5} \frac{4}{-13}$$

$$1 + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1+n} + \dots = \frac{1+n}{2+n} \frac{1+n}{-1+n} \dots \frac{2}{-4} \frac{3}{-13} \frac{4}{-25}$$

۱۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{-5} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \frac{1}{-5} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \frac{1}{-5} + \dots$$

۳ ن واں مستحق $\frac{3}{1+3}$ ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{-2} + \frac{1}{-2} + \frac{1}{-2} + \dots = \frac{2}{-2} = -1$ ۔
 پر اس سے حال کرو کہ ہر کی قیمت $\frac{1}{-2}$ اور $\frac{1}{-2}$ کے درمیان
 آتی ہے۔

سلسلوں کی تحویل مسلسل کسروں میں

۳۴۔ یہاں سلسلہ کو ذیل کی شکل

$$\frac{1}{-6} + \frac{1}{-6} + \frac{1}{-6} + \frac{1}{-6} + \dots + \frac{1}{-6} + \frac{1}{-6}$$

ہیں لکھنا سہولت بخش ہے۔

$$\frac{1}{-6} + \frac{1}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{1}{-3}$$

$$2 \left(\frac{1}{-6} + \frac{1}{-6} \right) = \frac{2}{-3} = \frac{1}{-1.5}$$

$$= \frac{1}{-1.5} = \frac{2}{-3}$$

$$\frac{1}{-6} + \frac{1}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{1}{-3}$$

اسی طرح سے

$$\frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2} + \frac{1}{ع_3} = \frac{1}{ع_1 + ع_2 + ع_3} = \frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2} + \frac{1}{ع_3}$$

$$\frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2} + \frac{1}{ع_3} = \frac{1}{ع_1 + ع_2 + ع_3}$$

اور علیٰ ہذا القیاس، اس لئے عام طور پر

$$\frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2} + \frac{1}{ع_3} + \dots + \frac{1}{ع_n}$$

$$= \frac{1}{ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots + ع_n}$$

مثال ۱۔ سلسلہ ذیل

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}$$

کوکیر سلسلہ کی شکل میں لاؤ۔

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+2} \text{ رکھو}$$

$$\text{تب } (1 + 2) (1 - \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}$$

$$\text{اس لئے } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{2+3} - \frac{1}{3+4}$$

$$\text{تیر } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{2+3} - \frac{1}{3+4} + \frac{1}{4+5} - \frac{1}{5+6}$$

بتیلون با

احتمال

۴۴۹۔ اگر کوئی واقعہ دو طریقوں سے واقع ہو سکے اور ب طریقوں سے واقع نہ ہو سکے جبکہ (دفعہ اور عدم دفعہ دونوں کے) ہر طریقہ کا امکان مساوی ہو تو اس کو یوں بیان کرنے ہیں کہ اس واقعہ کے وقوع کا احتمال یا اتفاق $\frac{1}{2}$ ہے اور عدم وقوع کا $\frac{1}{2}$ ۔

مثلاً ایک قزغہ میں ۲۵ انعام ہیں اور باقی ۲۵ خالی ہیں، اگر ایک شخص کے پاس ایک ٹکٹ ہو تو اس کے ایک انعام حاصل کرنے کا اتفاق $\frac{1}{25}$ ہے اور اس کے محروم رہنے کا اتفاق $\frac{24}{25}$ ہے۔ ۴۵۰۔ ریاضی میں احتمال کی مندرجہ بالا تعریف کے وجہ ذیل کے امور پر غور کرنے سے بخوبی واضح ہو جائینگے۔

اگر ایک واقعہ دو طریقوں سے واقع ہو سکے اور ب طریقوں سے واقع نہ ہو سکے جبکہ ہر طریقہ کا امکان مساوی ہو تو اس کے وقوع کے اتفاق کی نسبت اس کے عدم وقوع کے اتفاق کے ساتھ $\frac{1}{2}$ ہے، پس اگر واقعہ ہونے کے اتفاق کو م $\frac{1}{2}$ سے تعبیر کیا جائے تو واقعہ نہ ہونے کے اتفاق کو م $\frac{1}{2}$ سے تعبیر کیا جائیگا جہاں م کوئی نامعلوم مستقل عدد ہے۔

11-11

تو ثابت

۱۳- ثابت

سلسلہ کسرۃ
ل، ل، ل، ل

~~~~~

اس میں صرف دو مفروضے ہو  
 سچ ہے یا (۲) جھوٹ ۔

یہاں  $Q_1 = \frac{1}{4}$  ،  $Q_2$

$Q_3 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$  ،  $Q_4$

$Q_5$  کی قیمت

اگر واقعہ ہونے کے اتفاق کو  $M$  و  $\bar{M}$  سے  
 ہونے کے اتفاق کو  $M$  ب  $\bar{M}$  سے تعبیر  
 م کوئی نامعلوم مستقل عدد ہے ۔



# بتیلون با

## احتمال

۴۴۹۔ اگر کوئی واقعہ دو طریقوں سے واقع ہو سکے اور ب طریقوں سے واقع نہ ہو سکے جبکہ (دفع اور عدم وقوع دونوں کے ہر طریقہ کا امکان مساوی ہو تو اس کو یوں بیان کرنے ہیں کہ اس واقعہ کے وقوع کا احتمال یا اتفاق  $\frac{1}{2}$  ہے اور عدم وقوع کا  $\frac{1}{2}$ ۔

مثلاً ایک قرعہ میں ۲۵ انعام ہیں اور باقی ۲۵ خالی ہیں، اگر ایک شخص کے پاس ایک ٹکٹ ہو تو اس کے ایک انعام حاصل کرنے کا اتفاق  $\frac{1}{25}$  ہے اور اس کے محروم رہنے کا اتفاق  $\frac{24}{25}$  ہے۔

۴۵۰۔ ریاضی میں احتمال کی مندرجہ بالا تعریف کے وجہ ذیل کے امور پر غور کرنے سے بخوبی واضح ہو جائینگے۔

اگر ایک واقعہ دو طریقوں سے واقع ہو سکے اور ب طریقوں سے واقع نہ ہو سکے جبکہ ہر طریقہ کا امکان مساوی ہو تو اس کے وقوع کے اتفاق کی نسبت اس کے عدم وقوع کے اتفاق کے ساتھ  $\frac{1}{2}$  ہے، پس اگر واقع ہونے کے اتفاق کو م ۱ سے تعبیر کیا جائے تو واقع نہ ہونے کے اتفاق کو م ۲ سے تعبیر کیا جائیگا جہاں م کوئی نامعلوم مستقل عدد ہے۔

۱۔ وقوع کا اتفاق + عدم وقوع کا اتفاق = م (ا + ب) لیکن بین دو میں سے ایک تنہا کی بات کا ہونا لازمی ہے، یا واقعہ واقع ہوگا یا نہ ہوگا۔ لہذا صور ہے کہ واقع ہونے کے اتفاق اور واقع نہ ہونے کے اتفاق کا حال جمع ایک مقدار یقینی کو تعبیر کرے، پس اگر ہم اس مسئلہ کو اکائی فرض کریں تو

$$۱ = م (ا + ب) \text{ یعنی } م = \frac{۱}{ا + ب}$$

$$۱ = واقعہ کے واقع ہونے کا اتفاق = \frac{۱}{ا + ب}$$

$$اور واقع نہ ہونے کا اتفاق = \frac{ب}{ا + ب}$$

نتیجہ صریح ہے۔ اگر کسی واقعہ کے وقوع کا احتمال ق ہو تو اسکے عدم وقوع کا احتمال ا - ق ہوگا۔  
۲۵۱۔ یہ کہنے کی بجائے کہ کسی واقعہ کے وقوع کا اتفاق

$$\frac{۱}{ا + ب} \text{ ہے اس کو بعض اوقات یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ}$$

واقعہ کے موافق امکان ا : ب ہے اور خلاف ب : ا ہے۔

احتمال کی تعریف مندرجہ ذیل ۲۲۹ قدرے مختلف شکل

میں بھی دیجا سکتی ہے جو بعض اوقات مفید ثابت ہوتی ہے،

اگر امکان کئی کل صورتوں کی مجموعی تعداد ج ہو اور ہر صورت

کا امکان مساوی ہو تو وقوع کا احتمال  $\frac{۱}{ج}$  سے اور عدم وقوع

کا احتمال ا -  $\frac{۱}{ج}$  سے تعبیر ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ ایک معمولی ہرہ کے چہ رخوں پر ایک سے چہتک کے ہرہ



مندرج ہیں۔ اگر اس کو پھینکا جائے تو بتاؤ کہ ۴ سے بڑا عدد نکلنے کا احتمال کیا ہے۔ ہر دو کے گرنے کے کل مختلف طریقے ۶ ہیں اور ان میں سے ۲ موافق ہیں۔

مثال ۲۔ ایک تھیل میں ۴ سفید گیندیں اور ۵ سیاہ، ایک شخص بن دیکھے ان میں سے ۳ گیند نکالتا ہے۔ بتاؤ کہ ان گیندوں کے سب سیاہ ہونے کے خلاف کیا امکان ہیں۔  
تین گیند نکالنے کے کل طریقے ۱۰۰ ہیں، اور تین سیاہ گیند نکالنے کے کل طریقے ۶۰ ہیں۔ اس لئے تین سیاہ گیند نکالنے کا احتمال

$$\frac{60}{100} = \frac{3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{5}$$

نہیں واقعہ کے خلاف امکان ۴:۱ ہے۔  
مثال ۳۔ دو ہرے ایک ساتھ پھینکے گئے ہیں، بتاؤ کہ کم از کم ایک یکہ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

کل ممکن صورتوں کی تعداد ۶ × ۶ = ۳۶ ہے۔

ایک ہرہ پر کا یکہ دوسرے ہرہ پر کے چھ عددوں میں سے کسی ایک کے ساتھ اٹکھا نکل سکتا ہے اور پہلے ہرہ پر کے باقی ۵ عددوں میں سے ہر ایک عدد باقی دوسرے ہرہ کے یکہ کے ساتھ نکل سکتا ہے۔ پس موافق صورتیں صرف ۱۱ ہیں۔

اس لئے مطلوبہ احتمال  $\frac{11}{36}$  ہے

ہم یوں بھی استدلال کر سکتے ہیں۔ ہر ایک ہرہ کو اس طرح پھینکنے کے لئے کہ یکہ نہ نکلے پانچ طریقے ہیں۔ پس ہر دو کے ۲۵ "آقاؤ" لیے ہیں جس میں یکہ نہیں نکلیگا۔

یعنی کم از کم ایک کینہ کی افتاد کا احتمال ۱ -  $\frac{25}{36}$  یا  $\frac{11}{36}$  ہے۔

مثال ۴۔ تین ہرے ایک ساتھ پھینکے گئے ہیں، بتاؤ کہ ۱۵ سے زیادہ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

جس افتاد میں ۱۸ نکل سکتے ہیں وہ ۶، ۶، ۶ سے بنی ہوئی ہے، اور یہ صرف ایک ہی طریقہ سے ہو سکتا ہے۔ ۱۴ چونکہ ۶، ۵، ۶ سے بتا ہے، اس لئے یہ صرف ۳ طریقوں سے ہو سکتا ہے، اسی طرح ۱۶ اعداد ۶، ۶، ۴ اور ۵، ۵، ۶ سے بن سکتا ہے اور ہر ایک جٹ ۳ طرح سے واقع ہو سکتا ہے۔

پس موافق صورتوں کی کل تعداد  $1 + 3 + 6 = 10$  ہے اور کل صورتیں  $6 \times 6 \times 6$  یعنی ۲۱۶ ہے۔

$$\text{لہذا مطلوبہ احتمال} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

مثال ۵۔ ایک ایسے قرعہ میں جس میں ۳ انعام ہیں اور ۶ خالی ہیں ۱ کے تین حصے ہیں، ایک دوسرے قرعہ میں جس میں ایک انعام ہے اور ۲ خالی ہیں ۲ کا ایک حصہ ہے، ثابت کرو کہ ۱ کی کامیابی کے احتمال کو ۲ کی کامیابی کے احتمال کے ساتھ نسبت

۱:۱۶ ہے۔

۱ کے تین انعام حاصل کرنے کا طریقہ ایک ہے۔

۱ کے دو انعام اور ایک خالی حاصل کرنے کے طریقے  $\frac{2 \times 3}{2 \times 1} \times 6$  ہیں۔

۱ کے ایک انعام اور دو خالی حاصل کرنے کے طریقے  $\frac{5 \times 2}{2 \times 1} \times 3$  ہیں۔

ان کل طریقوں کا حاصل جمع ۶۳ ہے جو ۱ کے کم از کم ایک انعام حاصل کرنے کے کل طریقوں کو تعبیر کرتا ہے۔ نیز دو تین

ٹکٹ  $\frac{4 \times 8 \times 9}{3 \times 2 \times 1}$  یعنی ۸۲ طریقوں سے مال کر سکتا ہے  
 پس ا کی کامیابی کا احتمال  $\frac{67}{82} = \frac{17}{21}$  ہے۔  
 نیز ب کی کامیابی کا احتمال صریحاً  $\frac{1}{21}$  ہے،  
 پس ا کی کامیابی کا احتمال: ب کی کامیابی کا احتمال  $= \frac{17}{21} = \frac{1}{21}$  ہے۔  
 ہم اس طرح بھی استدلال کر سکتے تھے۔

ا کے تمام خالی  $\frac{4 \times 5 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$  یعنی ۲۰ طریقوں سے ٹپکنگے۔ اسلئے  
 ا کے محروم رہنے کا احتمال  $\frac{1}{21}$  یعنی  $\frac{5}{21}$  ہے۔  
 پس ا کی کامیابی کا احتمال  $= 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$  ہے۔  
 ۲۵۳۔ فرض کرو کہ ا، ب، ج، ... ایسے واقعات ہیں کہ  
 ان میں سے ایک اور صرف ایک کا واقع ہونا لازمی ہے نیز فرض  
 کرو کہ یہ واقعات بالترتیب ا، ب، ج، ... طریقوں سے  
 واقع ہو سکتے ہیں اور ان طریقوں میں سے ہر ایک کا امکان  
 مساوی ہے، ہر ایک واقعہ کے وقوع کا احتمال دریافت کرو۔  
 مساوی امکان کے سب طریقوں کا مجموعہ ا + ب + ج + ...  
 ہے ان میں سے وہ طریقے جو ا کے موافق ہیں ا ہیں۔ پس  
 ا کے وقوع کا احتمال  $\frac{ا}{ا + ب + ج + ...}$  ہے اسی طرح سے

ب کے وقوع کا احتمال  $\frac{ب}{ا + ب + ج + ...}$  ہے، وغیرہ وغیرہ

۲۵۴۔ جو مثالیں ہم نے اوپر درج کی ہیں ان سے ظاہر ہے  
 کہ احتمال کے آسان سوالات کے حل کرنے میں صرف احتمال کی تعریف  
 اور ترتیب و اجتماع کے اصولوں کے جاننے کی ضرورت ہے۔

### امثلہ نمبری ۳۲ (۱)

- ۱۔ بتاؤ کہ دو مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے (۱) پانچ (۲) چہرے نکلنے کا کیا احتمال ہے
- ۲۔ تاش کے ۵۲ پتوں سے کوئی دو پتے نکالے گئے ہیں، بتاؤ کہ ایک کے غلام اور دوسرے کے "بیکم" ہونیکا کیا احتمال ہے
- ۳۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید، سیاہ اور ۴ سرخ گیند ہیں۔ اگر ۳ گیند علی الحساب نکالے جائیں تو ان تینوں کے سفید ہونے کا کیا احتمال ہے۔
- ۴۔ چار سنگوں کو اوپر اٹھالا گیا ہے بتاؤ کہ دو مورتوں اور دو زنجیروں کے نکلنے کا کیا احتمال ہے؟
- ۵۔ دو واقعات ایسے ہیں کہ ان میں ایک ضرور واقع ہوگا اگر معلوم ہو کہ ایک کا احتمال دوسرے کے احتمال کا دو تہائی ہے تو بتاؤ کہ دوسرے واقعہ کے موافق کیا امکان ہے؟
- ۶۔ ایک تاش میں سے ۴ پتے لئے گئے ہیں، بتاؤ کہ ان کے ایک ہی "رنگ" کے چار افسر ہونے کا کیا احتمال ہے۔
- ۷۔ ۱۳ آدمی ایک گول میز کے گرد بیٹھے ہیں، بتاؤ کہ دو خاص آدمیوں کے پاس پاس بیٹھنے کے خلاف امکان ۱:۵ ہے
- ۸۔ تین واقعات "ا"، "ب"، "ج" ایسے ہیں کہ ان میں سے ایک اور صرف ایک ضرور واقع ہوگا اگر "ا" کے خلاف امکان ۳:۸ ہو اور "ب" کے خلاف امکان ۵:۲ ہو تو بتاؤ "ج" کے خلاف کیا امکان ہوگا؟
- ۹۔ ایک مہرہ کو پھینکنے سے ۴ نکلنے کا جو احتمال ہے دو مہروں کو پھینکنے سے ۸ نکلنے کا جو احتمال ہے، ۳ مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے ۱۲ نکلنے کا جو احتمال ہے ان سب کا

- بام مقابلہ کرو۔
- ۱۰۔ ایک تاش کے ملانے میں ۴ پتے اتفاق سے گر گئے ہیں، بتلو  
 ان کے جداگانہ ایک ایک رنگ کئے ہوئے کا کیا احتمال ہے۔
- ۱۱۔ ایک قرعہ میں ۳ انعام ہیں اور ۹ خالی ہیں، اس کے لئے  
 اس کے پاس ۳ حصے ہیں، اسی طرح ایکس اور قرعہ میں ۲ انعام  
 اور ۶ خالی ہیں اور اس کے لئے ب کے پاس ۲ حصے ہیں  
 ان کی کامیابی کے احتمال کا مقابلہ کرو۔
- ۱۲۔ دکھاؤ کہ ۴، ۳ اور ۲ مہروں کو پھینک کر ۶ نکالنے کے احتمال  
 بالترتیب نسبت ۱:۶:۱۸ میں ہیں۔
- ۱۳۔ تین کتابیں ہیں جن میں ایک کی تین جلدیں ہیں دوسری  
 کی چار اور تیسری کی ایک۔ ان کو علی الحساب ایک الماری میں  
 رکھا گیا ہے، بتاؤ کہ ہر ایک کتاب کی جلدوں کے اکٹھا ہونے کا  
 احتمال کیا ہے۔
- ۱۴۔ ا اور ب میں سے ہر ایک دو مہرے پھینکتا ہے،  
 اگر ا، ۹ پھینکے تو بتاؤ کہ ب کے اس سے زیادہ پھینکنے  
 کا کیا احتمال ہے۔
- ۱۵۔ لفظ ”مصاحبوں“ کے حروف کو جدا جدا کر کے میسر پر رکھا  
 گیا ہے، بتاؤ کہ حروف علت (ا اور و) کے پاس پاس کتنے  
 کا کیا احتمال ہے۔
- ۱۶۔ تاش کی ایک ”ٹرپ“ کی بازی میں جس کے پتے ایک ایک  
 کر کے تقسیم کئے گئے ہیں بتاؤ کہ ایک خاص شخص کتنے پاس  
 چار ”بادشاہ“ ہونے کا کیا احتمال ہے۔
- ۱۷۔ ۴ شلنگ اور ۳ نصف کراؤں ایک قطار میں علی الحساب رکھے  
 گئے ہیں، بتاؤ کہ مروں پر کے دونوں سکون کے نصف کراؤں  
 ہونے کا احتمال  $\frac{1}{2}$  ہے، اس نتیجہ کی م شلنگ اور ن نصف

کراؤں کی صورت میں تعظیم کرو۔

۴۵۵۔ اب تک ہم نے صرف اپنی واقعات پر غور کیا ہے جنکو احتمال کی زبان میں مفرد واقعات سے موسوم کرتے ہیں، اگر ان میں سے دو یا زیادہ واقعات ایسے ہوں کہ ان کے وقوع باہم متعلق ہوں تو اس مشترک وقوع کو مرکب واقعہ کہتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ ہمارے پاس ایک تھیلی میں پانچ سفید اور آٹھ سیاہ گیند ہیں اس میں سے دو دفعہ تین تین گیند نکالے گئے ہیں، اگر ہم پہلے تین سفید گیندوں کے اور پھر تین سیاہ گیندوں کے نکالنے کا احتمال معلوم کرنا چاہیں تو ہماری بحث مرکب واقعہ سے متعلق ہوگی۔

ایسی صورت میں ممکن ہے کہ پہلی دفعہ کے نکالنے کا نتیجہ دوسری دفعہ کے نکالنے کے نتیجہ پر اثر انداز نہ ہو۔ ظاہر ہے کہ اگر ان گیندوں کو جو پہلی دفعہ نکالے گئے ہیں واپس رکھ دیا جائے تو دوسری مرتبہ کے نکالنے پر پہلی دفعہ کے نکالنے کا نتیجہ کوئی اثر نہ ڈالے گا۔ لیکن اگر گیندوں کو واپس نہ رکھا جائے تو ظاہر ہے کہ اگر پہلی دفعہ تینوں گیند سفید نکلیں تو باقی ماندہ سیاہ گیندوں کو سفید گیندوں کے ساتھ جو نسبت ہوگی وہ اس نسبت سے زیادہ ہوگی جبکہ پہلی دفعہ کے تینوں گیند سفید نہ ہوں۔ اس صورت میں دوسری مرتبہ سیاہ گیند نکالنے کا احتمال پہلی دفعہ کے نتیجہ سے اثر پذیر ہوگا۔

اس کی باقاعدہ تعریف ہم ذیل میں درج کرتے ہیں۔  
اگر ایک واقعہ کا وقوع دوسرے واقعہ پر اثر انداز ہوا ہو تو ان واقعات کو واقعات تاج کہتے ہیں، لیکن اگر ایک واقعہ دوسرے واقعہ پر اثر انداز نہ ہو تو ایسے واقعات کو ”غیر تاج“ کہتے ہیں۔  
تاج واقعات کو بعض اوقات مشروط واقعات بھی کہتے ہیں

۴۵۶۔ اگر دو غیر تابع واقعات میں سے بالترتیب ہر ایک کا احتمال معلوم ہو تو دونوں کے واقع ہونے کا احتمال معلوم کرو۔  
 فرض کرو کہ پہلا واقعہ  $A$  طریقوں سے واقع ہو سکتا ہے اور  $B$  طریقوں سے واقع نہیں ہو سکتا۔ نیز فرض کرو کہ دوسرا واقعہ  $A$  طریقوں سے واقع ہو سکتا ہے اور  $B$  طریقوں سے واقع نہیں ہو سکتا۔ اور ان سب طریقوں کا امکان مساوی ہے۔  
 پہلی  $(A+B)$  صورتوں میں سے ہر ایک کو دوسری  $(A+B)$  صورتوں میں سے ہر ایک کے ساتھ منسلک کیا جا سکتا ہے اس طرح ہمیں کل  $(A+B)(A+B)$  مرکب صورتیں حاصل ہوتی ہیں جن میں سے ہر ایک کا امکان مساوی ہے۔  
 ان صورتوں میں سے  $A$  میں دونوں واقعات وقوع پذیر ہوتے ہیں۔  $B$   $B$  صورتوں میں ان میں سے کوئی واقعہ وقوع پذیر نہیں ہوتا۔  $A$   $B$  میں پہلا واقعہ واقع ہوتا ہے اور دوسرا نہیں ہوتا،  $A$   $B$  صورتوں میں پہلا واقعہ واقع نہیں ہوتا اور دوسرا واقع ہوتا ہے۔ پس

$A$   $A$

دونوں واقعات کے وقوع پذیر ہونیکا احتمال  $(A+B)(A+B)$  ہے

دونوں واقعات میں سے کسی کے وقوع پذیر ہونیکا احتمال  $\frac{B}{A+B} \times \frac{B}{A+B}$  ہے

پہلے کے واقع ہونے اور دوسرے کے واقع ہونیکا احتمال  $\frac{A}{A+B} \times \frac{B}{A+B}$  ہے

پہلے کے واقع نہ ہونے اور دوسرے کے واقع ہونیکا احتمال  $\frac{A}{A+B} \times \frac{A}{A+B}$  ہے

پس اگر دو غیر تابع واقعات وقوع پذیر ہونے کے احتمال بالترتیب





اور دوسری مرتبہ تینوں کے سیاہ نکلنے کا کیا احتمال ہے؟  
 جن مختلف طریقوں سے تین گیند نکلے جاسکتے ہیں ان کی کل  
 تعداد  ${}^3J_3$  ہے۔

جن مختلف طریقوں سے تین سفید گیند نکلے جاسکتے ہیں انکی  
 تعداد  ${}^3J_3$  ہے۔

جن مختلف طریقوں سے تین سیاہ گیند نکلے جاسکتے ہیں  
 ان کی تعداد  ${}^3J_3$  ہے۔

پس پہلے امتحان میں تین سفید گیند نکلنے کا احتمال

$$= {}^3J_3 \div {}^3J_3 = \frac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} \div \frac{11 \times 12 \times 13}{3 \times 2 \times 1} = \frac{5}{143}$$

اور دوسرے امتحان میں تین سیاہ گیند نکلنے کا احتمال

$$= {}^3J_3 \div {}^3J_3 = \frac{6 \times 4 \times 2}{11 \times 12 \times 13} = \frac{28}{143}$$

$$\text{لہذا مرکب واقعہ کا احتمال} = \frac{5}{143} \times \frac{28}{143} = \frac{140}{20449}$$

مثال ۲۔ اگر ایک سکہ کو اچھالا جائے تو بناؤ کہ تین متواتر  
 اچھالوں میں تصویر اور زنجیر کے متبادلاً نکلنے کا کیا احتمال ہے؟  
 پہلے اچھال میں تصویر نکلیں یا زنجیر۔ دوسرے اچھال میں  
 اس کے برعکس نکلنے کا احتمال  $\frac{1}{2}$  ہے اور تیسرے اچھال  
 میں پہلے اچھال کے موافق نکلنے کا احتمال  $\frac{1}{2}$  ہے۔

پس مرکب واقعہ کا احتمال  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  ہے۔

مثال ۳۔ ایک شخص ۱۰ کی عمر اس وقت ۳۵ سال کی  
 ہے، اس کے ۶۵ سال کی عمر تک زندہ رہنے کے خلاف امکان  
 ۱:۹ ہے، ایک اور شخص ۱۰ کی عمر اس وقت ۴۵ سال

کی ہے، اس کے ۷۵ سال کی عمر تک زندہ رہنے کے خلاف امکان  
۲۰۳ ہے۔ بتاؤ کہ کم از کم ایک شخص کے ۳۰ سال تک زندہ  
رہنے کا کیا احتمال ہے۔

۳۰ سال کے اندر اس کے مر جانے کا احتمال  $\frac{9}{14}$  ہے۔

۳۰ سال کے اندر ب کے مرجانے کا اہتمال  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ ۔

پس دوؤوں کے نہ مرنے کا احتمال یعنی کم از کم ایک کے زندہ رہنے

۲۵۸۔ دفعہ ۲۵۶ کے حروف کے مفہوم میں ذرا سا تغیر کرنا سے ہم دو تابع واقعات کے ایک ساتھ وقوع پذیر ہونے کا احتمال معلوم کر سکتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ جب پہلا واقعہ ہو چلتا ہے تو اس کے تحت دوسرا واقعہ اُپر طریقوں سے وقوع پذیر ہو سکتا ہے اور ب طریقوں سے وقوع پذیر نہیں ہو سکتا، تب جن طریقوں سے دونوں واقعات اکٹھے واقع ہو سکتے ہیں ان کی تعداد اُپر ہے، اس لئے ان کے ایک ساتھ واقع ہونے کا احتمال  $\frac{1}{(1+b)(1+c)}$  ہے۔

پس اگر پہلے واقعہ کا احتمال  $H$  ہو اور اس کے تحت دوسرے واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال  $H$  ہو تو دونوں واقعات کے ایک ساتھ واقع ہونے کا احتمال  $H \cdot H$

مبوغا۔  
 مثال ۱۔ ترپ کی بازی میں تماش کے پتے ایک ایک کر کے  
 چار کھلاڑیوں میں تقسیم کئے گئے ہیں، بتاؤ کہ ایک خاص شخص کے  
 پاس ترپ کا بادشاہ، اور ”بیگم“ دونوں کے ہونے کا کیا احتمال ہے۔

فرض کرو کہ یہ کھلاڑی ۱ ہے، تب ۱ کے پاس بادشاہ ہوتا  
 احتمال  $\frac{13}{51}$  ہے کیونکہ ۱۳ پتے ۵۱ مختلف طریقوں سے تقسیم ہو سکتے  
 ہیں اور ان میں سے ۱۳ طریقے ۱ کے حصہ میں آتے ہیں، اب  
 بادشاہ ۱ کے پاس آجانے کے بعد ۱ کے پاس 'بیگم' بھی آنے  
 کا قرینہ  $\frac{12}{51}$  ہے کیونکہ 'بیگم' کا پتہ باقی ۵۱ طریقوں سے تقسیم  
 ہو سکتا ہے اور ۱۲ طریقے ۱ کے حصہ میں آتے ہیں۔

$$\text{پس مطلوبہ احتمال} = \frac{13}{51} \times \frac{12}{51} = \frac{1}{15}$$

یا ہم اس طرح بھی استدلال کر سکتے ہیں۔  
 ۱۳ مختلف طریقوں سے بادشاہ، اور 'بیگم' ۱ کے پاس  
 آسکتے ہیں وہ ان ترتیبوں کی تعداد کے مساوی ہیں جو ۱۳  
 چیزوں میں سے دو کو لینے سے حاصل ہوتی ہیں یعنی ان کی  
 تعداد  $13 \times 12$  ہے، اسی طرح بادشاہ اور 'بیگم' کو تقسیم کرنے کے  
 کل مختلف طریقے  $51 \times 51$  ہیں۔

$$\text{اس لئے مطلوبہ احتمال} = \frac{13 \times 12}{51 \times 51} = \frac{1}{15} \text{ حسب سابق}$$

مثال ۲۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۸ سیاہ گیندیں ہیں۔ پہلی  
 تھیلی میں سے تین گیند نکالے گئے ہیں، پھر ان گیندوں کو واپس  
 رکھنے کے بغیر اس میں سے تین اور گیند نکالے گئے ہیں۔ پہلی مرتبہ  
 تینوں کے سفید اور دوسری مرتبہ تینوں کے سیاہ نکلنے کا احتمال  
 معلوم کرو۔

پہلی آزمائش میں تین گیندیں ۳ جہتوں سے  
 نکل سکتے ہیں اور تین سفید گیندیں ۳ جہتوں سے نکل سکتے  
 ہیں پس پہلی آزمائش میں تینوں گیندوں کے سفید نکلنے کا  
 احتمال  $\frac{5}{153} = \frac{12 \times 12 \times 12}{3 \times 2 \times 1} \div \frac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{153}$

جب تین گیند نکال لئے جائیں تو تھیلی میں باقی ۲ سفید اور ۸ سیاہ گیند رہ جاتے ہیں۔

پس دوسری آزمائش میں تین گیند کل 'ج' مختلف طریقوں سے نکالے جاسکتے ہیں اور تین سیاہ گیند 'ج' مختلف طریقوں سے نکالے جاسکتے ہیں۔ پس دوسری آزمائش میں تینوں گیندوں کے سیاہ

$$\text{نکلنے کا احتمال} = \frac{ج}{ج} = \frac{۶ \times ۴ \times ۸}{۸ \times ۹ \times ۱۰} = \frac{۴}{۱۵}$$

$$\text{پس مرکب واقعہ کا احتمال} = \frac{۴}{۱۵} \times \frac{۵}{۱۷۳} = \frac{۴}{۲۶۹}$$

طالب علم کو چاہئے کہ اس جواب کا مقابلہ دفعہ ۲۵۷ کی مثال اول کے ساتھ کرے۔

۲۵۹۔ اگر ایک واقعہ دو یا زیادہ مختلف طریقوں سے واقع ہو سکتا ہو اور یہ طریقے ایک دوسرے کے متانی ہوں تو اس کے واقع ہونے کا احتمال مختلف طریقوں سے واقع ہونے کے احتمالوں کے حاصل جمع کے مساوی ہوگا۔

اس مسئلہ کو بعض اوقات صیح اور از خود بین نتیجہ خیال کرتے ہیں جو احتمال کی تعریف سے ہی واضح ہے، تاہم اسکو باضابطہ طور پر حسب ذیل طریقہ سے ثابت کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ واقعہ دو ایسے طریقوں سے جو ایک ساتھ واقع نہیں ہوتے وقوع میں آسکتا ہے، نیز فرض کرو کہ ان دو طریقوں سے اس کے واقع ہونے کے احتمال بالترتیب

$$\frac{۱}{۲} \text{ اور } \frac{۱}{۳} \text{ ہیں۔ تب } \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} \text{ صورتوں}$$

میں سے  $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}$  صورتیں ایسی ہیں جن میں واقعہ پہلے طریقہ سے واقع ہو سکتا ہے اور  $\frac{۱}{۳}$  صورتیں ایسی ہیں

جن میں واقعہ مذکورہ دوسرے طریقہ سے واقع ہو سکتا ہے اور یہ طریقے ایک ساتھ واقع نہیں ہوتے۔ پس فی الجملہ  $\frac{1}{2}$  صورتوں میں سے  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$  +  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{2}$  صورتیں ایسی ہیں جو واقعہ کے موافق ہیں، پس واقعہ کے ان دو طریقوں میں سے کسی ایک طریقہ سے واقع ہونے کا احتمال

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ ہے۔}$$

ایسے باہم متنافی طریقوں کی تعداد خواہ کچھ ہی ہو سب پر اسی قسم کا استدلال صادق آئے گا۔

اس لئے اگر واقعہ ن طریقوں سے واقع ہو سکتا ہو جو باہم متنافی ہوں اور اگر واقعہ کے ان مختلف طریقوں سے واقع

ہونے کے احتمال بالترتیب  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{3}$ ،  $\frac{1}{4}$ ، ....  $\frac{1}{n}$  ہوں تو ان طریقوں میں سے کسی ایک سے واقع ہونے کا احتمال -

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \text{ ہوگا}$$

مثال ۱۔ دوہرے ایک ساتھ پھینکے گئے ہیں۔ ان سے کم از کم ۹ نکلنے کا احتمال دریافت کرو۔

۹ چار طریقوں سے بن سکتا ہے، اس لئے ۹ نکلنے کا احتمال  $\frac{4}{36}$  ہے۔

۱۰ تین طریقوں سے بن سکتا ہے، اس لئے ۱۰ نکلنے کا احتمال  $\frac{3}{36}$  ہے۔

۱۱ دو طریقوں سے بن سکتا ہے، اس لئے ۱۱ نکلنے کا احتمال  $\frac{2}{36}$  ہے۔

۱۲ ایک طریقہ سے بن سکتا ہے، اس لئے ۱۲ نکلنے کا احتمال  $\frac{1}{36}$  ہے۔

اب ۹ سے کم عدد نہ نکلنے کا احتمال ان مختلف احتمالات سے

حاصل جمع کے مساوی ہے

$$\therefore \text{مطلوبہ احتمال} = \frac{1+2+3+4}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

**مثال ۲۔** ایک بٹوے میں ایک پونڈ ہے اور تین شلنگ، دوسرے بٹوے میں دو پونڈ ہیں اور چار شلنگ، تیسرے بٹوے میں تین پونڈ ہیں اور ایک شلنگ، اگر علی الحساب کوئی ایک بٹوہ لیکر اس میں سے ایک سکہ نکالا جائے تو بتاؤ کہ سکہ کے پونڈ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

چونکہ ہر ایک بٹوے کے لئے جانے کا امکان مساوی ہے اسلئے پہلا بٹوہ لینے کا احتمال  $\frac{1}{3}$  ہے اور اس میں سے نکالے ہوئے ایک سکہ کے پونڈ ہونے کا احتمال  $\frac{1}{3}$  ہے، پس جہاں تک پہلے بٹوے کا تعلق ہے اس میں سے پونڈ نکالنے کا احتمال  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ ۔ اسی طرح سے دوسرے بٹوے میں سے پونڈ نکالنے کا احتمال  $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$  ہے اور تیسرے میں سے نکالے ہوئے سکہ کے پونڈ ہونے کا احتمال  $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$  یعنی  $\frac{1}{3}$  ہے۔

$$\therefore \text{مطلوبہ احتمال} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$$

۴۶۰۔ دفعہ ماقبل میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ بعض اوقات کسی واقعہ کے احتمال کو دو یا زیادہ مختلف واقعات کے احتمال کے حاصل جمع کے مساوی تصور کیا جاسکتا ہے لیکر یہ اچھی طرح ذہن نشین کر لینا چاہئے کہ کسی واقعہ کا احتمال دو یا زیادہ واقعات کے احتمالوں کے حاصل جمع کے مساوی اسی صورت میں سمجھا جاسکتا ہے جبکہ واقعات بلحاظ ایک دوسرے کے بالکل غیر متعلق ہوں یعنی جب کسی ایک واقعہ واقع ہونا باقی واقعات میں سے کسی ایک کے وقوع پذیر ہونا اثر انداز نہ ہو۔

**مثال۔** ۲۰ ٹکٹوں پر پہلے بیس طبعی عدد لکھے ہوئے ہیں، ان میں سے ایک ٹکٹ علی الحساب نکالا گیا ہے، بتاؤ کہ اس پر کسے عدد ۳ یا ۶ کے ضعیف ہونے کا کیا احتمال ہے۔

اس گٹ پر کے عدد کے ۳ کے ضعیف ہونے کا احتمال  $\frac{۲}{۳}$  ہے اور ۲ کے ضعیف ہونے کا احتمال  $\frac{۱}{۳}$  یعنی  $\frac{۱}{۳}$  ہے، اور یہ واقعات باہم منافی ہیں۔ پس مطلوبہ احتمال

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳} \text{ ہے۔}$$

لیکن اگر سوال یوں ہوتا کہ اس عدد کے ۳ کے یا ۵ کے ضعیف ہونے کا کیا احتمال ہے تو حسب ذیل طریق پر استدلال کرنا غلط ہوتا۔

چونکہ عدد مذکور کے ۳ کے ضعیف ہونے کا احتمال  $\frac{۲}{۳}$  ہے اور عدد مذکور کے ۵ کے کوئی ضعیف ہونے کا احتمال  $\frac{۱}{۳}$  ہے، اسلئے

$$\text{مطلوبہ احتمال} = \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳} \text{ ہے۔}$$

اس کی وجہ یہ ہے کہ ممکن ہے کہ عدد مذکور ۳ اور ۵ دونوں کا ضعیف ہو، اس لئے اس صورت میں دونوں واقعات ایک دوسرے سے غیر متعلق یا منافی نہیں ہیں۔

۴۶۱۔ یہ بات قابل غور ہے کہ مفرد اور مرکب واقعات کا فرق بہت سی صورتوں میں محض مصنوعی ہوتا ہے۔ بعض صورتوں میں یہ صرف نقطہ نظر کا فرق ہوتا ہے۔ مثال۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۷ سیاہ گیند ہیں، اگر دو گیند نکالے جائیں تو ایک گیند کے سیاہ اور دوسرے کے سفید ہونے کا کیا احتمال ہے۔

(۱) اگر اس واقعہ کو مفرد تصور کیا جائے تو

$$\text{احتمال مطلوبہ} = (۷ \times ۵) \div ۳۵ = \frac{۳۵}{۴۴}$$

(۲) اس واقعہ کو ذیل کے دو مرکب واقعات میں سے ایک یا دوسرے

کا وقوع تصور کیا جاسکتا ہے۔  
۱۔ پہلے ایک سفید اور پھر ایک سیاہ گیند کا نکالنا، اس کا  
احتمال

۲۔ پہلے سیاہ اور پھر سفید گیند کا نکالنا، اس کا احتمال

$$\frac{35}{132} = \frac{5}{11} \times \frac{4}{12}$$

اور چونکہ یہ واقعات ایک دوسرے سے بالکل غیر متعلق ہیں، اسلئے  
مطلوبہ احتمال

$$\frac{35}{66} = \frac{35}{132} + \frac{35}{132} =$$

یہ بات قابل غور ہے کہ ہم نے یہاں تسلیم کر لیا ہے کہ دو مختلف  
گیندوں کو یکے بعد دیگرے نکالنے کا احتمال وہی ہے جو ان کے  
ایک ساتھ نکالنے کا ہے، ذرا سے غور سے معلوم ہو جائیگا کہ  
درست ہے۔

### مشکل نمبری ۲۲ (ب)

- ۱۔ ایک معمولی مہرہ کو یکے بعد دیگرے دو مرتبہ  
پہلی افتاد میں یکے کے نکلنے کا کیا احتمال ہے
- ۲۔ ایک تاش میں سے تین پتے ملی الحاس  
تیاؤ کہ ان پتوں کے بادشاہ، بیگم اور غلام
- ۳۔ ایک واقعہ کے خلاف امکان ۵ : ۲ ہے  
جو پہلے واقعہ پر منحصر نہیں ہے اس کے موافق
- ان واقعات میں سے کم از کم ایک کے واقع ہونے
- ۴۔ ایک لڑکے کے ۱ کے ایک سوال کو حل کیسکے



مکان ۴:۳ ہے اور ایک ٹکے ب کے یہی سوال حل کر سکتے ہیں  
وافق امکان ۵:۴ ہے اگر یہ دونوں حل کرنے کی کوشش کریں تو سوال  
لے حل ہو جانے کا کیا احتمال ہے۔

۵۔ ایک بوتے کے ایک خانہ میں ۲ پونڈ اور ۳ شلنگ ہیں  
اور دوسرے خانہ میں ۲ پونڈ اور ایک شلنگ، بوتے میں سے  
ایک پونڈ نکالنے کا کیا احتمال ہے۔

۶۔ ایک تھیلی میں ۱، ٹکٹ ہیں جن پر ایک سے ستر تک  
عدد لکھے ہوئے ہیں۔ ان میں سے ایک ٹکٹ نکالا گیا ہے اور  
پتہ اس کو واپس رکھ دیا گیا ہے، پھر ایک اور ٹکٹ نکالا گیا ہے  
اس کا کیا احتمال ہے کہ پہلا عدد جفت اور دوسرا طاق ہو۔

۷۔ آدمی ایک تاش میں سے ایک ایک پتہ نکالتے ہیں  
تباؤ کہ ۱۰ چاروں پتوں کے مختلف رنگوں کے ہونے کا اور (۲)  
سی وہ پتوں کی ایک ہی قیمت کے نہ ہونے کا کیا احتمال ہے۔  
۸۔ ایک مہرہ کو ۵ دفعہ پھینکنے میں کم از کم ایک دفعہ '۶'

نکلنے کا کیا احتمال ہے۔  
۹۔ ایک کتاب کا تین نکتہ سنج جدا جدا تبصرہ کر رہے ہیں  
کے تصدیق کے کتاب کے حق میں یا موافق ہونے کے احتمال  
۲:۳، ۳:۴، ۴:۵ ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ تین  
سے کثرت کتاب کے حق میں ہو۔

۱۰۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۳ سیاہ گیند ہیں، ان میں  
کوئی بعد دیگرے اس طرح نکالا گیا ہے کہ نکالا ہوا گیند واپس نہیں  
جاتی تباؤ کہ ان گیندوں کے متبادلاً مختلف رنگوں کے ہونے کا  
احتمال ہے۔

۱۱۔ دو مہروں کو تین بار پھینکا گیا ہے، تباؤ کہ کم از کم ایک بار  
'۶' نکلنے کا کیا احتمال ہے [جب دو زخوں کے عددوں کی قیمتیں

مسادی ہوں تو ان عددوں کے زوج کو دستر کہتے ہیں] ۱۲۔ اگر علی الحساب چار صحیح عددوں کو لیکر ضرب دیا جائے تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب کے آخری ہندسہ کے ۱، ۳، ۷ یا ۹ ہونیکا احتمال  $\frac{17}{256}$  ہے۔

۱۳۔ ایک بیٹے میں ۱۰ سکے ہیں جن میں سے ایک سکہ پونڈ ہے اور باقی سب شلنگ ہیں، دوسرے بیٹے میں ۱۰ سکے ہیں اور سب کے سب شلنگ ہیں۔ پہلے بیٹے میں سے ۹ سکے لیکر دوسرے میں ڈال دئے گئے ہیں، پھر دوسرے میں سے ۹ سکے لیکر پہلے میں ڈالے گئے ہیں، بتاؤ کہ پونڈ کے ابھی تک پہلے ہی بیٹے میں ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۴۔ ۲ سکوں کو پانچ مرتبہ اچھالا گیا ہے، بتاؤ کہ ۵ تصویروں اور ۵ زنجیروں کے نکلنے کا کیا احتمال ہے ۱۵۔ ۴ سکوں کو اچھالا گیا ہے، بتاؤ کہ ایک اور صرف ایک ہی سکہ میں تصویر کے اوپر ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۶۔ ۱، ۲ اور ۳ ترتیب دار پتوں کی ایک تاش کو کٹتے ہیں اور پتوں کو پھر واپس رکبہ دیتے ہیں۔ شرط یہ ہے کہ جو شخص پہلے تاش کے حکم کا پتہ کاٹے گا وہ انعام کا مستحق ہوگا، ان میں سے ہر ایک کے جداگانہ انعام پانے کا کیا احتمال ہے؟ ۱۷۔ ایک بیٹے میں ۳ پونڈ اور ۴ شلنگ ہیں، ۱ اور ۲

ترتیب وار اس میں سے جداگانہ ایک ایک سکہ نکالتے ہیں اور پھر واپس نہیں رکھتے، ان میں سے جداگانہ ہر ایک کا پہلے ایک پونڈ نکالنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۸۔ ۵ اشخاص کی ایک جماعت ایک گول میز کے گرد بیٹھی ہے دو مخصوص آدمیوں کے ایک دوسرے کے پاس بیٹھنے کے خلاف کیا امکان ہے۔

- ۱۹۔ چھ گھوڑے ایک دوڑ میں حصہ لیتے ہیں، پہلے میں سے ایک واقعہ ہے۔ ۱۔ ہر چابک سواروں ب اور ج میں سے کوئی ایک سوار ہو گا۔ ب کا ر پر سوار ہونے کے موافق امکان ۱:۲ ہے، اس صورت میں سب گھوڑوں کے جیتنے کا امکان مساوی ہے اگرچہ ر پر سوار ہو تو ر کے جیتنے کا احتمال تین گنا ہو جاتا ہے، ر کے جیتنے کے خلاف کیا امکان ہے؟
- ۲۰۔ اگر ۱۰ جہازوں میں سے بالادست ایک جہاز غرق ہو جاتا ہو تو ۵ جہازوں میں سے کم از کم ۴ کے صحیح سلامت پہنچنے کا کیا احتمال ہے۔
- ۲۱۔ اگر ایک واقعہ کے واقع ہونے کا احتمال ایک امتحان میں معلوم ہو تو ن امتحانوں میں اس کے ٹھیک ایک دفعہ دو دفعہ، تین دفعہ .... واقع ہونے کا احتمال جدا گانہ دریا کرو۔
- فرض کرو کہ ایک امتحان میں واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال  $Q$  ہے۔ نیز فرض کرو کہ ۱۔  $Q = P$ ، تب ن امتحانوں میں واقعہ مذکور کے عین ر مرتبہ وقوع پذیر ہونے کا احتمال  $(P + Q)^n$  کے پھیلاؤ میں  $(1 + P)$  دیں رقم کے مساوی ہو گا۔
- کیونکہ اگر ہم کل امتحانوں میں سے ر امتحانوں کا کوئی خاص جٹ منتخب کر لیں تو اس کا احتمال یہ واقعہ مذکور ان ر امتحانوں میں سے ہر ایک میں واقع ہو اور باقی امتحانوں میں سے کسی میں واقع نہ ہو  $Q^n$  ہے (دیکھو دفعہ ۲۵۶) اور چونکہ ر امتحانوں کا کوئی جٹ نچر طریقوں سے منتخب کیا جاسکتا ہے اور ان میں سے ہر طریقہ میں واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا

احتمال  $ق^۱ ق^۱$  -  $ر$  ہے اس لئے مطلوبہ احتمال  
فجر  $ق^۱ ق^۱$  -  $ر$

ہے۔ اگر ہم  $(ق + ق)$  کو مسئلہ ثنائی کی رو سے پھیلائیں  
تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$(ق + ق) = ق^۱ + ق^۱ ق^۱ + ق^۱ ق^۱ ق^۱ + ق^۱ ق^۱ ق^۱ ق^۱ + \dots + ق^۱ ق^۱ ق^۱ ق^۱ ق^۱$

گویا سلسلہ بالا کی رقیب ن امتحانوں میں واقعہ کے بالترتیب  
ن بار،  $(ن-۱)$  بار،  $(ن-۲)$  بار،  $\dots$  واقع ہونے کے  
احتمال کو تعبیر کرتی ہیں۔

۲۶۳۔ اگر ایک واقعہ پورے ن مرتبہ واقع ہو سکتا ہو یا  
صرف ایک مرتبہ، دو مرتبہ،  $\dots$   $(ن-۱)$  مرتبہ واقع نہ ہو سکتا  
ہو تو ظاہر ہے کہ ر یا ر سے زیادہ مرتبہ واقع ہو سکتا ہے،  
اس لئے ن امتحانوں میں اس کے کم از کم ر مرتبہ واقع  
ہونے کا احتمال

$ق^۱ + ق^۱ ق^۱ + ق^۱ ق^۱ ق^۱ + \dots + ق^۱ ق^۱ ق^۱ ق^۱ ق^۱$   
یعنی  $(ق + ق)$  کی تفصیل میں پہلی ن -  $ر + ۱$  رقموں کے حامل  
جمع سے تعبیر ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ دو مہروں کو ایک ساتھ چار مرتبہ پھینکا گیا ہے۔ کم از کم دو  
”دوسروں“ کے نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

ایک دفعہ پھینکنے میں دوسرے نکلنے کا احتمال  $\frac{۲}{۳}$  یعنی  $\frac{۱}{۳}$  ہے۔ اور  
دوسرے نکلنے کا احتمال  $\frac{۱}{۲}$  ہے۔ واقعہ زیر بحث کے پورا ہونے کے لئے

دستیں دو مرتبہ، تین مرتبہ، یا چار مرتبہ نکل سکتی ہیں کیونکہ مہروں کو چار مرتبہ بھینکا گیا ہے۔ پس مطلوبہ احتمال  $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})$  کی تفصیل میں پہلی تین رقموں کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔ یعنی

$$\frac{19}{188} = (\cancel{8} \times 4 + 8 \times \cancel{4} + 1) \frac{1}{\cancel{4}} =$$

مثال ۲۔ ایک تحصیل میں کچھ گیند ہیں جن میں سے کچھ گیند سفید ہیں، ایک گیند کو نکال کر پھر واپس رکھ دیا گیا ہے۔ پھر ایک اور کو نکال کر واپس رکھ دیا گیا ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔ اگر ایک امتحان میں سفید گیند کے نکلنے کا احتمال  $Q$  ہو تو بتاؤ کہ  $n$  امتحانوں میں زیادہ سے زیادہ کتنے سفید گیندوں کے نکلنے کا احتمال ہے ؟

ٹھیک و سفید گیند نکلنے کا احتمال <sup>۳</sup>جرقہ <sup>۴</sup>ہے، اب  
ہمیں صرف یہ معلوم کرنا ہے کہ <sup>۵</sup>ن کی کس قیمت کے یہ جملہ بڑے سے  
بڑا ہے۔

اب جرقان - جرقان - جرقان - (۱-۲)

تا وقتیکہ  $(n - r + 1)C < r$

یعنی (ن + ا) ق < (ق + ف) ر

لیکن  $Q + F = 1$  پس رکی مطلوبہ قیمت  $Q$  (ن + ۱) میں سے بڑے سے بڑے عدد کے مساوی ہے۔

اگر ن ایسا ہو کہ ق ن کوئی صحیح عدد ہو تو غالب ترین صوت یہ ہے کہ ق ن کامیابیاں اور ف ن ناکامیاں ہوں گی۔

۴۶۔ فرض کرو کہ ایک قرعہ میں ن ٹکٹ ہیں اور انعام لا یونٹ ہے، اب چونکہ انعام حاصل کرنے کے لئے سب ٹکٹوں کا امکان مساوی ہے اور ایک شخص جس کے پاس سب ٹکٹ

ہوں وہ ضرور جیتکا اس لئے سمجھنا چاہئے کہ ہر ایک ٹکٹ کی مالیت  $\frac{1}{n}$  پونڈ ہے، دوسرے لفظوں میں ایک ٹکٹ کے عوض میں یہ رقم معقولیت کے ساتھ ادا کیجا سکتی ہے۔ پس اگر ایک آدمی کے پاس  $n$  ٹکٹ ہوں اور وہ ان کو بیچنا چاہے تو ان کے عوض میں اسکا  $\frac{1}{n}$  پونڈ طلب کرنا معقولیت سے بعید نہیں لگوا اسکی کامیابی کے احتمال کی قیمت  $\frac{1}{n}$  پونڈ متصور ہو سکتی ہے۔ اس بنا پر ذیل کی تعریف وضع کرنا موجب سہولت ہو گا۔

اگر ایک شخص کی کامیابی کا احتمال  $q$  ہو اور  $m$  وہ رقم ہو جو اس کو بصورت کامیابی حاصل ہو سکتی ہو تو  $mq$  سے جو رقم تعبیر ہوگی وہ اس شخص کی 'توقع' کہلاتی ہے۔

۴۶۵۔ جب طرح سے بلحاظ کسی شخص کے لفظ 'توقع' کا استعمال سہولت بخش ہے اسی طرح بلحاظ اشیاء کے الفاظ 'ظنی' قیمت کا استعمال موجب آسانی ہے۔

مثال ۱۔ ایک بیٹے میں ایک پونڈ اور ۵ ٹنگ ہیں۔ ایک اور بیٹے میں ۶ ٹنگ ہیں، پہلے بیٹے میں سے دو ٹنگ نکال کر دوسرے بیٹے میں ڈالے گئے ہیں، پھر دوسرے میں سے دو ٹنگ نکال کر پہلے میں ڈالے گئے ہیں، ہر ایک بیٹے کے سکوں کی 'ظنی' قیمت معلوم کرو۔

پونڈ کے پہلے بیٹے میں ہونے کا احتمال اسکے دو بارہ بدلے جانے اور ایک بار غیبی نہ بدلے جانے کے احتمالوں کے حاصل جمع کے مساوی

$$\text{یعنی پہلے بیٹے میں ہونیکا احتمال} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$$

لہذا پونڈ کے دوسرے بٹوں میں ہونے کا احتمال  $\frac{1}{4}$  ہے  
پس پہلے بٹوں کی ظنی قیمت  $\frac{2}{4} \times ۱۵$  شلنگ +  $\frac{1}{4} \times ۶$  شلنگ  
= ۱ پونڈ ۳ شلنگ ۳ پنس  
: دوسرے بٹوں کی ظنی قیمت = ۳۱ شلنگ -  $\frac{1}{4} \times ۲۰$  شلنگ  
= ۲۷ شلنگ ۹ پنس

اس مسئلہ کو اس طرح بھی حل کیا جاسکتا ہے۔  
جن سکوں کو نکالا گیا ہے ان کی ظنی قیمت = ۲۵ شلنگ کا  $\frac{1}{4}$   
=  $\frac{1}{4} \times ۸$  شلنگ جن کو پھر واپس لایا گیا ہے ان کی ظنی قیمت  
= (۶ شلنگ +  $\frac{1}{4} \times ۸$  شلنگ) کا  $\frac{1}{4}$  =  $\frac{2}{4} \times ۳$  شلنگ  
: پہلے بٹوں کی ظنی قیمت = (۲۵ -  $\frac{1}{4} \times ۸$  +  $\frac{2}{4} \times ۳$ ) شلنگ  
= ۱ پونڈ ۳ شلنگ ۳ پنس حسب سابق

مثال ۲۔ ۱ اور ۲ پونڈ کا ایک انعام جیتنے کے لئے اس  
شرط پر ہے کہ بعد دیگرے ایک فہرہ پھینکتے ہیں کہ جو پہلے ۶ پھینکیگا  
وہ انعام کا مستحق ہوگا۔ اگر ۱ پہلے پھینکے تو ان کی جدا گانہ کیا  
”توقعات“ ہیں۔

پہلی افتاد میں ۱ کا احتمال  $\frac{1}{4}$  ہے اور دوسری افتاد میں  
 $\frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{4}$  ہے، کیونکہ ۱ کو دوسری مرتبہ پھینکنے کا موقع  
صرف اسی صورت میں مل سکتا ہے جبکہ دونوں کھٹاڑی پہلی  
مرتبہ ناکام رہ چکیں تیسری مرتبہ پھینکنے میں ۱ کا احتمال  
( $\frac{5}{4}$ )  $\times \frac{1}{4}$  ہے، کیونکہ ۱ کو تیسرا موقع صرف اسی صورت میں  
مل سکتا ہے جبکہ ۱ اور ۲ دونوں دو مرتبہ ناکام رہ چکیں

علیٰ ہذا القیاس  
پس ۱ کا احتمال لامتناہی سلسلہ

$$\left\{ \dots + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^1 + 1 \right\} \frac{1}{4}$$

کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

اسی طرح سے ب کا احتمال لامتناہی سلسلہ

$$\left\{ \dots + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^1 + 1 \right\} \frac{1}{4} \times \frac{5}{4}$$

کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

∴ ا کے احتمال کی نسبت ب کے احتمال کے ساتھ ۵:۴ ہے، اس لئے جداگانہ اُن کے احتمال بالترتیب  $\frac{1}{4}$  اور  $\frac{5}{16}$  ہیں اور ان کی توقعات ۶ پونڈ اور ۵ پونڈ ہیں۔

۴۶۶۔ اب ہم دو اور مثالیں حل کرتے ہیں جن سے نہایت مفید اور دلچسپ نتائج مستنبط ہوتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک بازی جیتنے کے لئے دو کھلاڑیوں ا اور ب کو بالترتیب م اور ن کھیل جیتنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ ایک کھیل جیتنے کے لئے اُن کے احتمال بالترتیب ق اور ق ہیں جہاں ق اور ق کا مجموعہ ایک ہے انعام اُس کو ملے گا جو پہلے اپنے کھیلوں کی تعداد کو پورا کر لے گا۔ تاہم ہر ایک کھلاڑی نے جیتنے کا کیا

احتمال ہے؟

فرض کرو کہ ا ٹھیک م + ن کھیلوں میں بازی جیت لیتا ہے ایسا ہونے کے لئے لازماً وہ آخری کھیل میں جیتا ہوگا اور اس سے پہلے کے م + ن۔ ۱ کھیلوں میں سے م۔ ۱ کھیلوں میں جیتا ہوگا۔ اس کا احتمال

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots$$

یعنی  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots$  ہے۔



۳۔ ضروری ہے کہ بازی کا فیصلہ  $m + n$  - ۱ کیلوں سے ہو اور ۱  
پنے  $m$  کیلوں میں سے یا  $m + ۱$  کیلوں میں سے  
.....  $m + n$  - ۱ کیلوں میں سے جیت سکتا ہے۔ اس لئے اگر ہم  
بلکہ  $m + n$  - ۱ کیلوں میں بالترتیب ۱، ۲، ۳، .....  $n$  - ۱  
ستیں دیکر محصلہ جملوں کی قیمتیں معلوم کر لیں تو ہمیں ۱ کے جیتنے کا  
اقوال معلوم ہو جائے گا۔  
پس ۱ کے جیتنے کا احتمال

$$Q_1 = \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+n-1} + \dots + \frac{1}{m+n-1} \cdot \frac{1}{m+n-2} \dots \frac{1}{m+n-1}$$

اسی طرح ب کے جیتنے کا احتمال

$$Q_2 = \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+n-1} + \dots + \frac{1}{m+n-1} \cdot \frac{1}{m+n-2} \dots \frac{1}{m+n-1}$$

اس مسئلہ کو "بازیوں کا مسئلہ" کہتے ہیں اور حکیم باسکل کے زمانہ سے  
یہ بعد کے اکثر مشہور و معروف ریاضی دانوں کی توجہ اس مسئلہ  
پر متوجہ رہی ہے، مسئلہ میں پہلے پہلے یہ سوال  
فی دلیرو میٹری کی جانب سے حکیم باسکل کے نشانے پیش کیا گیا اور  
اسکل اور فرما نے اس پر بحث کی لیکن انہوں نے اپنی توجہ کو  
دونوں کھلاڑیوں کے بلحاظ مہارت مساوی ہونے کی صورت تک  
حدود رکھا۔ ان دونوں کے نتائج اوپر کے نتائج سے ذرا مختلف شکل  
میں تھے۔ جو نتائج ہم نے اوپر درج کئے ہیں وہ ہانٹ مارٹ کے ساتھ  
نسب کئے جاتے ہیں جس نے پہلے پہل ان کو اپنی ایک کتاب میں  
۱۷۱۴ء میں شائع کیا۔ یہی نتیجہ بعد ازاں لاگرینج اور لاپلاس نے

مختلف طریقوں سے حاصل کیا۔ موزاںہ کرنے میں مسئلہ کی بہت سی مختلف صورتوں پر تفصیل بحث کی ہے۔

مثال ۲۔ ن مہروں میں سے ہر ایک مہرہ کے ر رُخ ہیں اور ہر مہرہ کے رُخوں پر بالترتیب ۱ سے ر تک عدد منقوش ہیں، اگر ان سب کو علی التاب پھینکا جائے تو بتاؤ کہ جو عدد سب مہروں پر نکلیں ان کے مجموعہ کے ق کے مساوی ہونے کا کیا احتمال ہے۔

چونکہ ن مہروں میں سے ہر ایک مہرہ کے ر رُخوں میں سے کوئی رُخ لے کر آسکتا ہے اس لئے مہروں کے گزرنے کے طریقوں کی تعداد ر ہے۔ نیز جن طریقوں سے ظاہر شدہ عددوں کا مجموعہ ق ہو سکتا ہے ان کی تعداد

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

کی تفصیل میں لاق کے سر کے مساوی ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ ہمیں قوت نماؤں ۱، ۲، ۳، .....، ر میں سے ن ایسے قوت نماؤں کو لینا ہے جن کا مجموعہ ق ہو اور ایسا کرنے کے مختلف طریقوں کی تعداد مرکبا لاق کے سر کے مساوی ہے۔

$$\text{اب جملہ بالا} = (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$= (1 - 1) \frac{1 - 1}{1 - 1}$$

اس لئے اب ہمیں صر (۱-۱) (۱-۱) کی تفصیل میں لاق-ق کا سر معلوم کرنا ہے۔

$$(1 - 1) = 1 - 1 + \frac{n(1 - n)}{1} - \frac{n(2 - n)}{2} + \frac{n(3 - n)}{3} - \dots$$

$$\dots + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} + \frac{n(n+1)}{2!} + n + 1 = (n+1)^3$$

این سلسلوں کو باہم ضرب دو آہ مائل ضرب میں لگانے کا سر محسوب کرو، اِس طرح سے یہ سر

$$\frac{n(n+1) \dots (n+q-1)}{q!} - \frac{n(n+1) \dots (n+q-1)}{q!} = \frac{n(n+1) \dots (n+q-1)}{q!} - \frac{n(n+1) \dots (n+q-1)}{q!}$$

۲:۳ ہے۔ بتاؤ کہ ۵ بازیوں میں سے کم از کم ۳ جیتنے کے لئے وکا کیا

احتمال ہے۔

۲۔ ایک سکے کے رخوں پر بالترتیب ۲ اور ۳ لکھے ہوئے ہیں، سکے کو پانچ مرتبہ اچھالا گیا ہے، بتاؤ کہ جو عدد نکلیں ان کے مجموعہ کے ۱۲ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۳۔ کئی کھیلوں کی بازی میں ہر ایک کھیل کے اندر گزشتہ کھیل کے جیتنے والے کے موافق امکان ۱:۲ ہے، بتاؤ کہ اس کھلاڑی کے لئے جو پہلی بازی جیتتا ہے بعد کی چار بازیوں میں سے کم از کم تین جیتنے کا کیا احتمال ہے۔

۴۔ ایک تھیلی میں ۹ سکے ہیں، ان میں سے ۵ پونڈ ہیں اور باقی مساوی قیمت کے نامعلوم سکے ہیں۔ اگر ایک دفعہ سکے نکالنے کی غرضی قیمت ۱۲ شلنگ ہو تو بتاؤ کہ وہ سکے کیا ہیں۔

۵۔ ایک سکے کو ۱ بار اچھالا گیا ہے، بتاؤ کہ تصویر کے طاق بار نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۶۔ ایک شخص ایک تھیلی میں سے جس میں ۲ پونڈ اور ۳ شلنگ ہیں پین دیکھے دو سکے نکالنے کا مجاز ہے، اس کی توقع کی قیمت دریافت کرو۔

۷۔ چھ اشخاص یکے بعد دیگرے ایک پیسہ اچھالتے ہیں، انعام اس کو ملے گا جس کے پھینکنے سے پہلے تصویر نکلے۔ چوتھے شخص کا احتمال معلوم کرو۔

۸۔ ایک تھیلی میں تین پتیاں ہیں جن پر بالترتیب اعداد ۱، ۲، ۳ لکھے ہیں، ان میں سے ایک کو نکال کر پھر واپس رکھ دیا گیا ہے، اسی عمل کو تین بار کیا گیا ہے مجموعہ کے ۶ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۹۔ ایک سکے کے دو رخوں پر ہند سے ۳ اور ۵ لکھے گئے ہیں سکے کو چار مرتبہ اچھالا گیا ہے۔ اس طرح اچھالنے سے جو عدد بنائے ہوں ان کے حاصل جمع کے ۱۵ سے کم ہونے کے خلاف کیا امکان ہے۔

۱۰۔ تین مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے ٹھیک ۱۰ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۱۔ دو مساوی جہات کے کھڑی و اور ب کیلوں کی ایک بازی میں شریک ہوئے۔ جب ۱ کے جیتنے میں ۳ کیلوں کی اور ب کے جیتنے میں دو کیلوں کی کمی رہ جائے تو وہ کھیلنا چھوڑ دیتے ہیں اگر انعام ۱۶ پونڈ ہو تو بتاؤ کہ اوہیں دونوں کا کیا حصہ ہے۔

۱۲۔ ۱ اور ب تین مہروں سے کھیلے ہیں، ۱ کے مہرے پھینکنے سے برآمد ہوتا ہے بتاؤ کہ ب کا اس سے زیادہ پھینکنے کا کیا احتمال ہے؟  
۱۳۔ ۱ کی جیب میں ایک پونڈ اور ۴ شلنگ ہیں، وہ ان میں سے دو سکوں کو علی الحساب نکال کر ب اور ج کو دے دیتا چاہتا ہے، ج کی توقع کی قیمت دریافت کرو۔

۱۴۔ ایک ہی مہرہ کو ۵ مرتبہ پھینکنے سے (۱) ٹھیک ۳ کے (۲) کم از کم تین کے نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۵۔ ۱ ب کے ساتھ ۵ شلنگ : ۲ شلنگ کی شرط باندھتا ہے کہ دو مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے وہ ب کے ۴ پھینکنے سے پہلے، پھینک سکے گا دونوں کے پاس دو، دو مہرے ہیں اور وہ دونوں ایک ساتھ پھینکتے ہیں حتیٰ کہ ان میں سے ایک جیت جاتا ہے اور ان افتادوں کو جن میں مساوی اعداد برآمد ہوتے ہیں نظر انداز کیا جاتا ہے۔ ب کی توقع معلوم کرو۔

۱۶۔ دو مہروں میں سے ایک مہرہ معمولی کمب ہے اور دوسرا منظم چہار سطحی مجسم۔ ایک شخص ان مہروں کو پھینکتا ہے بتاؤ کہ جو عدد انہیں طرح برآمد کہوں ان کے حاصل جمع کے ۵ سے کم نہ ہونے کا کیا احتمال ہے۔ چہار سطحی کی صورت میں سب سے نچلے رنج پر کا عدد شمار میں آتا ہے۔

۱۷۔ ایک ٹھیلی میں ۵ مالیت کا ایک سکہ ہے اور چند اور سکے ہیں جنکی مجموعی قیمت ۴ ہے۔ ایک آدمی ایک ایک کر کے سکے نکالتا ہے حتیٰ کہ وہ ۵ نکال لیتا ہے، اس کی توقع کی قیمت دریافت کرو۔

۱۵۔ ایک تھیلی میں ۶ ٹکٹ ہیں جن پر اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ لکھے ہوئے ہیں ان میں سے تین ٹکٹ نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے مجموعہ کا ۶ ن کے مساوی ہونے کا احتمال یہ ہے

۵۳

(۱-۵۶) (۲-۵۶)

### مقلوب احتمال

۴۶۷۔ جن صورتوں پر اب تک ہم نے غور کیا ہے ان میں ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ وہ اسباب جو کسی واقعہ کا موجب ہوتے ہیں ان کے متعلق ہمارے معلومات اس قسم کے ہیں کہ ہم ان سے واقعہ مذکور کے واقع ہونے کا احتمال معلوم کر سکتے ہیں اب ہم اس سے مختلف نوعیت کے مسائل پر بحث کریں گے۔ مثلاً اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ کوئی خاص واقعہ کتنی اسباب میں سے کسی ایک سبب کی وجہ سے پیدا ہوا ہے تو ہم یہ معلوم کر چکے کہ ان سبب اسباب میں سے ہر ایک سبب کے واقعہ مذکور پر متبج ہونے کا کیا احتمال ہے۔ نیز انہی اسباب کے زیر عمل غریب واقعات کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال دریافت کر چکے۔

۴۶۸۔ عام ترین صورت پر بحث کرنے سے پہلے ہم ایک عددی مثال حل کر چکے۔

فرض کرو کہ ہمارے پاس دو بٹوے ہیں۔ ایک میں ۵ پونڈ اور ۳ شلنگ ہیں۔ دوسرے میں ۳ پونڈ اور ایک شلنگ ہے۔ نیز فرض کرو کہ ایک پونڈ علی الحساب نکالا گیا ہے، اس پونڈ کے پہلے بٹوے میں سے اور دوسرے بٹوے میں سے نکالے جانے کے بالترتیب کیا احتمال ہیں۔

امتحانوں کی ایک بہت بڑی تعداد ع پر غور کرو، چونکہ واقعہ واقع



کی نسبت زیادہ مرتبہ برآمد ہوگا۔ پس بالآخر ہر ایک رخ کے برآمد ہونے کی نسبت تقییرنا وہی ہونی چاہئے۔  
 اوپر کی مثال ایک عام مسئلہ کی جیسو جیمز برنالی نے دریافت کیا تھا ایک خاص صورت ہے۔ مؤخر الذکر مسئلہ اپنے موجد کی وفات کے ۸ سال بعد ۱۸۷۳ء میں کتاب آرس کان جکٹنڈی میں طبع ہوا تھا۔  
 برنالی کے مسئلہ کا دعویٰ یہ ہے۔

اگر ایک واحد امتحان میں ایک واقعہ کے واقع ہونے کا احتمال  $Q$  ہو تو امتحانوں کی تعداد کو لا انتہا بڑھا دینے سے یہ امر یقینی ہو جاتا ہے کہ کامیابیوں کی تعداد کو کل امتحانوں کی تعداد کے ساتھ نسبت  $Q$  ہوگی۔ بالفاظ دیگر اگر امتحانوں کی تعداد  $C$  ہو تو کامیابیوں کی تعداد  $Q \times C$  ہوگی۔

ملاحظہ ہو ٹاڈ ہنٹر کی تاریخ احتمال (ہسٹری آف پروبے بلیٹی باب ہفتم۔ برنالی کے اس مسئلے کا ثبوت انسائیکلو پیڈیا بریٹانیکا میں احتمال (پروبے بلیٹی) کے مضمون میں دیا ہوا ہے۔

۱۸۷۰ء۔ ایک مشاہدہ شدہ واقعہ کئی غیر متعلق اسباب میں سے کسی ایک سبب سے واقع ہوا ہے۔ کسی ایک مخصوص سبب کے اصلی سبب ہونے کا احتمال دریافت کرو۔

فرض کرو کہ کل اسباب  $N$  ہیں اور واقعہ کے واقع ہونے سے قبل ان اسباب کی موجودگی کے احتمال بالترتیب  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N$  دریافت کئے گئے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ جب  $R$ ،  $Q$  اس سبب موجود ہو تو اس کی بناء پر واقعہ کے واقع ہونے کا احتمال  $Q$  ہے۔ واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کے بعد  $R$ ،  $Q$  اس سبب کے اصلی سبب ہونے کا احتمال دریافت کرنا مقصود ہے۔

امتحانوں کی کسی بہت بڑی تعداد  $C$  پر غور کرو۔ تب پہلے سبب  $Q$  میں سے کسی ایک میں موجود ہوگا اور اس تعداد میں



ق ق ع میں واقعہ مذکور واقع ہوگا۔ اسی طرح سے ق ق ع  
امتحانوں میں واقعہ مذکور دوسرے سبب کی وجہ سے واقع ہوگا اور  
اسی طرح سے باقی ہر ایک سبب کے لئے۔ پس ان امتحانوں کی  
تعداد جن میں واقعہ واقع ہوگا۔

$$(ق ق + ق ق + ..... + ق ق) ع ی ع ح (ق ق)$$

ہے۔ نیز ان امتحانوں کی تعداد جن میں واقعہ مذکور دس سبب  
کی وجہ سے واقع ہوتا ہے ق ق ع ہے، پس واقعہ کے وقوع  
پذیر ہو جانے کے بعد دس سبب کے اصلی سبب یعنی واقعہ  
مذکور کا موجب ہونے کا احتمال

$$ق ق ع \div ع ح (ق ق)$$

ہے، پس دس سبب سے واقعہ مذکور کے وقوع کا احتمال

$$\frac{ق ق ع}{ق ق}$$

ہے۔

۴۷۔ یہ نہایت ضروری ہے کہ کسی واقعہ کے وقوع سے قبل متعدد  
اسباب کی موجودگی کے احتمال اور وقوع کے بعد کسی سبب کے  
اصلی سبب ہونے کے احتمال میں بخوبی تمیز کیا جائے۔ اول الذکر  
کو بالعموم احتمال مقدم سے موسوم کہتے ہیں اور ق ق، ق  
ق، ..... ق سے تعبیر کرتے ہیں، موخر الذکر کو احتمال  
موخر کہتے ہیں۔ اگر ان کو ف، ف، ف، ..... ف سے  
تعبیر کیا جائے تو ہم ابھی ثابت کر چکے ہیں کہ

$$ف = \frac{ق ق ع}{ق ق}$$



اس سے ظاہر ہے کہ موجودہ طرز کے سوالوں میں سب سے پہلے حاصل ضرب  $ق ق$  کی درست قیمت نکال لینی چاہئے۔ بہت سی صورتوں میں  $ق ق$ ،  $ق ق$ ،  $ق ق$ ،  $ق ق$  سب مساوی ہوتے ہیں جس سے عمل بہت مختصر ہو جاتا ہے۔

مثال - تین تھیلوں میں سے ہر ایک میں ۵ سفید گیند ہیں اور ۲ سیاہ گیند اور دو اور تھیلیاں ہیں جن میں سے ہر ایک میں ۱ سفید گیند ہے اور ۴ سیاہ۔ اگر ایک سیاہ گیند نکلے تو اس گیند کے تھیلیوں کے اول جُٹ میں سے نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۵ تھیلیوں میں سے تین تھیلیاں پہلے جُٹ کی ہیں اور دو دوسری کی۔ اس لئے

$$ق = \frac{3}{5} \text{ اور } ق = \frac{2}{5}$$

اگر پہلے جُٹ میں سے ایک تھیلی لی جائے تو اس میں سے سیاہ گیند کے نکلنے کا احتمال  $\frac{2}{5}$  ہے، اگر دوسرے جُٹ میں سے ایک تھیلی لی جائے تو اس میں سے سیاہ گیند کے نکلنے کا احتمال  $\frac{2}{5}$  ہے

$$\text{پس } ق = \frac{2}{5} \text{ اور } ق = \frac{2}{5}$$

$$ق ق = \frac{6}{25} \text{ اور } ق ق = \frac{4}{25}$$

پس گیند مذکور کے پہلے جُٹ میں نکلنے کا احتمال

$$\frac{6}{25} = \left( \frac{4}{25} + \frac{6}{25} \right) \div \frac{2}{5} = \frac{10}{25} \text{ ہے۔}$$

۴۷۳ - جب کوئی خاص واقعہ مشاہدہ کے تحت میں آجائے تو ہم نے دیکھا کہ دفعہ ۴۷۲ کی مدد سے کسی خاص سبب کے اس واقعہ پر منتج ہونے کا احتمال دریافت ہو سکتا ہے۔ اس کے بعد

ہم دوسرے امتحان میں واقعہ مذکور کے واقع ہونے کا احتمال معلوم کر سکتے ہیں یا کسی اور واقعہ کے وقوع کا احتمال محسوب کر سکتے ہیں مثلاً فرض کرو کہ  $Q$  میں سبب کی موجودگی میں واقعہ مذکور کے وقوع کا احتمال  $Q$  ہے اور  $R$  میں سبب کے اصلی سبب ہونیکا احتمال  $R$  ہے، پس دوسرے احتمال میں  $R$  میں سبب کی بنا پر واقعہ مذکور کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال  $Q \cdot R$  ہے لہذا اسباب زیر بحث میں سے کسی ایک سبب سے واقعہ مذکور کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال  $Q + R - Q \cdot R$  ہے۔

مثال - ایک ٹوے میں ۴ سکے ہیں جو یا پونڈ ہیں یا شلنگ، ۲ سکوں کو نکال کر دیکھا گیا ہے یہ دونوں شلنگ ہیں۔ ان کو واپس رکھ دیا گیا ہے۔ ایک اور امتحان سے پونڈ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔ اس سوال کے دو مفہوم ہو سکتے ہیں، ان دونوں پر ہم جداگانہ بحث کریں گے۔

۱۔ اگر ہم یہ خیال کریں کہ شلنگوں کی کسی تعداد کے لئے جانے کا مساوی امکان ہے تو ذیل کے تین مفروضے حاصل ہوتے ہیں۔  
(۱) ممکن ہے کہ تمام سکے شلنگ ہوں، (۲) تین سکے شلنگ ہوں (۳) دو سکے شلنگ ہوں۔

یہاں  $Q = R = Q \cdot R$

نیز  $Q = 1$ ،  $Q = \frac{1}{2}$ ،  $Q = \frac{1}{4}$

پس پہلے مفروضہ کا احتمال  $= 1 \div (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{4}{7}$

دوسرے مفروضہ کا احتمال  $= \frac{1}{2} \div (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{2}{7}$

تیسرے مفروضہ کا احتمال  $= \frac{1}{4} \div (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{7}$

پس ایک اور امتحان سے پونڈ نکلنے کا احتمال =  $(\text{ف} \times \frac{1}{10}) + (\text{ف} \times \frac{1}{10}) + (\text{ف} \times \frac{2}{10}) =$

$$\frac{1}{10} = \frac{5}{100} = \frac{1}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{10} =$$

۲۔ اگر ہر ایک سکے کے پونڈ یا شلنگ ہونے کا مساوی امکان ہے تو  $(\frac{1}{10} + \frac{1}{10})$

کے پھیلاؤ کی رقوم سے ہم دیکھتے ہیں کہ چار شلنگوں کا احتمال  $\frac{1}{14}$  ہے،  
تین شلنگوں کا  $\frac{2}{14}$  یعنی  $\frac{1}{7}$  ہے، دو شلنگوں کا احتمال  $\frac{6}{14}$  یعنی  $\frac{3}{7}$  ہے۔

$$\text{پس } \text{ق} = \frac{1}{14}, \text{ ق} = \frac{2}{14}, \text{ ق} = \frac{6}{14}$$

$$\text{نیز } \text{ق} = 1, \text{ ق} = \frac{1}{4}, \text{ ق} = \frac{1}{4}$$

$$\text{لہذا } \frac{\text{ف}}{6} = \frac{\text{ف}}{12} = \frac{\text{ف}}{6} = \frac{\text{ف} + \text{ف} + \text{ف}}{24} = \frac{1}{24}$$

پس ایک اور امتحان میں پونڈ نکلنے کا احتمال

$$= (\text{ف} \times \frac{1}{10}) + (\text{ف} \times \frac{1}{10}) + (\text{ف} \times \frac{2}{10}) = \frac{1}{10} = \frac{2}{14} + \frac{1}{14} =$$

اب ہم یہ بتائینگے کہ اگر ہمیں چند گواہوں کے متعلق یہ معلوم ہو کہ وہ کس درجہ قابل اعتماد ہیں تو ہم احتمال کے نظریہ کی مدد سے کس طرح ان کی شہادتوں کی صداقت کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔  
ہم یہاں تسلیم کریں گے کہ ہر ایک گواہ جو شہادت دیتا ہے اسکو اپنے ذہن میں بالکل برحق اور سچی سمجھتا ہے خواہ اس کا بیان تجربہ، مشاہدہ یا استدلال پر مبنی ہو۔ پس ہر ایک غلطی یا دروغ گوئی کو اسکی دانستگی کی غلطی پر محمول کرنا چاہئے نہ کہ بالارادہ غیب کاری پر۔

جس قسم کے مسائل پر اب ہم بحث کریں گے وہ علمی اور عقلی مہارت کے لئے نہایت مفید اور سود مند ہیں۔ اگرچہ ان نتائج سے کوئی خاص فائدہ حاصل نہیں ہوتا تاہم یہ سب عام عقل و فہم کے عین مطابق ہیں۔

۵۷۴۔ جب ہم یہ کہتے ہیں کہ کسی شخص کے سچ بولنے کا احتمال ق ہے تو اس سے ہماری مراد یہ ہوتی ہے کہ اگر اس شخص کی شہادتوں کی ایک کثیر تعداد کا ساکنہ کیا جائے تو ان شہادتوں کی نسبت جو سچی ثابت ہوں شہادتوں کی کل تعداد کے ساتھ ق ہے۔

۵۷۵۔ دو گواہ جن کو ایک دوسرے سے کچھ تعلق نہیں ہے اور جن کے سچ بولنے کے احتمال بالترتیب ق اور ق ہیں ایک ہی شہادت پیش کرتے ہیں۔ بتاؤ کہ شہادت کے سچے ہونے کا کیا احتمال ہے۔

یہاں مشاہدہ شدہ واقعہ یہ ہے کہ ۱ اور ۲ دونوں ایک ہی شہادت دیتے ہیں۔ واقعہ سے قبل ۴ مفروضے ہیں، کیونکہ ممکن ہے کہ (۱) ۱ اور ۲ دونوں سچ بولیں، (۲) ۱ سچ بولے اور ۲ جھوٹ بولے (۳) ۱ جھوٹ بولے اور ۲ سچ بولے (۴) ۱ اور ۲ دونوں جھوٹ بولیں۔ ان چاروں مفروضوں کے احتمال بالترتیب

ق ق، ق (۱-ق)، ق (۱-ق)، (۱-ق) (۱-ق)

ہیں۔ پس مشاہدہ شدہ واقعہ کے بعد جس میں ۱ اور ۲ دونوں ایک ہی شہادت دیتے ہیں شہادت کے سچا ہونے کے احتمال کو شہادت کے جھوٹا ہونے کے احتمال کے ساتھ نسبت ق ق : (۱-ق) (۱-ق) ہے۔ یعنی شہادت کے سچا ہونے کا

ق ق

ہے۔

احتمال

ق ق + (۱-ق) (۱-ق) (۱-ق) ہے۔  
اسی طرح سے اگر ایک تیسرا شخص وہی شہادت دے اور اسکے  
سچ بولنے کا احتمال ق ہو تو شہادت کے سچا ہونے کا احتمال  
ق ق ق

ق ق ق + (۱-ق) (۱-ق) (۱-ق) (۱-ق)

ہے اور علیٰ ہذا القیاس گواہوں کی کسی تعداد کے لئے  
۴۷۷۔ دفعہ ماقبل میں ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ ہمیں ۱ اور ب  
کے بیانات کے علاوہ واقعہ کے متعلق کوئی علم نہیں ہے اگر ہمارے  
پاس ان بیانات کے علاوہ واقعہ مذکورہ کی صداقت یا دروغ کے احتمال  
کو معلوم کرنے کے اور ذرائع بھی موجود ہوں تو مختلف مفروضات  
کے احتمال معلوم کرنے کے لئے ان ذرائع کو بھی ملحوظ رکھنا چاہئے۔  
مثلاً اگر ۱ اور ب ایک بیان میں متفق ہوں جس کا احتمال مقدم  
ق ہو تو اس بیان کی صداقت اور دروغ کے احتمال بالترتیب  
ق ق ق اور (۱-ق) (۱-ق) (۱-ق) ہوں گے۔

مثال۔ ۱۲ ٹکٹوں کی ایک لٹری میں دو انعام ہیں : ایک ۹ پونڈ  
کا اور دوسرا ۳ پونڈ کا۔ ۱، ۲ اور ج جن کے سچ بولنے کے احتمال

بالترتیب  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{2}{3}$  اور  $\frac{3}{4}$  ہیں د کو جس کے پاس ایک  
ٹکٹ ہے نتیجہ سے اس طرح معلوم کرتے ہیں : ۱ اور ب کہتے  
ہیں کہ اس نے ۹ پونڈ کا انعام جیتا ہے اور ج کہتا ہے کہ اس نے  
۳ پونڈ والا انعام جیتا ہے، د کی توقع محسوب کرو۔  
تین صورتیں ممکن ہیں، (۱) د نے ۹ پونڈ والا انعام جیتا ہو (۲)  
۳ پونڈ والا انعام جیتا ہو (۳) ۱، ۲ اور ج تینوں نے جھوٹ

بولا ہوا اور د نے کوئی انعام نہ جیتا ہو۔  
اب دفعہ ۴۷ کے طریق کتابت کے موافق احتمال مقدم

$$ق = \frac{1}{12}, ق' = \frac{1}{12}, ق'' = \frac{1}{12}$$

$$\text{میں، نیز } ق' = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{15}, ق'' = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$ق'' = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{ق}{12} = \frac{ق'}{12} = \frac{ق''}{12}$$

$$\text{لہذا د کی توقع} = ۹ \text{ پونڈ کا } \frac{۴}{۱۲} + ۳ \text{ پونڈ کا } \frac{۳}{۱۲}$$

$$= \text{ایونڈ سا شلنگ ۴ پیسہ}$$

۴۷۸۔ یہ بات قابل غور ہے کہ جو نتائج ہم نے دفعہ ۴۷ میں ثابت کئے ہیں ان میں ہم نے فرض کر لیا ہے کہ بیان صرف دو طریقوں سے دیا جاسکتا ہے یعنی اگر سب گواہ متفق طور پر جھوٹ بولیں تو وہ سب ایک ہی جھوٹا بیان دیں گے۔  
اگر یہ صورت نہ ہو تو فرض کرو کہ ا اور ب دونوں کے ایک ہی جھوٹا بیان دینے کا احتمال ج ہے، تب بیان کے سچا ہونے کے احتمال کو اس کے جھوٹا ہونے کے احتمال کے ساتھ نسبت

$$ق : ق' : ج = (۱-ق) : (۱-ق') : ج$$

عام طور پر یہ ایک نہایت غیر اغلب امر ہے کہ دو غیر متعلق گواہ متفقہ طور پر ایک ہی جھوٹ بولیں۔ لہذا ج بالعموم بہت چھوٹا ہوتا ہے اور نیز جوں جوں گواہوں کی تعداد بڑھتی جائے ج بتدریج اور بھی کم ہوتا جاتا ہے۔ ان امور کا لحاظ رکھنے سے ظاہر ہے کہ اگر



دو یا زیادہ غیر متعلق گواہ ایک ہی بیان پر متفق ہوں تو خواہ ان گواہوں کا اعتماد بہت کم ہو تو بھی بیان مذکور کے سچا ہونے کا احتمال بڑھ جاتا ہے۔

مثال۔ ۱ کے ۴ بیانیوں میں سے ۳ بیان سچے ہوتے ہیں اور ب کے ۱۰ میں سے ۷۔ یہ دونوں اس بات پر متفق ہیں کہ ایک تحصیل میں جس میں مختلف رنگوں کے گیند ہیں ایک سفید گیند نکالا گیا ہے۔ اس بیان کے سچا ہونے کا احتمال نہایت کم ہے۔  
اس میں صرف دو غروض ہو سکتے ہیں، (۱) یہ متفقہ شہادت سچ ہے یا (۲) جھوٹ۔

$$\text{یہاں } ق = \frac{1}{4}, \text{ } ق = \frac{5}{4}$$

$$ق = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}, \text{ } ق = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{64}$$

کیونکہ ق کی قیمت معلوم کرتے ہیں ہمیں اس کے احتمال کو ملحوظ رکھنا چاہئے کہ ۱ اور ب سفید رنگ کے گیند کو منتخب کریں جبکہ سفید گیند تحصیل سے نہ نکالا گیا ہو۔ یہ احتمال

اب ان دو مفروضوں کے احتمالات کی نسبت ق : ق یعنی ۳۵ : ۱ ہے پس بیان مذکور کے سچا ہونے کا احتمال  $\frac{35}{36}$  ہے۔

۴۷۹۔ جن صورتوں پر ہم نے بحث کی ہے وہ سب کی سب ہمصر شہادت کی سچائی کے احتمال کے متعلق تھیں، متقویٰ شہادت کی ایک مثال ذیل میں درج کی جاتی ہے۔

۱ کہتا ہے کہ ایک واقعہ ہوا اور اس واقعہ کے وقوع یا عدم وقوع کی اطلاع اس نے ب سے پائی ہے، بتاؤ کہ واقعہ کے وقوع کا

کیا احتمال ہے۔

واقعہ مذکور واقع ہوا ہے (۱) اگر اُن دونوں نے سچ بولا ہے (۲) یا اگر اُن دونوں نے جھوٹ بولا ہے اور واقعہ نہیں ہوا اگر اُن میں سے ایک نے سچ بولا ہے اور دوسرے نے جھوٹ۔

فرض کر دے کہ اور ب کے سچ بولنے کے احتمال ق اور ق ہیں تب واقعہ کے واقع ہونے کا احتمال

$$ق ق + (ق - ق) (ق - ق)$$

ہے اور واقعہ کے واقع نہ ہونے کا احتمال

$$ق (ق - ق) + (ق - ق) (ق - ق)$$

ہے۔

۴۸۔ دفعہ ماقبل کے مسئلہ کا جو حل عام کتابوں میں دیا جاتا ہے وہی یہاں درج کیا گیا ہے درحقیقت ایسا کرنا اعتراض سے خالی نہیں کیونکہ یہ کہنا کہ اگر ا اور ب دونوں نے سچ نہیں بولا تو واقعہ مذکور واقع ہوا ہے صرف اسی صورت میں درست ہو سکتا ہے جبکہ بیان صرف دو طریقوں سے دیا جاسکے تیرہ امر بھی کہ ا نے ب سے اطلاع پائی ہے پورے طور پر درست تصور نہیں کیا جاسکتا کیونکہ اس کی صداقت کا دار و مدار بھی ا کے بیان پر ہی ہے۔

اس سوال کو جو مختلف معنی دے جاسکتے ہیں اور ان معنوں کے متناظر مسئلہ مذکور کے مختلف حلوں پر ایجوکیشنل ٹائمز ریپرٹ جلد ۲۷، ۳۲ پر بسیط اور مدلل بحث کی گئی ہے۔

### امثلہ نمبری ۳۲ (۵)

۱۔ ایک تھیلی میں ۴ گیندیں ہیں لیکن یہ معلوم نہیں کہ وہ کس رنگ کے ہیں۔ ایک گیند کو نکال کر دیکھا گیا ہے کہ وہ سفید ہے۔ سب گیندوں کے سفید ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۲۔ ایک تھیلی میں نامعلوم رنگوں کے چھ گیند ہیں، تین گیندوں کو نکال کر دیکھا گیا ہے کہ ان تینوں کا رنگ سیاہ ہے۔ تھیلی میں اب کسی سیاہ گیند کے باقی نہ رہنے کا کیا احتمال ہے۔

۳۔ ایک کتاب میں ایک لفظ کا کچھ حصہ چھپائی میں حذف ہو گیا ہے، آخر کے دو حروف 'و' و 'ن' پڑتے جاسکتے ہیں، یہ معلوم ہے کہ یا یہ لفظ "صورتوں" ہے یا "مصاحبوں" بناؤ کہ اس لفظ کے معصورتوں ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۴۔ ایک کھیل کے شروع ہونے سے قبل تین کھلاڑیوں کو ب، ج کی کاسیا بیوں کے احتمال بالترتیب ۵، ۳، ۲ کے متناسب ہیں۔ لیکن اثناء کھیل میں کسی حادثہ کی وجہ سے ۱ کا احتمال پہلے احتمال کا ۱/۴ رہ جاتا ہے۔ اب ب اور ج کے الگ الگ کیا احتمال ہیں۔

۵۔ ایک بیٹوں میں نامعلوم قیمت کے ن سکتے ہیں، ایک سکہ نکال کر دیکھا گیا ہے کہ یہ پونڈ ہے، تھیلی میں صرف اسی ایک سکہ کے پونڈ ہونے کا کیا احتمال ہے؟

۶۔ ایک آدمی کے پاس ۱۰ شلنگ ہیں اور ان میں سے ایک ہر دونوں طرف مورتیں ہیں۔ وہ آدمی علی الحساب ایک شلنگ لیکر اسٹو ۵ دھوا اچھالتا ہے اور پانچوں دھو مورت نکلتی ہے، بناؤ کہ اس شلنگ کے دو مورتوں والے شلنگ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۷۔ ایک تھیلی میں نامعلوم رنگوں کے ۵ گیند ہیں۔ دو مرتبہ ایک گیند نکالا گیا ہے اور واپس رکھ دیا گیا ہے اور دونوں مرتبہ یہ گیند سرخ نکلا ہے۔ اب اگر ایک ہی مرتبہ دو گیند نکالے جائیں تو ان دونوں گیندوں کے سرخ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۸۔ ایک بیٹوں میں ۵ سکتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک یا نصف شلنگ یا شلنگ ہے۔ دو کو نکال کر دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں شلنگ ہیں۔ باقی سکوں کی ظنی قیمت معلوم کرو۔

۹۔ ایک ہرے کو تین بار پھینکا گیا ہے اور جو تین عدد نکلتے ہیں ان کا ماسل جمع ۱۵ ہے۔ پہلی بدانت میں جو عدد نکلا تھا اس کے ۴ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۰۔ ۱ کے چار بیانوں میں سے تین بیان سچے ہوتے ہیں اور ۱ کے چھ میں سے پانچ ایک ہی بیان کے اظہار میں دونوں کے ایک دوسرے کی تردید کرنے کا کیا احتمال ہے؟

۱۱۔ ۱ کی تین باتوں میں سے ۲ باتیں سچی نکلتی ہیں اور ۱ کی پانچ میں سے چار وہ دونوں اس بیان میں شقی ہیں کہ ایک ٹھیلی میں سے بیس مختلف رنگوں کے چھ گیند ہیں ایک سرخ گیند نکالا گیا ہے۔ اس بیان کے سچے ہونے کا احتمال محسوب کرو۔

۱۲۔ ۵۲ پنوں کی ایک تاش میں سے ایک پتہ گم ہو گیا ہے، باقی تاش میں سے دو پتے نکالے گئے ہیں اور یہ دونوں حکم کے پتے ہیں، گم شدہ پتے کے حکم کا پتا دینے کا کیا احتمال ہے۔

۱۳۔ ایک گاڑی میں ۱۰ ٹکٹ ہیں اور ۵ پونڈ اور ۱ پونڈ کے دو انعام ہیں۔ ب، ڈ کو جس کے پاس ایک ٹکٹ ہے اطلاع دیتا ہے کہ اس نے ۵ پونڈ کا انعام جیتا ہے، ج، ڈ کو اطلاع دیتا ہے کہ اس نے ایک پونڈ کا انعام جیتا ہے، اگر ب کا اعتماد ۲/۳ ہو اور ج کا ۳/۴ تو ڈ کی توقع کی قیمت معلوم کرو۔

۱۴۔ ایک بوتل میں ۴ گتے ہیں اور ان میں سے دو کو نکال کر دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں پونڈ ہیں، بتاؤ کہ (۱) سب سکوں کے پونڈ ہونے کا اند (۲) اگر سکے واپس رکھ دئے جائیں تو پھر نکالنے پر پونڈ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۵۔ ف، ق کے ساتھ ۸ پونڈ، ۱۲ پونڈ کی شرط لگاتا ہے کہ تین گھڑ دوڑوں میں تین گھوڑے ڈ، ب اور ج جیتنے میں سے خلاف شرطیں بالترتیب ۳:۲، ۴:۱، ۱:۲ ہیں۔ پہلی گھڑ دوڑ میں

و جیتا ہے اور یہ بھی معلوم ہے کہ دوسری گھڑی دوڑ  
میں یا ب جیتا ہے یا کوئی اور گھوڑا د جسے خلاف توقع ۱:۲ ہے  
فنا کی توقع کی قیمت معلوم کرو۔

۱۶۔ ایک قبیلے میں ن گیندیں جو یا سیاہ ہیں یا سفید۔ ہر قسم  
کے گیندوں کے سب عددوں کا امکان مساوی ہے۔ ایک گیند  
نکال کر دیکھا گیا ہے کہ وہ سفید ہے، اس کو واپس رکھ دیا گیا ہے۔  
پھر ایک گیند نکالا گیا ہے یہ بھی سفید ہے، اگر اس کو بھی واپس  
رکھ دیا جائے تو ثابت کرو کہ اب جو گیند نکلیگا اس کے سیاہ ہونیکا

احتمال  $\frac{1}{n}$  (ن - ۱) (ن + ۱) ہے۔

۱۷۔ م ن سکے تھم ٹوٹوں میں تقسیم کئے گئے ہیں یعنی ہر ٹوٹے  
میں ن کے ٹکے گئے ہیں۔ (۱)۔ مخصوص سکوں کے ایک ہی ٹوٹے  
میں ہونے کا کیا احتمال ہے وہ اگر یہ ٹوٹوں کو دیکھا گیا ہو اور ان  
میں سے کسی میں سے بھی ان مخصوص سکوں میں سے کوئی سکہ برآمد  
نہ ہو تو یہ احتمال کیا ہو جائیگا۔

۱۸۔ اگر دو طلبہ فن ریاضی میں کمزور ہیں اور ان کے  
ایک سوال کو حل کرنے کے احتمال جداگانہ  $\frac{1}{n}$  اور  $\frac{1}{m}$  ہیں، دونوں  
کا جواب ایک ہی ہے۔ اگر ان کے ایک ہی غلطی کے ترکیب ہونے کے  
خلاف امکان ۱:۱۰۰۰ ہو تو جواب کے درست ہونے کا کیا احتمال ہے؟

۱۹۔ اگر گواہ ایسے ہیں کہ ہر ایک کے چھ بیانیوں میں سے ایک جھوٹا  
ہوتا ہے، وہ سب اس بات پر متفق ہیں کہ ایک واقعہ ہوا۔ ثابت کرو کہ  
اس بیان کے موافق امکان ۱:۵ ہے جبکہ احتمال مقدم ایک چھوٹی

مقدار  $\frac{1}{1+5}$  کے مساوی ہے۔

## مقامی احتمال - ہندسی طریقے

۴۸۱۔ احتمال کے مسائل کے حل کرنے کے لئے قلم ہندسہ سے مدد لینے میں بالعموم احصائے تکملات سے کام لینا پڑتا ہے۔ تاہم بعض آسان سوالات ایسے بھی ہیں جو محض ابتدائی ہندسہ کی مدد سے حل ہو سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ دو مستقیم خطوں میں سے ہر ایک کا طول  $L$  ہے، ان دونوں میں سے علی الحساب کچھ حصہ کاٹ کر الگ کر دیا گیا ہے، باقی طولوں کے حامل جمع کے  $L$  سے کم ہونے کا کیا احتمال ہے۔  
دونوں خطوں کو ایک دوسرے کے متوازی رکھو اور فرض کرو کہ قطع کرنے کے بعد دائیں جانب کے حصے خارج کر دیے گئے ہیں۔ تب اوپر کا سوال ذیل کے سوال کے ہم معنی ہے: دائیں جانب کے حصوں کے حامل جمع کا بائیں طرف کے حصوں کے حامل جمع سے بڑے ہونے کا کیا احتمال ہے۔ ظاہر ہے کہ پہلے حامل جمع کے دوسرے حامل جمع سے بڑے یا چھوٹے ہونے کے امکان مساوی ہیں۔ پس مطلوبہ احتمال  $\frac{1}{2}$  ہے۔  
نتیجہ صریح۔ اگر یہ معلوم ہو کہ دونوں خطوں میں سے کسی ایک کا طول  $L$  سے بڑا نہیں ہے تو ان کے حامل جمع کے  $L$  سے بڑا نہ ہونے کا احتمال  $\frac{1}{2}$  ہے۔

مثال ۲۔ اگر تین خط علی الحساب طولوں کے لئے جائیں تو بتاؤ کہ ان ایک مثلث بن سکنے کا امکان مثلث نہ بن سکنے کے امکان کے مساوی ہے۔  
ان تین خطوں میں سے ایک نہ ایک خط لازماً باقی دو خطوں کے مساوی ہو گا یا ان دونوں سے بڑا ہو گا۔ فرض کرو اس خط کا طول  $L$  ہے، تب باقی دو خطوں کی بابت ہم صرف یہ کہہ سکتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک کا طول  $L$  سے بڑا نہ ہو گا اور ان کے درمیان واضح ہے۔ اب ہمیں معلوم ہے (دیکھو نتیجہ صریح مثال ۱) کہ اگر دو

خطوں کے طول۔ اور لی کے درمیان ہوں تو ان کے محل جمع کے ل سے بڑے ہونے کا احتمال لی سے بڑے نہ ہونے کے احتمال کے مساوی ہوتا ہے جس سے جواب مطلوبہ فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

مثال ۳۔ ایک دائرہ

کے تین مماس علی الحساب کھینچے گئے ہیں، ثابت

کرو کہ دائرہ مذکور کے ان

مماسوں کا اندرونی دائرہ

ہونے کے خلاف امکان

۱:۳ ہے۔

دائرہ کی سطح مستوی۔

میں تین خط ف، ق، ر

علی الحساب کھینچو اور ان خطوں کے متوازی دائرہ کے ۶ مماس کھینچو۔

ظاہر ہے کہ اس طرح سے جوہر مثلث بنتے ہیں ان میں سے چھ کے لئے

دائرہ مذکورہ جانبی دائرہ ہے اور ۲ کے لئے اندرونی دائرہ اور یہ ہر حالت میں

درست ہے خواہ ف، ق، ر کی سمتیں کچھ ہی ہوں۔ پس مطلوبہ

نتیجہ صاف ظاہر ہے۔

۴۸۲۔ احتمال کے سوالات بعض اوقات ہندسہ تحلیلی کی

مدد سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں۔

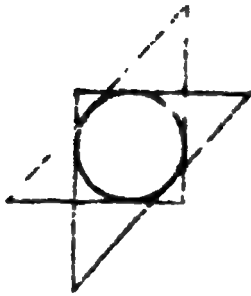
مثال ایک سلاخ پر سے جس کا طول ۱ + ۲ + ۳ ہے دو طول

۱، ۲ اور ۳ علی الحساب ناپ لئے گئے ہیں۔ اس امر کا احتمال

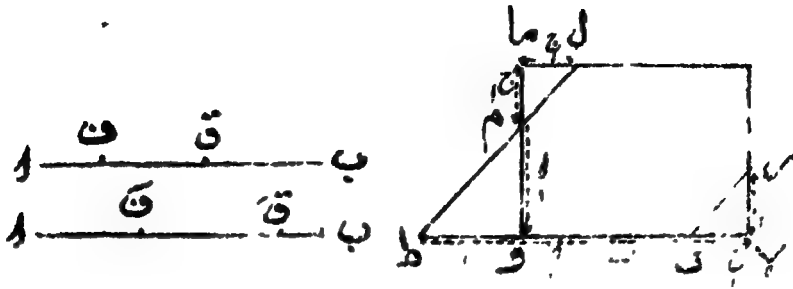
معلوم کرو کہ ایک طول کا کوئی نقطہ دوسرے طول کے کسی نقطہ

پر منطبق نہ ہو۔

فرض کرو کہ خط مذکور ۱، ۲ ہے،



ف  
ر/ق



نیز فرض کرو کہ  $ل = لا$ ،  $ق = ق$  اور  $ب = ب$  سے  
 ب کی سمت میں ناپا گیا ہے۔ پس  $لا + ب = ج$  ہوگا،  
 نیز فرض کرو کہ  $ل = لا$ ،  $ق = ق$  اور  $ب = ب$  سے  
 ب کی سمت میں ناپا گیا ہے، تب  $ما + ب = ج$  سے  
 اب موافق صورتوں میں  $ل < ق$  یا  $ق < ل$   
 پس  $ما < ل$  یا  $لا < ب + ما$  ..... (۱)

لیکن سب ممکن صورتوں میں  $لا < ب + ج$  اور  $ما < ل + ج$  ..... (۲)

دو علی القوائم محاوروں،  $لا$  کو  $ب + ج$  کے مساوی بناؤ اور  $ما$  کو  $ل + ج$  کے مساوی بناؤ۔

خطوط  $ما = ل + لا$  اور  $لا = ب + ج$  کو بالترتیب  
 $ط$  اور  $م$  کے ر سے تعبیر کرو۔

تب  $ما$  اور  $لا$  دونوں  $ج$  کے مساوی ہیں اور  $م$  و  $ط$  دونوں  $ل$  کے مساوی ہیں۔

شرائط (۱) صرف مثلثات  $م$ ،  $لا$  اور  $ک$  کے نقطوں کے



پوری ہوتی ہیں، اور شرائط (۲) مستطیل و لا x و صا کے اندر کے نقطوں سے پوری ہوتی ہیں۔

ج

$$= \frac{\text{مطلوبہ احتمال}}{(ا + ج) (ب + ج)}$$

۴۸۳۔ اب ہم چند متفرق مثالیں درج کر کے اس باب کو ختم کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک صندوق م مساوی خانوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور ان میں ن گیند علی الحساب ڈالے گئے ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ ف خانوں میں سے ہر ایک میں ا گیند ہوں، ق خانوں میں سے ہر ایک میں ب گیند، ر خانوں میں سے ہر ایک میں ج گیند ہوں اور علیٰ ہذا القیاس، جہاں

ف + ق + ب + ر + ج + ..... = ن  
چونکہ ن گیندوں میں سے کوئی گیند م خانوں میں سے کسی خانے میں پڑ سکتا ہے اس لئے کل صورتوں کی تعداد جو واقع ہو سکتی ہیں م ہے اور ان سب کا امکان مساوی ہے۔ موانع صورتوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے ہمیں یہ دیکھنا چاہیے کہ کتنے طریقوں سے ن گیند ف، ق، ر، ج، ..... ایسے جٹوں میں تقسیم ہو سکتے ہیں جن میں بالترتیب ا، ب، ج، ..... گیند ہوں۔ پہلے کوئی س خانے منتخب کر دیا جائے، جہاں ف + ق + ر + ..... کو تقسیم کرتا ہے، ان مختلف طریقوں کی تعداد جن سے یہ عمل کیا جاسکتا ہے

$$\frac{ن!}{ف! ق! ر! ج! ..... (۱) - ہے}$$

پھر ان س خانوں کو ایسے جٹوں میں تقسیم کر دو کہ ان میں خانوں

کی تعداد بالترتیب 'ف'، 'ق'، 'ر'.... ہو، دفعہ ۱۴ کی رو سے جن مختلف طریقوں سے یہ عمل کیا جاسکتا ہے ان کی تعداد

اس  
ف ف ق ر.....

آزکار ن گیندوں کو این خانوں میں اس طرح تقسیم کرو کہ ہر خانوں والے جُٹ کے ہر ایک خانے میں ایک گیند ہوں، ہر خانوں والے جُٹ کے ہر ایک خانے میں دو گیند ہوں، ہر خانوں والے جُٹ کے ہر ایک خانے میں تین گیند ہوں، وغیرہ، ان مختلف طریقوں کی تعداد جن سے یہ عمل کیا جاسکتا ہے

ان  
 (ل) (ر) (ب) (ق) (ج) .....  
 ۶..... (س)

پس ان طریقوں کی تعداد میں سے حسب شرائط مذکورہ بالا یہ گیند ترتیب  
 دے سکتے ہیں جملہ ایت (۱) (۲) اور (۳) کے حاصل ضرب سے تعبیر  
 ہوتی ہے۔ لہذا مطلوبہ احتمال یہ ہے:-

۱۲۸

مثال ۲۔ ایک تھیلی میں ن گیند ہیں۔ یکے بعد دیگرے کٹ مرتبہ ایک ایک گیند نکالا گیا ہے اور ہر دفعہ سفید گیند برآمد ہوتا ہے، اگر (۱) گیند نکال کر ہر دفعہ واپس رکھے جائیں (۲) اگر واپس نہ رکھے جائیں تو بتاؤ کہ پھر ایک گیند نکالنے پر سفید گیند نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

(۱) مشاہدہ کردہ واقعہ سے قبل مساوی امکان کے (ن + ۱) مفروضات ہیں کیونکہ تھیلی میں ۱، ۲، ۳، .....، ن سفید گیند ہو سکتے ہیں۔



(۲) اگر گیند واپس نہ رکھے جائیں تو

$$ق = \frac{ر}{ن} \times \frac{۱-ر}{۱-ن} \times \frac{۲-ر}{۲-ن} \dots \frac{ر-ک}{ن-ک} + ۱$$

اور وہ =  $\frac{ق}{ق + ح} = \frac{(ر-ک+۱)(ن-ک+۱) \dots (۲-ر+۱)(۱-ر+۱)}{(ر-ک+۱)(ن-ک+۱) \dots (۲-ر+۱)(۱-ر+۱) + ح}$

$$= \frac{(ر-ک+۱)(ن-ک+۱) \dots (۲-ر+۱)(۱-ر+۱)}{(ر-ک+۱)(ن-ک+۱) \dots (۲-ر+۱)(۱-ر+۱) + ح}$$

(دفعہ ۹۴ ص ۳)

اگلے گیند کے سفید ہونے کا احتمال =  $\frac{ر-ک}{ن-ک} + ۱$

$$= \frac{ک+۱}{(ن-ک)(ن-ک+۱) \dots (۱-ک)(۱-ک+۱)} \times \frac{ر-ک}{ن-ک} + ۱$$

$$= \frac{ک+۱}{(ن-ک)(ن-ک+۱) \dots (۱-ک)(۱-ک+۱)} \times \frac{ر-ک}{ن-ک} + ۱$$

جو پہلی کے ابتدائی گیندوں کی تعداد کے تابع نہیں۔  
مثال ۳۔ ایک شخص نے ن خط لکھے اور ان کے تیوں کے  
ن غلطے۔ اگر وہ خطوط مذکورہ کو ان لغاتوں میں علی الحساب لے  
تو ہر ایک خط کے غلط لغات میں ڈالے جائے گا کیا احتمال ہے۔  
دس کرد کہ عی ان طریقوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے جن میں سب  
خط غلط لغاتوں میں پہنچتے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ جب سب خط

اپنے اپنے نغافوں میں رہوں تو ان کی ترتیب ا ب ج د .... سے تعبیر ہوتی ہے۔ اب اگر کسی اور ترتیب میں کسی مخصوص حرف ب کی جگہ لے لے تو ب یا ا کی جگہ د کا یا کسی دسے حرف کی جگہ۔  
 (۱) فرض کرو کہ ب، ا کی جگہ سے بتا ہے تب ان طریقوں کی تعداد جن سے باقی سب د - ۲ خط اپنی جگہ سے ہٹ سکتے ہیں عم - ۱ اس لئے جن شکستہ طریقوں سے ۱ باقی د - ۱ معلوم ہیں اس سے کسی ایک کے ساتھ تبادلہ کرنے سے ہٹ سکتا ہے جبکہ باقی سب حروف بھی ساتھ ہی اپنی جگہ سے ہٹے ہوئے ہوں ان کی تعداد (د - ۱) عم - ۲ ہے۔  
 (۲) فرض کرو کہ ا ب کی جگہ لے لیا ہے اور ب، ا کی جگہ نہیں لیتا۔ تب چونکہ ا ب کی جگہ پر قائم ہے اس لئے ان ترتیبوں میں جو مطلوبہ شرائط کو پورا کرتی ہیں خطوط ب، ج، د .... سب کے سب جگہ بدلیں گے۔ یہ عمل عم - ۱ طریقوں سے ہو سکتا ہے پس ان طریقوں کی تعداد جن میں ا کسی دوسرے خط کی جگہ لیتا ہے لیکن وہ خط ا کی جگہ نہیں لیتا (د - ۱) عم - ۱ ہے۔

$$ن = عم - ۱ = (د - ۱) + (عم - ۲)$$

اس سے دفعہ ۴۴۴ کی مدد سے ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ -

$$عم - ن = عم - ۱ = (د - ۱) + (عم - ۲)$$

نیز عم = ۱ = اس لئے بالآخر ہمیں حاصل ہوتا ہے :-

$$عم = ن = \left\{ \frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{۱}{(د-۱)} - \frac{۱}{د} \right\}$$

اب ان کل طریقوں کی تعداد جن میں ن چیزیں ن جگہوں پر رکھی جاسکتی ہیں ن ہے، اس لئے مطلوبہ احتمال

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \dots$$

جو مسئلہ ہم نے اوپر ثابت کیا ہے وہ نہایت ضروری اور دلچسپ ہے اور اپنی کثیر تعداد شکلوں میں سے کسی نہ کسی میں نظریۂ احتمال کی سب کتب میں پایا جاتا ہے۔ اس پر پہلے پہل مائنٹ مارٹ نے بحث کی اور بعد ازاں ڈی مائییر نے، آئلیئر اور لاپلاس نے اس کو عمومیت کا جامہ پہنایا۔

۴۸۴۔ احتمال کا مضمون اس قدر وسیع اور بسیط ہے کہ اسکے مشہور مشہور جبریہ طریقوں کا محض خاکہ سمجھنے کی بہانہ کوشش کی گئی ہے اس سے زیادہ بحث کی اس جگہ گنجائش نہیں۔ اسکے متعلق ہر ایک جبریہ عمل کی توضیح کے لئے مختلف مسائل کا ایک بیش بہا گلدستہ وٹ ورتھ کے چانس اور چانس میں مل سکتا ہے۔ جو طالب علم احصائے تکملات سے واقف ہے اسے چاہئے کہ انسائیکلو پیڈیا بریٹانیکا میں پروفیسر کرافٹن نے جو مضمون احتمال کے متعلق لکھا ہے اس کا مطالعہ کرے۔ اس مضمون کی ابتدا اور مسلسل نشو و نما کے متعلق ملاحظہ ہو ٹاڈ ہنٹر کی تاریخ نظریہ یا سبکل کے زمانہ سے لایلاس کے وقت تک۔

تجارتی لین دین میں احتمال کے نظریہ کے عملی فائدہ پر بحث کرنا اس ابتدائی کتاب کی حدود سے باہر ہے۔ اس امر کے لئے طالب علم انسائیکلو پیڈیا بریٹانیکا میں (ایٹوئیٹیشن) اور انٹیورسن کا مطالعہ کرے۔

### امثلہ نمبری ۳۲ (۲)

۱۔ دو گھروں کی ایک ہی افتاد سے کم از کم ۷ بٹکنے کے موافق کیا احتمال ہے۔

۲۔ ایک ٹوے میں ۵ پونڈ ہیں اور ۴ شنگ۔ ان کے متبادل پونڈ اور شنگ نکلنے کا کیا احتمال ہے جبکہ ان کو یکے بعد دیگرے نکالا جائے اور پہلے پونڈ نکلے۔

۳۔ اگر ۱۰ جہازوں میں سے ۹ جہاز بالا وسط بندرگاہ تک صحیح سلامت پہنچ جاتے ہوں تو بتاؤ کہ پانچ جہازوں میں سے کم از کم کتنی جہازوں کے صحیح سلامت پہنچ جانے کا کیا احتمال ہے۔

۴۔ ایک قرعہ میں سوئے ایک ٹکٹ کے باقی سب ٹکٹ خالی ہیں، ہر ایک آدمی ایک ٹکٹ نکالتا ہے اور اپنے پاس رکھ لیتا ہے، ثابت رہے کہ ہر ایک آدمی کے انعام جیتنے کا احتمال مساوی ہے۔

۵۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۳ سرخ گیند ہیں اور ایک اور تھیلی میں ۴ سفید اور ۵ سرخ گیند ہیں۔ کسی ایک تھیلی میں سے علی الحساب دو گیند نکالے گئے ہیں۔ ان گیندوں کے مختلف رنگوں کے ہونے کا احتمال دریافت کرو۔

۶۔ پانچ اشخاص 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ع' ترتیب وار ایک مہرہ پھینکتے ہیں حتیٰ کہ ان میں سے کوئی ایک یکہ پھینک سکے۔ یہ فرض کر کے کہ وہ مہرہ کو پھینکتے رہیں گے تا وقتیکہ یکہ نکل آئے ان کے اضافی احتمال معلوم کرو۔

۷۔ شطرنج کے ایک تختہ پر کے تین خانے علی الحساب منتخب کئے گئے ہیں ان میں سے دو خانوں کے ایک شنگ کے اور ایک کے دوسرے رنگ کے ہونے کا احتمال دریافت کرو۔

۸۔ ایک شخص دو مہرے پھینکتا ہے۔ ایک مہرہ معمولی مکعب ہے اور دوسرا منظم ذواربعتہ السطوح، ذواربعتہ السطوح کی صورت میں نچلے رخ کا عدد لایا جاتا ہے، ایک انداخت کی اوسط قیمت معلوم کرو اور ۵، ۶، ۷ پھینکنے کے احتمال محسوب کرو۔

۹۔ 'ا' کی ہارت کی نسبت 'ب' کی ہارت کے ساتھ ۳:۱ ہے

اور ج کی مہارت کے ساتھ ۳: ۲ اور د کے ساتھ ۴: ۳۔ بتاؤ کہ اگر  
۱۔ باقی تینوں اشخاص ب، ج، د میں سے ہر ایک کے مقابلہ میں  
مہرہ پھینکے تو اس کے کم از کم دو مرتبہ جیتنے کا کیا احتمال ہے۔  
۱۰۔ چار آدمی بالترتیب ایک ہشت سطحی مہرہ کو اس شرط پر  
پھینکتے ہیں کہ انعام اس کو ملے جو اول مرتبہ ملے پھینکے بتاؤ کہ آخری  
آدمی کے جیتنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۱۔ ساوی مہارت کے دو کھلاڑی اور ب کھیلوں کی ایک  
بازی کھیلتے ہیں اور کو بازی جیتنے کے لئے دو کھیلوں کی ضرورت ہے  
اور ب کو تین کی۔ ان کے جیتنے کے احتمال کا مقابلہ کرو۔  
۱۲۔ ایک بیٹے میں تین پونڈ ہیں اور ۲ شلنگ۔ ایک شخص  
دونوں ہاتھوں سے ایک ایک سکہ نکالتا ہے۔ پھر ایک سکہ کو  
دیکھتا ہے کہ وہ پونڈ ہے، بتاؤ کہ دوسرے ہاتھ میں سکے کے پونڈ  
اور شلنگ ہونے کا مساوی امکان ہے۔

۱۳۔ اور ب ایک انعام کو جیتنے کے لئے ایک مہرہ پھینکتے  
ہیں، پہلے اور اس شرط پر پھینکتا ہے کہ اگر وہ ۶ پھینک سکے تو  
وہ جیت جائیگا۔ اگر نہ ناکام رہے تو پھر ب پھینکے اور اگر ب ۶ یا  
۵ پھینک سکے تو وہ جیت جائیگا۔ اگر وہ بھی ناکام رہے تو پھر  
پھینکے اور اگر ۶، ۵ یا ۴ پھینک سکے تو وہ جیت جائے۔ علیٰ ہذا القیاس  
ہر ایک کھلاڑی کے جیتنے کا احتمال دریافت کرو۔

۱۴۔ ایک بیل گاڑی کے درجہ اول کے خانہ کی چہ نشتوں کو مال  
کرنے کے لئے سات آدمی قرعہ ڈالتے ہیں، ان میں سے (۱) دو مخصوص  
اشخاص کے مقابل کی نشتوں کے مال کرنے کے اور (۲) ایک ہی  
جانب کی دو متصل نشتوں کے مال کرنے کے احتمال محسوب کرو۔

۱۵۔ ایک عدد میں ۷ ہندسے ہیں جن کا مال جمع ۵۹ ہے، ثابت کرو کہ  
اس عدد کے ۱۱ پر تقسیم ہو سکے کا احتمال  $\frac{1}{11}$  ہے۔



۱۶۔ تین مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے ۱۲ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۷۔ ایک تخیل میں ٹکٹ ہیں اور ان پر بالترتیب اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ لکھے ہیں، ایک ٹکٹ کو نکال کر واپس رکھ دیا گیا ہے۔ بتاؤ کہ اس طرح چار ٹکٹ نکلنے سے جو عدد نکالے ہوں ان کے حاصل جمع کے ۸ ہونے کا کیا احتمال ہے؟

۱۸۔ ۱۰ ٹکٹوں میں ۵ ٹکٹ خالی ہیں اور باقی پانچ پر اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ لکھے ہیں۔ تین بابا ایک ایک ٹکٹ نکال کر ۱۰ بنالینے کا کیا احتمال ہے۔ جبکہ (۱) ہر دفعہ ٹکٹ واپس رکھ دئے جائیں (۲) ٹکٹ واپس نہ رکھے جائیں۔

۱۹۔ اگر ن صبح عددوں کو علی الحساب لیکر ضرب دیا جائے تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب کے

آخری عدد کے ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ ہونے کا احتمال  $\frac{5}{6}$  ہے۔

ہونے کا احتمال  $\frac{5}{6}$  ہے، ۵ ہونے کا احتمال  $\frac{5}{10}$  ہے اور ۰ ہونے کا

احتمال  $\frac{10-5-5-5-5-5}{10}$  ہے۔

۲۰۔ ایک بٹوے میں ۲ پونڈ اور ۲ شلنگ ہیں اور ایک عدد سکہ اسی شکل و قامت کا کسی دوسری دھات کا ہے ایک آدمی ایک وقت ایک سکہ نکالتا ہے تا وقتیکہ وہ کھوٹا سکہ نہ نکال لے اس کی توقع کی قیمت معلوم کرو۔

۲۱۔ تین اعضاء ۱، ۲، ۳ اور ج اسی ترتیب سے تین مہرے ایک ساتھ اس شرط پر پھینکتے ہیں کہ جو شخص پہلے ۱۰ پھینک لے اس کو ایک خاص رقم انعام دی جائے گی۔ اگر وہ اسی ترتیب سے پھینکتے جائیں جب تک کہ مشہور مذکور پوری نہ ہو جائے تو ثابت کرو کہ ان کے احتمال بالترتیب

$\left(\frac{5}{13}\right)$ ،  $\left(\frac{5}{13}\right)$  اور  $\left(\frac{5}{13}\right)$  ہیں۔

۲۲۔ دو اشخاص جن کے سچ بولنے کے احتمالی بالترتیب  $\frac{2}{3}$  اور  $\frac{1}{3}$  ہیں شفقت طور پر یہ بیان کرتے ہیں کہ ایک تھیلی میں سے جس میں ۵ انگٹ ہیں ایک مخصوص نمٹ نکالا گیا ہے اس بیان کی صداقت کا احتمال معلوم کرو۔

۲۳۔ ایک تھیلی میں  $\frac{n(n+1)}{2}$  مہرے ہیں، ان میں سے ایک مہرہ پر ۱۱ اور ۳

اور تین پر ۹ لکھا ہے اور غرضی ہذا القیاس ایک آدمی تھیلی میں سے ایک مہرہ اس شرط پر نکالتا ہے کہ جو عدد اس مہرے پر و اس کو اتنے ہی شلنگ دے جائیں۔ اس آدمی کی توقع کی قیمت معلوم کرو۔

۲۴۔ اگر ۱۰ چیزیں تین شخصوں میں تقسیم کی جائیں تو ثابت کرو کہ ایک خاص

آدمی کے ۵ سے زیادہ چیزیں لینے کا احتمال  $\frac{1504}{19983}$  ہے۔

۲۵۔ ایک سلاخ پر علی الحساب  $n$  نشان لگا کر سلاخ کو این نشانات سے حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ ان حصوں میں سے ہر ایک حصہ کے سلاخ کے  $\frac{1}{n}$  ہیں جسے

سے بڑے نہ ہونے کا احتمال  $\frac{1}{n}$  ہے۔

۲۶۔ دو بٹوں میں سے ایک میں تین پونڈ اور ایک شلنگ ہے اور دوسرے میں ۳ شلنگ اور ایک پونڈ۔ ایک غیر معین بٹ سے ایک سکے نکال کر دوسرے میں ڈال دیا گیا ہے۔ پھر دونوں بٹوں میں سے ایک ایک سکے نکال کر دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں شلنگ ہیں۔ اگر پھر دونوں بٹوں میں سے ایک ایک سکے اور نکالا جائے تو ان دونوں سکوں کے شلنگ ہونے کے خلاف کیا امکان ہے۔

۲۷۔ ایک دائرہ کے محیط پر علی الحساب تین نقطے لیکر ان کو ملانے سے ایک مثلث بنا یا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کے سب زاویوں کے حادہ

ہونے کے خلاف امکان ۱۲ ہے۔

۲۸۔ ایک دائرہ کے محیط پر تین نقطے علی الحساب لئے گئے ہیں، بتاؤ کہ اس طے سے جو تین نویں حاصل ہوں ان میں سے کسی دو تیسوں کے ملکر تیسری تیس سے بڑے ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۲۹۔ ایک خط کو علی الحساب تین حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے ان حصوں سے ایک مثلث بن سکے کا کیا احتمال ہے۔

۳۰۔ ایک بڑے میں ۲۵ پونڈ ہیں اور دوسرے بڑے میں ۱۰ پونڈ اور ۵ اشنگ ایک بڑے کو علی الحساب منتخب کر کے اس میں سے ہم کئے کھالے گئے ہیں اور سب کے سب پونڈ ہیں اس بڑے کے صرف پونڈوں والا بڑا ہونے کا کیا احتمال ہے اور اگر اس بڑے میں سے ایک اور سکے نکالا جائے تو اس کی تین قیمت کیا ہے۔

۳۱۔ ایک خط مستقیم کا طول ۱۰ ہے اس پر دو نقطے علی الحساب لئے گئے ہیں ان نقطوں کے درمیانی فاصلہ کے ب سے بڑے ہونے کا کیا احتمال ہے

۳۲۔ ایک خط مستقیم کا طول ۱۰ ہے اس پر علی الحساب دو نقطے لیکر اس کو تین حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اس کا احتمال معلوم کرو کہ کوئی حصہ ب سے بڑا نہ ہو۔

۳۳۔ ایک خط مستقیم کا طول ۱۰ + ب ہے اس پر دو طول ۱۰ اور ب علی الحساب ناپے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان طولوں کے مشترک حصہ کے

ج سے زیادہ نہ ہونے کا احتمال  $\frac{ج}{۱۰+ب}$  ہے جہاں ج کم ہے ۱۰ + ب سے۔

نیز بتاؤ کہ چھوٹے طول ب کے بڑے طول ۱۰ کے کئی طور پر اندر آنے کا احتمال  $\frac{۱۰-ب}{۱۰}$  ہے۔

۳۴۔ ایک خط مستقیم کا طول ۱۰ + ب + ج ہے اس پر علی الحساب دو طول ۱۰ اور ب ناپے گئے ہیں۔ ان کے مشترک حصے کے د سے

زیادہ نہ ہونے کا احتمال  $\frac{(ج + د)^2}{(ج + د)(ج + ب)}$  ہے جہاں د و ا ب سے کم ہے۔

۳۔ ایک یورپین ریلوے میں درجہ اول کے کل خانے ہیں درجہ دوم کے م اور درجہ سوم کے ن۔ اس گاڑی میں دو مرد و اور ب اور دو عورتیں ج اور د سفر کر رہے ہیں جو سب ایک دوسرے سے ناواقف ہیں۔ و اور ب کے سوا ہونے سے قبل درجہ اول، درجہ دوم اور درجہ سوم میں سفر کرنے کے احتمال بالترتیب ل، م، ن، د، ہں اور ج اور د کے یہی احتمال بالترتیب ل، م اور ن ہیں، ثابت کرو کہ ل، م، ن، د کی تمام قیمتوں کے واسطے (سوائے اس خاص صورت کے جب کہ ل، م، ن، د = ل، م، ن) و اور ب کے ایک ہی عورت کی رفاقت میں ہونے کا احتمال الگ الگ عورتوں کی رفاقت میں ہونے کے احتمال سے مقابلہ زیادہ ہے۔



# تینتیسواں باب

## مقطعات

۳۸۵۔ باب ہذا میں ہم مقطعات اور ان کے ابتدائی خواص پر اجمالی بحث کریں گے۔ اس مختصر بیان سے طالب علم بندہ تحلیل اور نیز علم ریاضی کے دیگر اعلیٰ شعبوں میں مقطعات کی ترقی کے مستفید ہونے کے قابل ہو جائے گا۔ شعبہ تحلیل کی اس شاخ کے تعلق زیادہ مفصل اور موضوع معلومات ڈاکٹر سالمن کی کتاب اعلیٰ جبر و مقابلہ جدید کے ابتدائی اسباق

( Lessons Introductory to modern Higher algebra )

سے اور نیز موٹر کے نظریہ مقطعات ( Theory of Determinants )

سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

۳۸۶۔ دو متجانس خطی مساواتوں

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

پر غور کرو۔ پہلی مساوات کو  $b_2$  سے اور دوسری کو  $b_1$  سے ضرب دو۔ پھر تفریق کر کے حاصل تفریق کو لا پر تقسیم کرو، ایسا کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

اس نتیجہ کو بعض اوقات شکل

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \end{array} =$$

میں لکھتے ہیں۔ دائیں طرف کا جملہ مقطع کہلاتا ہے اس میں دو قطاروں اور دو ستون ہیں۔ اس کی تفصیل میں ہر ایک رقم دو تقادیر کا حاصل ضرب ہے۔ اس لحاظ سے مندرجہ بالا مقطع کو دوسرے رتبہ کا مقطع کہتے ہیں۔

حروف ب، پ، س، ب کو مقطع کے اجزائے افرادی کہتے ہیں۔

اور رقوم ب، س، ب کو اجزائے ترکیبی سے موسوم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \end{array}$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اس مقطع کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی جبکہ اس کی قطاروں کو ستونوں میں اور ستونوں کو قطاروں میں بدل دیا جائے۔

۳۸۸۔ یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \end{array}$$

یعنی اگر ہم ایک مقطع کی دو قطاروں یا دو ستونوں کو ایک دوسرے سے بدل دیں تو جو مقطع حاصل ہوگا وہ پہلے مقطع سے صرف بلحاظ علامت کے مختلف ہوگا۔

۳۸۹۔ ذیل کی متجانس خطی مساواتوں پر غور کرو۔

$$\text{ب} + \text{ب} + \text{ب} = \text{ج}$$

۱ لا + ب ۲ ما + ج ۳ ی = .

۱ لا + ب ۲ ما + ج ۳ ی = .

ان میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرنے سے سب دفعہ ۱، ۲، ۳ میں حاصل ہوتا ہے۔

۱ (ب ۲ ج - ب ۳ ج) + (ب ۲ ج - ب ۳ ج) + (ب ۲ ج - ب ۳ ج) = .

یا ۱ | ب ۲ ج | + | ب ۲ ج | + | ب ۲ ج | =

اس مقطعہ کو بالعموم اس شکل میں لکھا جاتا ہے۔

= | ب ۲ ج |

اس میں دائیں طرف ۱، ۲، ۳ جملہ کو بونین قطاروں اور ۱، ۲، ۳ ستونوں پر مشتمل ہے  
تیسرے رتبہ کا مقطعہ بنے ہیں۔

۴۹۰۔ مقطعہ بالا کی تفصیلی عبارت کو اس کی رقوم کی ترتیب کو قدرے بدلنے  
سے یوں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

۱ (ب ۲ ج - ب ۳ ج) + ۱ (ب ۲ ج - ب ۳ ج)

+ ۱ (ب ۲ ج - ب ۳ ج)

یا ۱ | ب ۲ ج | + | ب ۲ ج | + | ب ۲ ج | =

|      |     |     |     |
|------|-----|-----|-----|
| لہذا | ب ج | ب ج | ب ج |
|      | ب ج | ب ج | ب ج |
|      | ب ج | ب ج | ب ج |

یعنی مقطع مذکور کی قیمت میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی جبکہ اسکی قطاروں کو ستونوں میں اور ستونوں کو قطاروں میں بدل دیا جائے۔  
۴۹۱ — فقط اقبل کی رو سے

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| ب ج | ب ج | ب ج | ب ج |
| ب ج | ب ج | ب ج | ب ج |
| ب ج | ب ج | ب ج | ب ج |
| ب ج | ب ج | ب ج | ب ج |
| ب ج | ب ج | ب ج | ب ج |
| ب ج | ب ج | ب ج | ب ج |
| ب ج | ب ج | ب ج | ب ج |
| ب ج | ب ج | ب ج | ب ج |

نیز دفعہ ۴۸۹ سے

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| ب ج | ب ج | ب ج | ب ج |
| ب ج | ب ج | ب ج | ب ج |
| ب ج | ب ج | ب ج | ب ج |
| ب ج | ب ج | ب ج | ب ج |
| ب ج | ب ج | ب ج | ب ج |
| ب ج | ب ج | ب ج | ب ج |
| ب ج | ب ج | ب ج | ب ج |
| ب ج | ب ج | ب ج | ب ج |

اب ہم ذیل میں تیسرے مرتبہ کے مقطع کو پھیلاتے کا آسان طریقہ درج کرتے ہیں۔ عز کوٹے سے معلوم ہو گا کہ خواہ ہم مقطع کو پہلے



تین سے پھیلائیں یا پہلی قطار سے ہر دو صورتوں میں وہی جواب حاصل ہوتا ہے۔

مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ اجزائے افرادی  $\lambda$ ،  $\mu$ ،  $\nu$  میں سے ایک کا سر درجہ دوم کا دو مقطع ہے جو اس جزو افرادی میں سے رہنے والے ستون اور قطار کو نکال دینے سے باقی رہتا ہے، یہ مقطعات ابتدائی مقطع کے صغائر کہلاتے ہیں اس لحاظ سے مساوات (۱) کی دائیں جانب کے رکن کو اس طرح

$$\lambda - \mu + \nu$$

شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں جہاں  $\lambda$ ،  $\mu$ ،  $\nu$  بالترتیب  $\lambda$ ،  $\mu$ ،  $\nu$  صغائر ہیں۔

نیز مساوات (۲) سے مقطع مذکورہ

$$\lambda - \mu + \nu$$

۴۹۔ مقطع  
 جہاں  $\lambda$ ،  $\mu$ ،  $\nu$  بالترتیب  $\lambda$ ،  $\mu$ ،  $\nu$  کے صغائر ہیں

$$= (\lambda - \mu + \nu) + (\mu - \nu + \lambda) + (\nu - \lambda + \mu)$$

$$= (\lambda - \mu + \nu) - (\mu - \nu + \lambda) + (\nu - \lambda + \mu)$$

پس لے

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \mu & \nu & \lambda \\ \nu & \lambda & \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \mu & \nu & \lambda \\ \nu & \lambda & \mu \end{vmatrix}$$

اس سے ظاہر ہے کہ اگر دو متصل ستونوں کو یا متصل قطاروں کو باہم بدل دیا جائے تو مقطعہ کی علامت بدل جاتی ہے لیکن عددی قیمت میں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا۔  
اگر ہم اختصار کی خاطر مقطعہ

|   |   |   |
|---|---|---|
| ج | ب | ل |
| ج | ب | ل |
| ج | ب | ل |

کو (ل ب ج) سے تعبیر کریں تو جو نتیجہ ہم نے ابھی حاصل کیا ہے اس کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے: (ب ل ج) = (ل ب ج)۔ اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$(ج ل ب) = (ل ج ب) = (ل ب ج)$$

۴۹۳۔ اگر ایک مقطعہ کے دو ستون یا دو قطاریں متماثل ہوں تو مقطعہ صفر ہو جاتا ہے۔

درس کرو کہ مقطعہ کی قیمت ق ہے، تب دو ستونوں یا دو قطاروں کو باہم بدلنے سے مقطعہ کی قیمت 'ق' ہو جاتی ہے، لیکن ظاہر ہے کہ متماثل قطاروں اور ستونوں کو بدلنے سے مقطعہ مذکورہ میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہو سکتی، اسلئے ق = ق یعنی ق = ۰، پس ہمیں مندرجہ ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:-

$$ل - ل - ل ل + ل ل = ق$$

$$ب - ل - ب ل + ب ل = ۰$$

$$ج - ل - ج ل + ج ل = ۰$$

۴۹۴۔ اگر کسی قطار یا ستون کے ہر ایک جزوِ افرادی کو ایک ہی جزوِ ضربی سے ضرب دیا جائے تو مقطعہ مذکور اس جزوِ ضربی سے ضرب کھا جاتا ہے۔

$$\begin{array}{c|c} \text{م} & \text{ب} \\ \text{م} & \text{ب} \\ \text{م} & \text{ب} \end{array} \bigg| \begin{array}{c} \text{ج} \\ \text{ج} \\ \text{ج} \end{array} = \begin{array}{c} \text{م} \\ \text{م} \\ \text{م} \end{array} \bigg| \begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \\ \text{ب} \end{array} - \begin{array}{c} \text{م} \\ \text{م} \\ \text{م} \end{array} \bigg| \begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \\ \text{ب} \end{array} + \begin{array}{c} \text{م} \\ \text{م} \\ \text{م} \end{array} \bigg| \begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \\ \text{ب} \end{array}$$

۴۹۵۔ اگر ایک قطار یا ستون کا ہر ایک جزوِ افرادی کسی اور قطار یا ستون کے متناظر جزوِ افرادی کا ایک ہی ضعف ہو تو مقطعہ کی قیمت صفر ہوگی۔  
مثلاً

$$\begin{array}{c|c} \text{ع} & \text{ب} \\ \text{ع} & \text{ب} \\ \text{ع} & \text{ب} \end{array} \bigg| \begin{array}{c} \text{ج} \\ \text{ج} \\ \text{ج} \end{array} + \begin{array}{c|c} \text{ع} & \text{ب} \\ \text{ع} & \text{ب} \\ \text{ع} & \text{ب} \end{array} \bigg| \begin{array}{c} \text{ج} \\ \text{ج} \\ \text{ج} \end{array} = \begin{array}{c|c} \text{ع} & \text{ب} \\ \text{ع} & \text{ب} \\ \text{ع} & \text{ب} \end{array} \bigg| \begin{array}{c} \text{ج} \\ \text{ج} \\ \text{ج} \end{array}$$

کیونکہ دائیں طرف کا جملہ

$$\begin{aligned} &= (\text{ع} + \text{ب}) - (\text{ع} + \text{ب}) + (\text{ع} + \text{ب}) - (\text{ع} + \text{ب}) \\ &= (\text{ع} - \text{ع}) + (\text{ب} - \text{ب}) + (\text{ع} - \text{ع}) + (\text{ب} - \text{ب}) \end{aligned}$$

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

اسی طرح سے اگر کسی ایک قطار یا ستون کا ہر ایک جزوِ افرادی م رقوم پر مشتمل ہو تو اس مقطعہ کو م مقطعات کے حامل جمع کے

طرح پر لکھ سکتے ہیں۔  
اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ج} & \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} + \text{ج} \\ \hline \text{ج} & \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} + \text{ج} \\ \hline \text{ج} & \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} + \text{ج} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{ج} & \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} + \text{ج} \\ \hline \text{ج} & \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} + \text{ج} \\ \hline \text{ج} & \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} + \text{ج} \\ \hline \end{array}$$

ان نتائج کی تقسیم نہایت آسانی سے کی جاسکتی ہے۔ مثلاً اگر تین  
ستونوں کے اجزائے افادی بالترتیب م، ن، ف رقوم پر مشتمل  
ہوں تو ہم اس مقطع کو م ن ف مقطعات کے حاصل پر جمع کی  
شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ج} + \text{ب} & \text{ج} + \text{ب} & \text{ج} + \text{ب} \\ \hline \text{ج} + \text{ب} & \text{ج} + \text{ب} & \text{ج} + \text{ب} \\ \hline \text{ج} + \text{ب} & \text{ج} + \text{ب} & \text{ج} + \text{ب} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{ج} + \text{ب} & \text{ج} + \text{ب} & \text{ج} + \text{ب} & \text{ج} + \text{ب} \\ \hline \text{ج} + \text{ب} & \text{ج} + \text{ب} & \text{ج} + \text{ب} & \text{ج} + \text{ب} \\ \hline \text{ج} + \text{ب} & \text{ج} + \text{ب} & \text{ج} + \text{ب} & \text{ج} + \text{ب} \\ \hline \end{array}$$

ان چار مقطعات میں سے پہلے تین معدوم ہو جاتے ہیں اور مقطع زیر بحث  
ان میں سے صرف آخری مقطع کے مساوی رہ جاتا ہے۔ لہذا اس کی قیمت

$$\begin{aligned} &= \{ (\text{ج} + \text{ب}) - (\text{ب} + \text{ج}) + (\text{ب} + \text{ج}) - (\text{ج} + \text{ب}) \} \\ &= 3 \text{ ب ج} - 2 \text{ ب} - \text{ج} \end{aligned}$$

مثال ۲-  $\begin{vmatrix} 21 & 19 & 64 \\ 12 & 13 & 39 \\ 24 & 22 & 81 \end{vmatrix}$  کی قیمت معلوم کرو۔

پہلیاں  $\begin{vmatrix} 21 & 19 & 10 \\ 12 & 12 & 0 \\ 24 & 22 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & 19 & 56+10 \\ 12 & 13 & 39+0 \\ 24 & 22 & 62+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & 19 & 64 \\ 12 & 13 & 39 \\ 24 & 22 & 81 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 12 & 10 \\ 1 & 13 & 0 \\ 2 & 22 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2+19 & 19 & 10 \\ 1+13 & 13 & 0 \\ 2+22 & 22 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 21 & 19 & 10 \\ 12 & 13 & 0 \\ 24 & 22 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 21 & 19 & 56 \\ 12 & 13 & 39 \\ 24 & 22 & 62 \end{vmatrix} +$

$\begin{vmatrix} 2 & 19 & 10 \\ 1 & 12 & 0 \\ 2 & 22 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 19 & 10 \\ 1 & 12 & 0 \\ 2 & 22 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 19 & 10 \\ 1 & 12 & 0 \\ 2 & 22 & 9 \end{vmatrix} = 23 - 20 = 3$

۴۹۶- ذیل کے مقعدہ پر غور کرو:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

دفعہ قابل کی طرح ہم بتا سکتے ہیں کہ یہ ذیل کے تین مقطعات

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

کے مساوی ہے۔ ان میں سے آخر کے دو مقطعات حسب دفعہ ۴۹۴ نتیجہ صریح معدوم ہو جاتے ہیں۔ اس سے ظاہر ہے کہ مفروضہ مقعدہ کی قیمت اس مقعدہ کے مساوی ہے جو اٹلی مقعدہ کے

پہلے ستون کے اجزائے افرادی میں سے باقی ستونوں کے متناظر اجزائے  
 ادی کے مساوی ضعف تفریق کرنے اور باقی ستونوں کو حسب سابق  
 قرار رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔  
 برعکس اس کے

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \end{array} & \begin{array}{c} ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \end{array} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \end{array} & \begin{array}{c} ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \end{array} \\ \hline \end{array}$$

بہر پہلے ستون کے متعلق جو بات اوپر ثابت کی جا چکی ہے وہ  
 ایک قطار یا ستون کے لئے درست ہے۔ پس ثابت ہوا کہ  
 کسی ایک مقطعہ کو مختصر کرنے میں ہم کسی قطار یا ستون کو ایک  
 ایسی قطار یا ستون سے بدل سکتے ہیں جو حسب ذیل طریقہ سے  
 بنا ہے۔

اُس ستون یا قطار کو جس کے اجزائے افرادی کو آپ بدلنا  
 چاہتے ہیں اور ان میں باقی ایک یا زیادہ قطاروں یا ستونوں کے  
 متناظر اجزائے افرادی کے مساوی ضعف جمع یا تفریق کر دو۔  
 تھوڑی سی مشق کے بعد یہ معلوم ہوگا کہ کسی مقطعہ کو اس کی  
 یا زیادہ قطاروں یا ستونوں کو ایک ساتھ بدلنے سے فوراً مختصر  
 کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \end{array} & \begin{array}{c} ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \end{array} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \end{array} & \begin{array}{c} ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \\ ۱ + ف + ب + ق + ج \end{array} \\ \hline \end{array}$$

لیکن اس قاعدہ کو استعمال کرتے وقت یہ احتیاط رکھنی چاہئے کہ



تفریق کر دئے تھے تیسرے ستون کے لئے دئے ہوئے مقطعہ کے تیسرے ستون کے اجزائے افردی میں سے دوسرے ستون کے مناظر اجزائے افردی تفریق کرو۔ دوسری منزل پر اجزائے ضربی ۳، اور ۴، باہر نکال لو۔ تیسری منزل پر پہلی قطار کو برقرار رکھو۔ دوسری نئی قطار کے لئے دوسری قطار کے اجزائے افردی میں سے پہلی قطار کے مناظر اجزائے افردی تفریق کرو، تیسری نئی قطار کے لئے پہلی قطار کے اجزائے افردی کو ۲ سے ضرب دیکر تیسری قطار کے مناظر اجزائے افردی میں سے تفریق کرو۔ بعد کی منزلیں بالکل تسلسل میں

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{مثال ۲۔ ثابت کرو کہ مقطعہ} & ۱-ب-ج & ۱۲-۱۲ \\ \hline & ۲ب & ۲ب-ج-۱۲ \\ \hline & ۲ج & ۲ج-۱-ب \\ \hline \end{array}$$

$$= (۱+ب+ج)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{مندرجہ بالا مقطعہ} & ۱+ب+ج & ۱+ب+ج+۱+ج+ب+ج \\ \hline & ۲ب & ۲ب-ج-۱۲ \\ \hline & ۲ج & ۲ج-۱-ب \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline = (۱+ب+ج) \times & ۱ & ۱ \\ \hline & ۲ب & ۲ب-ج-۱۲ \\ \hline & ۲ج & ۲ج-۱-ب \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline = (۱+ب+ج) \times & ۱ & ۱ \\ \hline & ۲ب & ۲ب-ج-۱۲ \\ \hline & ۲ج & ۲ج-۱-ب \\ \hline \end{array}$$

$$= (۱+ب+ج)^۲$$

[تشریح۔ پہلے نئے مقطعہ میں پہلی قطار ابتدائی مقطعہ کی تین قطاروں کے اجزائے افردی کے حامل جمع کے مساوی ہے اور دوسری اور تیسری قطاریں وہی ہیں، تیسرے نئے مقطعہ میں پہلے ستون کو برقرار رکھا گیا ہے، اور دوسرے نئے ستون کے اجزائے افردی دوسرے ستون کے اجزائے افردی



میں سے پہلے ستون کے اجزائے افردی تفریق کرنے سے حامل ہوتے ہیں اور تیسرے نئے ستون کے اجزائے پہلے ستون کے اجزائے افردی کو تیسرے ستون کے اجزائے افردی میں سے تفریق کرنے سے حامل ہوتے ہیں، بلکہ تبدیلیاں از خود واضح ہیں۔

۴۹۶۔ یہ بتانے سے پہلے کہ دو مقطعات کے حامل ضرب کو ایک مقطع کی شکل میں کس طرح لکھا جاسکتا ہے ہم ذیل کے مقطع کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔

|    |   |   |   |    |   |   |   |    |   |   |   |
|----|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|
| اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د |
| اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د |
| اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د |

دفعہ ۹۵ کی رو سے ہمیں معلوم ہے کہ مندرجہ بالا مقطع ۲۷ مقطعات کے حامل جمع کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے، ان میں سے تین مقطعات بطور نمونہ ذیل میں درج کئے جاتے ہیں۔

|    |   |   |   |    |   |   |   |    |   |   |   |
|----|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|
| اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د |
| اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د |
| اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د |

اور یہ مقطعات بالترتیب

|    |   |   |   |    |   |   |   |    |   |   |   |
|----|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|
| اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د |
| اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د |
| اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د | اے | ب | ج | د |

کے مساوی ہیں، ان میں سے پہلا مقطع معدوم ہو جاتا ہے، اسی طرح یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ کل ۲۷ مقطعات میں سے ۲۱ مقطعات معدوم ہو جائیں



لیکن مساواتیں (۳) پوری ہونگی اگر مساواتیں (۱) پوری ہوں اور  
مساواتیں (۱) پوری ہونگی اگر یا

$$(۵) \dots\dots\dots = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

یا  $\dots\dots\dots = ۱$  اور  $\dots\dots\dots = ۱$   
یعنی انموذکر ضرب کا کسی وجہ سے

$$(۶) \dots\dots\dots = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

پس اگر مساواتیں (۵) اور (۶) پوری ہوں تو مساوات (۳) بھی  
پوری ہوگی لہذا مساوات (۴) کے مقطع میں مساواتوں (۵) اور (۶)  
سے مقطعات بطور اجزائے ضربی شامل ہونگے۔ نیز (۴) کے مقطع  
کے ابعاد اور مساواتوں (۵) اور (۶) کے مقطعات کے حاصل ضرب کے  
ابعاد پر غور کرنے سے ظاہر ہے کہ (۴) کا اگر کوئی اور جزو ضربی ہو  
تو وہ صرف عددی ہوگا، لہذا۔

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

کیونکہ مساواتوں کے دونوں طرف  $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}$  کے جو ضربیں  
اُن کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ مذکورہ بالا عددی سر ا ہے۔

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

نتیجہ صریح۔  $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$   
مندرجہ بالا طریقہ ثبوت بالکل عام ہے اور ہر رتبہ کے مقطعات پر  
اس کا مساوی طور پر اطلاق ہو سکتا ہے۔

چونکہ ایک مقطع کی قیمت میں اسکی قطاروں کو ستونوں میں اور اسکے ستونوں کو قطاروں میں بدلنے سے کوئی فرق نہیں آتا اس لئے ظاہر ہے کہ دو مقطعات کے حاصل ضرب کو ایک مقطع کی شکل میں کئی طریقوں سے لکھا جاسکتا ہے، لیکن ان سب کو پھیلانے سے ایک بار جواب حاصل ہوگا۔

$$\begin{array}{c|c|c} \text{مثال۔ ثابت کرو کہ} & \begin{array}{c} \text{ب} \text{ ج} \\ \text{ب} \text{ ج} \\ \text{ب} \text{ ج} \end{array} & = & \begin{array}{c} \text{ب} \text{ ج} \\ \text{ب} \text{ ج} \\ \text{ب} \text{ ج} \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} \text{ب} \text{ ج} \\ \text{ب} \text{ ج} \\ \text{ب} \text{ ج} \end{array} & & \begin{array}{c} \text{ب} \text{ ج} \\ \text{ب} \text{ ج} \\ \text{ب} \text{ ج} \end{array} \end{array}$$

یہاں  $\text{ب} \text{ ج}$ ،  $\text{ب} \text{ ج}$ ،  $\text{ب} \text{ ج}$ ، بالترتیب  $\text{ب} \text{ ج}$ ،  $\text{ب} \text{ ج}$ ،  $\text{ب} \text{ ج}$  کے خاتمہ ہیں۔

فرض کرو کہ بائیں طرف کے مقطع کو ق سے اور بائیں طرف کے مقطع کو ق سے تعبیر کیا جائے۔ تب

$$\begin{array}{c|c|c} \text{باقی} & \begin{array}{c} \text{ب} \text{ ج} \\ \text{ب} \text{ ج} \\ \text{ب} \text{ ج} \end{array} & = & \begin{array}{c} \text{ب} \text{ ج} \\ \text{ب} \text{ ج} \\ \text{ب} \text{ ج} \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} \text{ب} \text{ ج} \\ \text{ب} \text{ ج} \\ \text{ب} \text{ ج} \end{array} & & \begin{array}{c} \text{ب} \text{ ج} \\ \text{ب} \text{ ج} \\ \text{ب} \text{ ج} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{ق} \\ \text{ق} \end{array} & = & \begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{ق} \\ \text{ق} \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{ق} \\ \text{ق} \end{array} & & \begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{ق} \\ \text{ق} \end{array} \end{array}$$

مثلاً نمبری ۳۳ (د)

ذیل کے مقطعات کی قیمتیں معلوم کرو:-

|     |    |    |    |     |    |    |    |
|-----|----|----|----|-----|----|----|----|
| (۱) | ۱  | ۱  | ۱  | (۲) | ۳  | ۱۶ | ۱۹ |
|     | ۳۵ | ۳۶ | ۳۷ |     | ۱۴ | ۱۶ | ۲۰ |
|     | ۲۳ | ۲۴ | ۲۵ |     | ۱۵ | ۱۸ | ۲۱ |
| (۳) | ۱۳ | ۲۳ | ۲۴ | (۴) | ۱  | ۱  | ۱  |
|     | ۳۰ | ۳۱ | ۳۲ |     | ۱  | ۱  | ۱  |
|     | ۲۹ | ۳۰ | ۳۱ |     | ۱  | ۱  | ۱  |
| (۶) | ۱  | ۱  | ۱  | (۷) | ۱  | ۱  | ۱  |
|     | ۱  | ۱  | ۱  |     | ۱  | ۱  | ۱  |
|     | ۱  | ۱  | ۱  |     | ۱  | ۱  | ۱  |

اگر ایک جذر الکعب مسہر ہو تو ذیل کے دو مقطعات کی قیمتیں معلوم کرو

|     |   |   |   |      |   |   |   |
|-----|---|---|---|------|---|---|---|
| (۹) | ۱ | ۱ | ۱ | (۱۰) | ۱ | ۱ | ۱ |
|     | ۱ | ۱ | ۱ |      | ۱ | ۱ | ۱ |
|     | ۱ | ۱ | ۱ |      | ۱ | ۱ | ۱ |

۱۱۔ ذیل کی مساواتوں

۱۔ ۱ + ج + م + ب = ۱ + ج + ل + م + ب + ن = ۱ + ج + ل + م + ب + ن + ۱  
میں سے ۱، م، ن کو ساقط کرو اور نتیجہ کو سادہ ترین شکل میں لکھو  
۱۲۔ مقطعات کو پھیلائے بغیر ثابت کرو کہ

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ب | ج | ۱ | ۱ | ب | ج | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |

۱۳۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

$$(۱) \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱۵ - ۲ لا & ۱۱ & ۱۰ \\ ۱۱ - ۳ لا & ۱۴ & ۱۶ \\ ۷ - لا & ۱۴ & ۱۳ \end{vmatrix} = (۲)$$

ذیل کی مثالیں کو ثابت کرو:

$$-۱۳ \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱+ج & ۱+ج & ۱+ج \\ ۱+ف & ۱+ف & ۱+ف \\ ۱+ما & ۱+ما & ۱+ما \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= (ج-ب)(ج-۱)(۱-ب) = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$-۱۶ \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = (ج-ب)(ج-۱)(۱-ب) = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$-۱۷ \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = (ج-ب)(ج-۱)(۱-ب) = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$-۱۸ \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = (ج-ب)(ج-۱)(۱-ب) = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$-۱۹ \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = (ج-ب)(ج-۱)(۱-ب) = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

۲۰۔ ج ج ب | ج ج ب | کو مقلدہ کی شکل میں لکھو۔

۲۔ وہ شرط معلوم کر دے کہ مساوات ل (لا + م + ن + ی) = مہول  
تقداروں کی قیمتوں کے تین جنہوں (لا + ب + ج) (لا + ب + ج) (ج + ب + ج)  
(لا + ب + ج) سے پوری ہو اور ثابت کر دے کہ یہ شرط وہی ہے جو تین  
مساواتوں ل (لا + ب + م + ج) ی = لا + لا + ب + م + ج + ج + ی =  
لا + لا + ب + م + ج + ج + ی = کے ایک ساتھ ل + م + ن سے پورے ہونے کی  
شرط ہے۔

۲-  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ا} + \text{ل} & \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} & \text{ل} \\ \hline \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} + \text{ا} + \text{ل} & \text{ل} \\ \hline \text{ا} + \text{ب} + \text{ل} & \text{ب} + \text{ج} + \text{ل} & \text{ل} \\ \hline \end{array}$   $\times$   $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ل} & \text{ج} & \text{ب} \\ \hline \text{ج} & \text{ل} & \text{ا} \\ \hline \text{ب} & \text{ا} & \text{ل} \\ \hline \end{array}$

لی قیمت معلوم کرو

۲۔ ثابت کرو کہ  $\begin{vmatrix} 1+x & 1+x & 1+x \\ 1+x & 1+x & 1+x \\ 1+x & 1+x & 1+x \end{vmatrix} = 0$ ۔

ا۔ ج۔ خ۔ ب۔ ج۔ خ۔ د۔  
 ا۔ ج۔ خ۔ د۔ ا۔ ج۔ ب۔  
 اس سے ذیل کا مسئلہ مستنبط کرو جو ایئر سے منسوب ہے۔  
 وجہوں میں ہر ایک چار مربعوں کے حاصل جمع پر مشتمل ہو تو ان  
 دن کے حاصل ضرب کو چار مربعوں کے حاصل جمع کی شکل میں لکھا  
 لگتا ہے۔

ذیل کی ستائید مساواتیں ثابت کرو۔

$$(۱) \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱۵ & ۲ & ۱۱ \\ ۱۱ & ۳ & ۱۶ \\ ۴ & ۱ & ۱۳ \end{vmatrix} \quad (۲)$$

ذیل کی مثالیں شکر ثابت کرو:

$$13 \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱+۱ & ۱+۱ & ۱+۱ \\ ۱+۱ & ۱+۱ & ۱+۱ \\ ۱+۱ & ۱+۱ & ۱+۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$14 \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$15 \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$16 \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$17 \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$18 \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$



۲۰۔  $\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{و} \end{vmatrix}$  کو قطعہ کی شکل میں لکھو۔

۲۱۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات  $\text{ل} + \text{م} + \text{ن} + \text{ی} = ۰$  بھول  
مقداروں کی قیمتوں کے تین نمبروں  $(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})$   $(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})$   $(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})$   
 $(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})$  سے پوری ہو اور ثابت کرو کہ یہ شرط وہی ہے جو تین  
مساواتوں  $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ی} = ۰$   $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{م} = ۰$   $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ن} = ۰$   
 $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ی} = ۰$  کے ایک ساتھ  $\text{ل} + \text{م} + \text{ن} + \text{ی} = ۰$  سے پورے ہونے کی  
شرط ہے۔

۲۱۔  $\begin{vmatrix} \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ل} & \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{م} \\ \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ن} & \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ی} \end{vmatrix}$  کی قیمت معلوم کرو

۲۱۔ ثابت کرو کہ  $\begin{vmatrix} \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ل} & \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{م} \\ \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ن} & \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ی} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ل} & \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{م} \\ \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ن} & \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ی} \end{vmatrix}$

ہاں  $\text{خ} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ل}$  کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے:-

$\begin{vmatrix} \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ل} & \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{م} \\ \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ن} & \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ی} \end{vmatrix}$

س سے ذیل کا مثلاً مستنبذ کرو جو پندرہ سے منسوب ہے۔  
دو جملوں میں ہر ایک چار مربعوں کے حامل جمع پر مشتمل ہو تو ان  
وں کے حامل ضرب کو چار مربعوں کے حامل جمع کی شکل میں لکھا  
سکتا ہے۔

ذیل کی متماثلہ مساواتیں ثابت کرو۔



لا + ب + ما + ج + ی + د =  
 لا + ب + ما + ج + ی + د =  
 لا + ب + ما + ج + ی + د =

ان کو بالترتیب ل، ل، ل سے ضرب دو جہاں ل، ل، ل بالترتیب  
 ل، ل، ل کے صفا کر ہیں ذیل کے مقطع میں

ق | ل ب ج  
 | ل ب ج  
 | ل ب ج

ان مال ضربوں کو جمع کرو۔ تب ما اور ی کے سر دنفہ ۴۳ کے  
 روابط کی رو سے معدوم ہو جاتے ہیں اور ہمیں مال ہوتا ہے:-

(ل ل ل - ل ل ل + ل ل ل) لا + (د ل ل - د ل ل + د ل ل) =  
 اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

(ب ب ب - ب ب ب + ب ب ب) ما + (د ب ب - د ب ب + د ب ب) =  
 اور (ج ج ج - ج ج ج + ج ج ج) ی + (د ج ج - د ج ج + د ج ج) =  
 اب ل ل ل - ل ل ل + ل ل ل = - (ب ب ب - ب ب ب + ب ب ب)

= ج ج ج - ج ج ج + ج ج ج = ق

پس حل مطلوبہ کو ذیل کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے:

۱-

ی

۲-

لا

|       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
| ل ب ج | د ل ب | د ل ج | د ب ج |
| ل ب ج | د ل ب | د ل ج | د ب ج |
| ل ب ج | د ل ب | د ل ج | د ب ج |

یا زیادہ تشاکل

| لا    | ما    | ی     | ا     |
|-------|-------|-------|-------|
| ب ج د | ا ج د | ا ب د | ا ب ج |
| ب ج د | ا ج د | ا ب د | ا ب ج |
| ب ج د | ا ج د | ا ب د | ا ب ج |

۵۔ فرض کرو کہ ہمیں چار متجانس خطی مساواتوں کا ایک نظام دیا ہے:

$$\begin{aligned} & \text{ا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} + \text{ی} + \text{د} = \text{۔} \\ & \text{ا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} + \text{ی} + \text{د} = \text{۔} \\ & \text{ا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} + \text{ی} + \text{د} = \text{۔} \\ & \text{ا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} + \text{ی} + \text{د} = \text{۔} \end{aligned}$$

تب آخر کی تین مساواتوں سے حسب دفعہ ماقبل

| لا    | ما    | ی     | ا     |
|-------|-------|-------|-------|
| ب ج د | ا ج د | ا ب د | ا ب ج |
| ب ج د | ا ج د | ا ب د | ا ب ج |
| ب ج د | ا ج د | ا ب د | ا ب ج |

پہلی مساوات میں قیمتیں متدرج کرنے سے حاصل اسقاط مطلوبہ یہ ہے:-

|   |       |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|
| ا | ب ج د | ا ج د | ا ب د | ا ب ج |
| ا | ب ج د | ا ج د | ا ب د | ا ب ج |
| ا | ب ج د | ا ج د | ا ب د | ا ب ج |
| ا | ب ج د | ا ج د | ا ب د | ا ب ج |

اس کو زیادہ مختصر طور پر حسب ذیل شکل میں بھی لکھا جاسکتا ہے:-

|   |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|
| ا | ب ج د | ا ج د | ا ب د |
| ا | ب ج د | ا ج د | ا ب د |
| ا | ب ج د | ا ج د | ا ب د |
| ا | ب ج د | ا ج د | ا ب د |

یہاں دائیں طرف کا جملہ جو تھے زائد کا ایک مقطع ہے۔



اطلاق ہو سکتا ہے۔ مثلاً ن دیں مرتبہ کا مندرجہ بالا مقطعہ

ا ا - ب ب + ج ج - د د + ..... + (۱-۱) گ گ

یا ا ا - ا ا + ا ا - ا ا + ..... + (۱-۱) ا ا

کے مساوی ہے جبکہ ان کو بالترتیب پہلی قطار یا پہلے ستون سے پھیلایا جائے ان میں جن حروف پر زیریں ہیں وہ متناظر چھوٹے حروف کے صفائر کو تعبیر کرتے ہیں یعنی زیر والا حرف (ن-۱) دیں

رتبہ کے ایک مقطعہ کو تعبیر کرتا ہے۔ اب ان (ن-۱) دیں

رتبہ دئے مقطعہ میں سے ہر ایک کو (ن-۲) دیں رتبہ کے مقطعہ کے حامل جمع کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس اس طرح بالآخر مقطعہ مذکور کی تفصیلی شکل معلوم کی جاسکتی ہے۔

اگرچہ ہر ایک مقطعہ کو مندرجہ بالا طریقہ کے مطابق پھیلایا جاسکتا ہے لیکن یاد رہے کہ یہ طریقہ ہر مقطعہ کو پھیلانے کے لئے ہمیشہ آسان ترین نہیں ہوتا خاص کر اس صورت میں جبکہ ہمارا مقصد مقطعہ کی پوری قیمت دریافت کرنا نہ ہو بلکہ محض اس کے اجزائے ترکیبی کی علامات معلوم کرنا مطلوب ہو۔

۵۰۲۔ مقطعہ ذیل

|   |   |   |
|---|---|---|
| ا | ب | ج |
| ا | ب | ج |
| ا | ب | ج |

کی تفصیلی صورت = ا ب ج - ا ب ج + ا ب ج - ا ب ج + ا ب ج - ا ب ج

یہ ظاہر ہے کہ ہر ایک جزو ترکیبی تین اجزائے ضربی کے حامل ضرب پر مشتمل ہے۔ جن میں سے ایک ایک ہر قطار سے لیا گیا ہے

اور ایک ایک ہر ستون سے نیز نصف رقموں کی علامت مثبت ہے اور نصف کی منفی۔ سب اجزائے ترکیبی کی علامتیں حسب ذیل طریقہ سے معلوم ہو سکتی ہیں، پہلا جزو ترکیبی  $\Delta$  ب ج م ہے، اس کے لائحے ترتیب صحافی میں ہیں اس کی علامت مثبت ہے، اس کو باہم جزو رئیس کہینگے۔ باقی سب اجزائے ترکیبی اس کے اعداد لاحقہ کی ترتیب بدلنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ کسی جزو ترکیبی کی علامت معلوم کرنے کا یہ قاعدہ ہے: اگر جزو رئیس کے لاحقوں میں سے دو دو لیکر ان کی ترتیب بدلتے جائیں یہاں تک کہ مذکورہ جزو ترکیبی حاصل ہو جائے تو ایسی ترتیبوں کے بدلنے کی تعداد اگر جفت ہو تو اس جزو ترکیبی کی علامت مثبت ہوگی اور اگر طاق ہو تو منفی۔ مثلاً جزو ترکیبی  $\Delta$  ب ج م جزو رئیس کے اعداد ۱ اور ۳ کو باہم ایک بار بدلنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے اس کی علامت منفی ہوگی، جزو ترکیبی  $\Delta$  ب ج پہلے اعداد ۱ اور ۳ کو باہم بدلنے سے اور پھر اعداد ۱ اور ۲ کو باہم بدلنے سے حاصل ہوتا ہے، اس لئے اس کی علامت مثبت ہے۔

۵۰۳۔ پس وہ مقطع جس کا جزو رئیس  $\Delta$  ب ج م ہے ... ہے علامت  $\Delta$  ب ج م ہے۔ یہ تعبیر ہو سکتا ہے۔

علامت  $\Delta$  ب ج م جو جزو رئیس کے قابل درج کی گئی ہے اس سے ان تمام اجزائے ترکیبی کا حاصل جمع مراد ہے جو اس کے اعداد لاحقہ مختلف ترتیبوں سے بدلنے سے حاصل ہو سکتے ہیں جبکہ ہر جزو ترکیبی کے قابل مناسب علامت درج کی جائے۔

بعض اوقات مقطع کو اس کے جزو رئیس کے گرد خطوط و مدانی لکھنے سے اور بھی زیادہ مختصر شکل میں لکھ سکتے ہیں یعنی

( $\Delta$  ب ج م ہے) '  $\Delta$  ب ج م ہے ... کی مزید مختصر شکل ہے

مثال۔ بتاؤ کہ مقطعہ (ا ب ب ج د ع ہ) میں جزو ترکیبی لم ب ب ج د ع کی علامت کیا ہے۔

جزو تیس میں ا اور د کے اعداد کو باہم بدلنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے ا ب ب ج د ع اس سے ب اور ج کے اعداد بدلنے سے حاصل ہوتا ہے ا ب ب ج د ع ہ پھر ج اور د کے حروف بدلنے سے حاصل ہوتا ہے ا ب ب ج د ع ہ اور بالآخر د اور ع کے حروف بدلنے سے حاصل ہوتا ہے ا ب ب ج د ع ہ جو مفروضہ جزو ترکیبی ہے۔ چونکہ ہم نے ترتیب اعداد کو چار مرتبہ بدلا ہے اس لئے اس جزو ترکیبی کی علامت مثبت ہے۔

۵.۴۔ اگر دفعہ ۵.۱ میں اجزائے افرادی ب، ج، .....، گ میں سے ہر ایک صفر ہو تو مقطعہ مذکور ا ب ب ج د ع کے مساوی رہ جاتا ہے، یعنی بالفاظ دیگر یہ ا اور ایک (ن - ۱) ویں رتبہ کے مقطعہ کے مساوی ہے، اس سے ہم ذیل کا عام مسئلہ مستنبط کرتے ہیں۔ اگر ن ویں رتبہ کے ایک مقطعہ میں پہلی قطار یا ستون کا ہر ایک جزو افرادی سوائے پہلے کے صفر ہو تو یہ مقطعہ اس جزو افرادی اور اس (ن - ۱) ویں رتبہ کے مقطعہ کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا جو اول الذکر جزو افرادی میں سے گزرنے والے ستون اور قطار کو حذف کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

نیز چونکہ قطاروں کے اور ستونوں کے مناسب تبادلہ سے کوئی سا جزو افرادی پہلے مقام پر لایا جاسکتا ہے اس سے ظاہر ہے کہ اگر کسی قطار یا ستون کے سب اجزائے افرادی سوائے ایک کے صفر ہوں تو مقطعہ اس سے پہلے رتبہ کے مقطعہ میں نہایت آسانی سے تحلیل کیا جاسکتا ہے۔ یہ امر بعض اوقات مقطعات کے اختصار کے لئے نہایت کارآمد ہوتا ہے۔



مثال - مقطع ذیل کی قیمت معلوم کرو:-

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| ۳۰ | ۲۰ | ۱۱ | ۳۰ |
| ۹  | ۰  | ۳  | ۶  |
| ۳  | ۳۶ | ۲- | ۱۱ |
| ۲۲ | ۱۶ | ۶  | ۱۹ |

پہلے ستون کے ہر ایک جزو افرادی میں سے دوسرے ستون کے متناظر جزو افرادی کا دوگنا تعزین کرو، نیز چوتھے ستون کے ہر ایک جزو افرادی میں سے دوسرے ستون کے متناظر جزو افرادی کا تین گنا تعزین کرو، اس طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:-

|   |    |    |    |
|---|----|----|----|
| ۵ | ۲۰ | ۱۱ | ۸  |
| - | ۰  | ۳  | -  |
| ۹ | ۳۶ | ۲- | ۱۵ |
| ۲ | ۱۶ | ۱۶ | ۲  |

اور چونکہ دوسری قطار کے سب اجزائے افرادی سوائے ایک کے صفر ہیں -

|   |    |   |    |    |    |    |              |
|---|----|---|----|----|----|----|--------------|
| ۵ | ۲۰ | ۸ | ۳۳ | ۵  | ۲۰ | ۹  | $\times ۳ =$ |
| ۵ | ۱۹ | ۸ |    | ۹  | ۳۶ | ۱۵ |              |
| ۳ | ۱۶ | ۶ |    | ۲۰ | ۱۶ | -  |              |

|   |   |    |   |    |              |
|---|---|----|---|----|--------------|
| ۵ | ۸ | ۳۰ | ۱ | ۰  | $\times ۳ =$ |
| ۳ | ۶ |    | ۵ | ۱۹ | ۸            |
|   |   |    | ۳ | ۱۶ | ۶            |

۵۰۵ - ذیل کی مثالوں میں جو ترکیبیں استعمال کی گئی ہیں وہ بعض اوقات

بڑی مفید ثابت ہوئی ہیں :

مثال ۱ - ثابت کرو کہ

|         |                                   |
|---------|-----------------------------------|
| ا ب ج د | (ا + ب + ج + د) - (ا - ب - ج - د) |
| ب د ج ا | (ا + ب - ج - د)                   |
| ج د ا ب |                                   |
| د ج ب ا |                                   |

سب قطاروں کو جمع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ (ا + ب + ج + د) مقطعہ مذکور کا ایک جزو ضربی ہے پہلی اور تیسری قطاروں کو جمع کرنے اور حاصل جمع سے دوسری اور چوتھی قطاروں کے حاصل جمع کو تفریق کرنے سے ظاہر ہے کہ ا - ب + ج - د بھی ایک جزو ضربی ہو اسی طرح سے یہ بھی بتایا جاسکتا ہے کہ ا - ب - ج + د اور ا + ب - ج - د بھی اجزائے ضربی ہیں۔ بقیہ جزو ضربی صرف عددی ہے اور ا والی رقموں کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ عددی جزو ضربی اسے پس نتیجہ مطلوبہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال ۲ - ثابت کرو کہ

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ا | ا | ا | ا |
| ب | ج | د | د |
| ب | ج | د | د |
| ب | ج | د | د |

اگر ا - ب تو پہلا اور دوسرا ستون متماثل ہو جاتے ہیں اور مقطعہ بالا صفر ہو جاتا ہے۔ پس (ا - ب) مقطعہ مذکور کا ایک جزو ضربی ہے (دیکھو دفعہ ۵۱) اسی طرح باقی حلات (ا - ج) (ا - د) (ب - ج) (ب - د) (ج - د) میں سے ہر ایک جملہ جزو ضربی ہے ان اجزائے ضربی کا حاصل ضرب چھ ابعاد کا ہے اور چونکہ مقطعہ زیر بحث بھی چھ ابعاد کا ہے اس لئے باقی جزو ضربی محض عددی ہوگا۔ نیز ب ج د والی رقم کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ یہ عددی جزو ضربی اسے پس نتیجہ مطلوبہ حاصل ہوتا ہے

امثلہ نمبری ۳۳ (ب)

ذیل کے مقطعات کی قیمتیں محسوس کرو۔

|       |       |       |    |    |    |    |    |    |    |
|-------|-------|-------|----|----|----|----|----|----|----|
| ۶     | ۱۰    | ۱۳    | ۴  |    | ۱  | ۱  | ۱  | ۱  |    |
| ۴     | ۴     | ۹     | ۵  | -۲ | ۳  | ۳  | ۲  | ۱  | -۱ |
| ۴     | ۱۱    | ۱۲    | ۸  |    | ۱۰ | ۹  | ۳  | ۱  |    |
| ۲     | ۹     | ۱۰    | ۴  |    | ۲۰ | ۱۰ | ۴  | ۱  |    |
| ۱     | ۱     | ۱     | ۰  |    | ۱  | ۱  | ۱  | ۱  |    |
| ۱     | ۱     | ب + ج | ۱  | -۳ | ۱  | ۱  | ۱  | ۱  | -۳ |
| ب     | ج + د | ب     | ۱  |    | ۱  | ۱  | ۱  | ۱  |    |
| ج     | ج     | ج     | ۱  |    | ۱  | ۱  | ۱  | ۱  |    |
| ۱ + د | ۱     | ۱     | ۱  |    | ۳  | ۱  | ۲  | ۳  |    |
| ۱     | ۱     | ب + ۱ | ۱  | -۹ | ۱۴ | ۲  | ۲۹ | ۱۵ | -۵ |
| ۱     | ج + ۱ | ۱     | ۱  |    | ۱۴ | ۳  | ۱۹ | ۱۶ |    |
| د + ۱ | ۱     | ۱     | ۱  |    | ۳۸ | ۸  | ۳۹ | ۳۲ |    |
| ۰     | ۶     | ۱     | ۰  |    | ۱  | ۶  | ۱  | ۰  |    |
| ب     | ج     | ۰     | -۱ | -۸ | ۶  | ۱  | ۰  | -۱ | -۶ |
| ۱     | ۰     | ج - ۱ | -۱ |    | ۱  | ۰  | ۱  | ۶  |    |
| ۰     | ۱ - ۱ | ب - ۱ | سی |    | ۰  | ۱  | ۶  | ۱  |    |
| د     | ج     | ب     | ۱  |    |    |    |    |    |    |
| د + ۱ | ج + ۱ | ب + ۱ | ۱  | -۹ |    |    |    |    |    |
| د + ۱ | ج + ۱ | ب + ۱ | ۱  |    |    |    |    |    |    |
| د + ۱ | ج + ۱ | ب + ۱ | ۱  |    |    |    |    |    |    |

۱۰- اگر ا کا ایک جذرا لکب معما هو تو ثابت کرو که



|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۶ | ۱۷ | ۱۸ | ۱۹ | ۲۰ | ۲۱ | ۲۲ | ۲۳ | ۲۴ | ۲۵ | ۲۶ | ۲۷ | ۲۸ | ۲۹ | ۳۰ | ۳۱ | ۳۲ | ۳۳ | ۳۴ | ۳۵ | ۳۶ | ۳۷ | ۳۸ | ۳۹ | ۴۰ | ۴۱ | ۴۲ | ۴۳ | ۴۴ | ۴۵ | ۴۶ | ۴۷ | ۴۸ | ۴۹ | ۵۰ | ۵۱ | ۵۲ | ۵۳ | ۵۴ | ۵۵ | ۵۶ | ۵۷ | ۵۸ | ۵۹ | ۶۰ | ۶۱ | ۶۲ | ۶۳ | ۶۴ | ۶۵ | ۶۶ | ۶۷ | ۶۸ | ۶۹ | ۷۰ | ۷۱ | ۷۲ | ۷۳ | ۷۴ | ۷۵ | ۷۶ | ۷۷ | ۷۸ | ۷۹ | ۸۰ | ۸۱ | ۸۲ | ۸۳ | ۸۴ | ۸۵ | ۸۶ | ۸۷ | ۸۸ | ۸۹ | ۹۰ | ۹۱ | ۹۲ | ۹۳ | ۹۴ | ۹۵ | ۹۶ | ۹۷ | ۹۸ | ۹۹ | ۱۰۰ |
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۶ | ۱۷ | ۱۸ | ۱۹ | ۲۰ | ۲۱ | ۲۲ | ۲۳ | ۲۴ | ۲۵ | ۲۶ | ۲۷ | ۲۸ | ۲۹ | ۳۰ | ۳۱ | ۳۲ | ۳۳ | ۳۴ | ۳۵ | ۳۶ | ۳۷ | ۳۸ | ۳۹ | ۴۰ | ۴۱ | ۴۲ | ۴۳ | ۴۴ | ۴۵ | ۴۶ | ۴۷ | ۴۸ | ۴۹ | ۵۰ | ۵۱ | ۵۲ | ۵۳ | ۵۴ | ۵۵ | ۵۶ | ۵۷ | ۵۸ | ۵۹ | ۶۰ | ۶۱ | ۶۲ | ۶۳ | ۶۴ | ۶۵ | ۶۶ | ۶۷ | ۶۸ | ۶۹ | ۷۰ | ۷۱ | ۷۲ | ۷۳ | ۷۴ | ۷۵ | ۷۶ | ۷۷ | ۷۸ | ۷۹ | ۸۰ | ۸۱ | ۸۲ | ۸۳ | ۸۴ | ۸۵ | ۸۶ | ۸۷ | ۸۸ | ۸۹ | ۹۰ | ۹۱ | ۹۲ | ۹۳ | ۹۴ | ۹۵ | ۹۶ | ۹۷ | ۹۸ | ۹۹ | ۱۰۰ |

۱۷۔ ثابت کر دو کہ

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۶ | ۱۷ | ۱۸ | ۱۹ | ۲۰ | ۲۱ | ۲۲ | ۲۳ | ۲۴ | ۲۵ | ۲۶ | ۲۷ | ۲۸ | ۲۹ | ۳۰ | ۳۱ | ۳۲ | ۳۳ | ۳۴ | ۳۵ | ۳۶ | ۳۷ | ۳۸ | ۳۹ | ۴۰ | ۴۱ | ۴۲ | ۴۳ | ۴۴ | ۴۵ | ۴۶ | ۴۷ | ۴۸ | ۴۹ | ۵۰ | ۵۱ | ۵۲ | ۵۳ | ۵۴ | ۵۵ | ۵۶ | ۵۷ | ۵۸ | ۵۹ | ۶۰ | ۶۱ | ۶۲ | ۶۳ | ۶۴ | ۶۵ | ۶۶ | ۶۷ | ۶۸ | ۶۹ | ۷۰ | ۷۱ | ۷۲ | ۷۳ | ۷۴ | ۷۵ | ۷۶ | ۷۷ | ۷۸ | ۷۹ | ۸۰ | ۸۱ | ۸۲ | ۸۳ | ۸۴ | ۸۵ | ۸۶ | ۸۷ | ۸۸ | ۸۹ | ۹۰ | ۹۱ | ۹۲ | ۹۳ | ۹۴ | ۹۵ | ۹۶ | ۹۷ | ۹۸ | ۹۹ | ۱۰۰ |
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۶ | ۱۷ | ۱۸ | ۱۹ | ۲۰ | ۲۱ | ۲۲ | ۲۳ | ۲۴ | ۲۵ | ۲۶ | ۲۷ | ۲۸ | ۲۹ | ۳۰ | ۳۱ | ۳۲ | ۳۳ | ۳۴ | ۳۵ | ۳۶ | ۳۷ | ۳۸ | ۳۹ | ۴۰ | ۴۱ | ۴۲ | ۴۳ | ۴۴ | ۴۵ | ۴۶ | ۴۷ | ۴۸ | ۴۹ | ۵۰ | ۵۱ | ۵۲ | ۵۳ | ۵۴ | ۵۵ | ۵۶ | ۵۷ | ۵۸ | ۵۹ | ۶۰ | ۶۱ | ۶۲ | ۶۳ | ۶۴ | ۶۵ | ۶۶ | ۶۷ | ۶۸ | ۶۹ | ۷۰ | ۷۱ | ۷۲ | ۷۳ | ۷۴ | ۷۵ | ۷۶ | ۷۷ | ۷۸ | ۷۹ | ۸۰ | ۸۱ | ۸۲ | ۸۳ | ۸۴ | ۸۵ | ۸۶ | ۸۷ | ۸۸ | ۸۹ | ۹۰ | ۹۱ | ۹۲ | ۹۳ | ۹۴ | ۹۵ | ۹۶ | ۹۷ | ۹۸ | ۹۹ | ۱۰۰ |

جہاں ۱ = ۲ - ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ + ۱۱ - ۱۲ + ۱۳ - ۱۴ + ۱۵ - ۱۶ + ۱۷ - ۱۸ + ۱۹ - ۲۰ + ۲۱ - ۲۲ + ۲۳ - ۲۴ + ۲۵ - ۲۶ + ۲۷ - ۲۸ + ۲۹ - ۳۰ + ۳۱ - ۳۲ + ۳۳ - ۳۴ + ۳۵ - ۳۶ + ۳۷ - ۳۸ + ۳۹ - ۴۰ + ۴۱ - ۴۲ + ۴۳ - ۴۴ + ۴۵ - ۴۶ + ۴۷ - ۴۸ + ۴۹ - ۵۰ + ۵۱ - ۵۲ + ۵۳ - ۵۴ + ۵۵ - ۵۶ + ۵۷ - ۵۸ + ۵۹ - ۶۰ + ۶۱ - ۶۲ + ۶۳ - ۶۴ + ۶۵ - ۶۶ + ۶۷ - ۶۸ + ۶۹ - ۷۰ + ۷۱ - ۷۲ + ۷۳ - ۷۴ + ۷۵ - ۷۶ + ۷۷ - ۷۸ + ۷۹ - ۸۰ + ۸۱ - ۸۲ + ۸۳ - ۸۴ + ۸۵ - ۸۶ + ۸۷ - ۸۸ + ۸۹ - ۹۰ + ۹۱ - ۹۲ + ۹۳ - ۹۴ + ۹۵ - ۹۶ + ۹۷ - ۹۸ + ۹۹ - ۱۰۰

۱۸۔ اگر ایک مقطع ن دیں مرتبہ کا ایسا ہو کہ اس کی پہلی، دوسری، تیسری، ..... ن دیں نظاروں کے اجزائے افرادی بالترتیب پہنچے۔ دوسری، تیسری، ..... ن دیں مرتبہ کے اعداد مشککہ ہوں تو ثابت کر دو کہ مقطع کی قیمت ا کے مساوی ہے۔

# چوتیسواں باب

## مسترق مسائل و امثلہ

۵۰۶۔ ہم اس باب کے شروع میں صورت جبریہ کے قیام کے متعلق چند باتیں درج کریں گے اور اس اثناء میں چند دیگر اساسی کلیات کی نظر ثانی کریں گے جو پیشتر ازیں ثابت کئے جا چکے ہیں۔

۵۰۷۔ جبریہ اصولوں کی بحث میں ہمیشہ تحلیلی طرزِ عمل سے کام لیا جاتا ہے مشرق میں ہی ہم نئے نئے نام اور قواعد مندرج نہیں کرتے بلکہ مجرد اعداد کے حساب کے متعلق اپنی معلومات کی مدد سے پہلے چند ایسے عمل اور کلیات ثابت کرتے ہیں جنکی تصدیق ہر مخصوص صورت میں نہایت آسانی سے ہو سکتی ہے ان اعمال کے عام نظریہ کو ہی درحقیقت جبر و مقابلہ سے موصوم کیا جاتا ہے۔ اس اختلاف کی بنیاد جبر و مقابلہ کی بعض اوقات دو قسمیں قرار دی جاتی ہیں۔ حسابی جبر و مقابلہ اور علامتی جبر و مقابلہ۔ اول الذکر قسم میں پہلے ہم اپنی علامتوں کو وہ معنی دیتے ہیں جو اذروئے حساب بخوبی سمجھ میں آسکیں اور ان سے اعمال کے اساسی قوانین مستنبط کرتے ہیں۔ آخر الذکر قسم میں ہم پہلے یہ مان لیتے ہیں کہ حسابی الجبرائے قوانین تمام صورتوں میں درست ہیں خواہ ان میں کی علامتوں کی نوعیت کچھ ہی ہو اور پھر یہ دریافت کرتے ہیں کہ ان علامات کو کیا معنی پہنائے جائیں کہ یہ ان قوانین کے ماتحت رہیں۔ پس جوں جوں ہم معمولی حساب کی حدود سے نکل کر اوپر چڑھتے جاتے ہیں نئے نئے نتیجے نکلتے آتے ہیں۔ نئے نئے الفاظ استعمال کرنے پڑتے ہیں اور علامتوں کو ایسے معنی دیئے پڑتے ہیں جو استدائی تعریضات میں مضمر نہ تھے۔ نیز جس طریقہ سے الجبرائے عام کلیات منضبط

ہوتے ہیں اُس کی رُو سے ان کی عمومیت اور قیام کے متعلق ہمارے ذہن میں  
وفاق رہتا ہے خواہ وہ متقادیر جن پر ان ضوابط کا اطلاق ہو از رُوئے  
حساب سمجھ میں نہ آسکیں۔

۵۰۸۔ اگر ہم اپنی توجہ کو محض علامات کی مثبت صحیح قیمتوں تک محدود  
رکھیں تو ذیل کے کلیات حساب کی ابتدائی تعریفات کی رُو سے باسانی ثابت  
ہو سکتے ہیں۔

۱۔ قانون مبادلہ جسکو ہم ذیل کے الفاظ میں بیان کرتے ہیں۔

(۱) جمع اور تفریق کا عمل کسی ترتیب میں ہو سکتا ہے۔

مثلاً  $ا + ب - ج = ب - ج + ا$

(۲) ضرب اور تقسیم کا عمل کسی ترتیب میں ہو سکتا ہے۔

مثلاً  $ا \times ب = ب \times ا$

$ا \times ب \times ج = ب \times ج \times ا = ج \times ا \times ب$

$ا \div ب \div ج = ا \div ب \times ج = (ا \div ب) \times ج = ا \times (ب \div ج)$

۱۔ کلیہ تقسیم جس کو ہم ذیل کے الفاظ میں بیان کرتے ہیں: ضرب یا تقسیم کے عمل جمع یا  
تفریق کے عملوں پر پھیلائے جاسکتے ہیں۔

(۱۔ ب + ج) م = م - ب م + ج م

(۱۔ ب) (ج - د) = (ج - د) - ب د - ب ج + ب د

[دیکھو ابتدائی الجبرادفات ۳۳ اور ۳۴]

اور چونکہ تقسیم کا عمل محض ضرب کے عمل کا الٹ ہے اس لئے تقسیم کے متعلق  
کلیہ تقسیم جداگانہ بحث کا محتاج نہیں۔

۳۔ کلیات قوت نما

(۱)  $ا^۲ \times ب^۲ = (ا \times ب)^۲$

$ا^۲ \div ب^۲ = (ا \div ب)^۲$

(۲)  $(ا^۲)^۲ = ا^۴$

[دیکھو ابتدائی الجبرادفات ۲۲۲ تا ۲۳۵]

ان قوانین کو جو اوپر مندرج ہوئے نفس مفہون کی بنیاد سمجھنا چاہیے۔  
 دیکھ سب اس مفروضہ کی بنا پر ثابت کئے جا چکے ہیں کہ استعمال شدہ رموز یا  
 علامات مثبت صحیح عدد ہیں اور ان کا استعمال صرف ایسے اعمال تک محدود  
 ہے جو ان کے حساب بامعنی ہیں۔ اگر یہ شرائط پوری نہ ہوں تو علامتی جبر و مقابلہ  
 کی رو سے ہم مان لیتے ہیں کہ حسابی جبر و مقابلہ کے قوانین ہر صورت میں  
 برقرار رہتے ہیں اور اس مفروضہ کی بنا پر جو معنی ان قوانین سے مستنبط ہوں  
 ان کو درست تصور کرتے ہیں اس طرح سے اس امر کی توثیق ہو جاتی ہے  
 کہ جبر و اعمال کے قوانین ہر صورت میں درست ہیں اور ان کی وسیع اور عام  
 صورت میں معمولی حساب کے قوانین کی مخصوص صورتیں بھی شامل ہیں۔

۵۰۹۔ قانون مساویہ سے ہم خطوط حدانی کے ادخال و اخراج کے  
 قواعد مستنبط کرتے ہیں (دیکھو ابتدائی جبر و مقابلہ صفحات ۲۱، ۲۲) اور ان قواعد کی  
 مدد سے ہم قانون تقسیم کو بموجب دفعہ ۳۵ ثابت کرتے ہیں۔ مثلاً یہ ثابت کیا جا چکا  
 ہے کہ

$$(ا - ب) (ج - د) = ا ج - د ا - ب ج + ب د$$

جبکہ 'ا' ب 'ج' د مثبت صحیح عدد ہیں اور 'ا' بڑا ہے ب سے اور ج بڑا ہے  
 د سے۔ اب اگر ان علامات پر سے تمام قیود اتحادی جائیں تو یہ معلوم کرنا  
 کہ اس صورت میں نتائج مذکورہ کے کیا معنی ہونگے علامتی جبر و مقابلہ سے متعلق  
 ہے۔ پس ۱۔ = ا ج اور ج = د ا رکھنے سے حاصل ہوتا ہے (ب -) × (- ج)  
 = ب ج یعنی دو منفی مقداروں کا حاصل ضرب مثبت ہوتا ہے۔ نیز ب =  
 اور ج = د رکھنے سے ۱ × (- د) = - د یعنی مختلف علامت متقادیر کا  
 حاصل ضرب منفی ہوتا ہے۔

اسی طرح کلیہ تقسیم کے نتیجہ سے ہیں فوراً قانون علامات حاصل ہو جاتا  
 ہے۔ اور آئندہ کے لئے قانون علامات بھی ہمارے مسلہ اور اساسی  
 قوانین میں سے شمار ہونے لگتا ہے۔

۵۱۰۔ جبر و کسور کے خواص کو ثابت کرنے کے لئے جس طریقہ سے اسی



تو این سے کام لیا جاتا ہے اس کے متعلق طالب علم اگر چاہے نو ابتدائی الجبرا کے ابواب ۱۹، ۲۰ اور ۲۱ کا مطالعہ کر سکتا ہے۔ یہ معلوم ہو گا کہ جن رموز اور اعمال کو بغاہر کوئی راست یا ابتدائی مفہوم پہنا ناممکن نہیں انکی تعبیر سے ربط کی جاتی ہے کہ وہ حسابی جبر و مقابلہ کے قوانین کے مطابق ہو ۲۴ میں۔

۵۱۱۔ قوت نماؤں کے کلیہ پر ابتدائی جبر و مقابلہ کے تیسویں باب میں مفصل بحث کی جا چکی ہے جب م اور ن مثبت صحیح اعداد ہوں اور م < ن تو ہم براہ راست قوت نما کی تعریف سے ثابت کرتے ہیں کہ

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{m \times n} \quad a^0 = 1$$

اس کے بعد ہم مان لیتے ہیں کہ ان میں سے پہلا ضابطہ ہمیں چاہیے جبکہ قوت نماؤں پر سے تمام قیود ایشالی جائیں اور اس طرح پر ان رموز کے لئے جن پر ہماری ابتدائی تعریف کا اطلاق نہیں ہوتا ہم معنی اور مفہوم تجویز کریں گے کہ ان کے لئے میں اس طرح سے  $a^0, a^1, a^2$  کے لئے جو مفہوم حاصل ہوتے ہیں وہ باقی کے دو قوانین کے عین مطابق ہیں پس آئندہ کے لئے قوت نماؤں کے کلیہ کو پوری غوریت اور کامل موافقت کے ساتھ استعمال کیا جا سکتا ہے۔

۵۱۲۔ باب ہشتم میں ہم نے علامت خ یا م۔ کی تعریف یوں کی تھی کہ یہ ربط  $x^2 = -1$  کو پورا کرتا ہے۔ اس تعریف سے اور نیز خ کو جبر و مقابلہ کے عام ضوابط کے ماتحت لانے سے ہم  $a + x$  کی شکل کے جملات کے خواص پر بحث کر سکتے ہیں۔  $a + x$  کو جس میں حقیقی اور خیالی مقادیر ملی ہوتی ہیں بعض اوقات ملحق اعداد سے موسوم کرتے ہیں۔ دفعات ۱۰۵ تا ۱۹۲ کی رو سے دیکھا جا سکتا ہے کہ اگر ہم کسی ملحق عدد پر جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم کا عمل کریں تو جواب بالعموم خود ایک ملحق عدد ہو گا۔ نیز چونکہ کسی منطق تفاعل پر مندرجہ بالا اعمال کے سوائے کوئی اور عمل نہیں کیا جاتا اس لئے ظاہر ہے کہ کسی ملحق عدد کا کوئی منطق تفاعل بھی ملحق عدد ہوتا ہے۔  $a + x$ ،  $a + x^2$ ،  $a + x^3$  وغیرہ کی شکل کے جملوں پر علم مثلث کے بغیر مفصل بحث نہیں کی جا سکتی۔ لیکن

ڈی ماسٹر کے مسئلہ سے بہ آسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ ایسے تقاضا  
 ۱ + خ ب کی شکل کے ایک لطف عدد میں قبول ہو سکتے ہیں۔  
 جہاں ۱ + خ زیادہ عام شکل کے جہاں ۱ + خ میں شامل ہے لیکن اس پر بحث  
 کرنے کا ایک اور طریقہ قابل توجہ ہے۔

دفعہ ۲۲۰ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر لاکوئی حقیقی مقدار ہو تو

$$ن = نبھا (۱ + \frac{۱}{ن})$$

مقدار ۱ + خ نما کی تعریف بھی حسب مساوات ذیل

$$ن = خ + نبھا (۱ + \frac{۱}{ن})$$

جس میں لا اور ما حقیقی مقدار ہیں۔  
 لطف اعداد کے نظریہ کی نشوونما پر شالک کی کتاب "دہینڈبگ آف  
 الجبر" میں "نیمبلے سس" کے ابواب ۱۰، ۱۱ میں مفصل بحث کی گئی ہے۔  
 ۱۳۵ - یہ تمام طریقوں کی توضیح کے لئے جو مساواتوں کے نظریہ میں اور  
 کئی مثالوں کے ثابت کرنے میں مفید ثابت ہو گئے چند مسائل اور امثلہ ذیل میں  
 درج کرتے ہیں۔

۱۴۵ - اگر لاکوئی کسی منطق صحیح تعامل کو لا۔ ۱ پر تقسیم کیا جائے تو بتاؤ کہ باقی  
 کیا بچے گی۔

فرض کرو کہ ف (لا) لاکوئی منطق صحیح تعامل ہے، ف (لا) کو لا۔ ۱ پر تقسیم  
 کرو تا وقتیکہ ایسی باقی نکل آئے جس میں لا شامل نہ ہو۔ فرض کرو کہ ق خارج قسمت  
 اور ب باقی ہے۔

$$ن ب = ف (لا) = ق (لا - ۱) + ب$$

چونکہ ب میں لا شامل نہیں ہے اس لئے اس کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہ ہوگی  
 خواہ ہم لا کو کوئی قیمت دیں، لا = ۱ رکھو تب

$$ن ب = ق (۱ - ۱) + ب$$

اب لا کی محدود قیمتوں کے لئے ق کی قیمت محدود ہوتی ہے

اس لئے ب - ف (۱)

نتیجہ صریح - اگر (۱) پورا تقسیم ہو جائے لا - ۱ پر تو ب = ۰  
یعنی ف (۱) = ۰ پس اگر لا کا ایک منطق صحیح تعامل صفر ہو جائے جبکہ لا - ۱  
تو لا - ۱ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے -

۱۵ - دعوہ ما قبل کا مسئلہ اس قدر ضروری ہے کہ ہم اس کا ایک اور ثبوت ذیل  
میں درج کرتے ہیں، اس ثبوت میں، مزید غامض یہ ہے کہ اثباتی عمل میں خارج  
قسمت کی شکل بھی حاصل کی جاتی ہے -

فرض کرو کہ تعامل ن اباد کا ہے اور

$$\text{قبلا}^{\text{ن}} + \text{قبلا}^{\text{ن-۱}} + \text{قبلا}^{\text{ن-۲}} + \text{قبلا}^{\text{ن-۳}} + \dots + \text{قبلا}^{\text{ن-۱۰۰}}$$

سے تعبیر ہوتا ہے، تب خارج قسمت (ن-۱) اباد کا تعامل ہوگا، اس کو

$$\text{قبلا}^{\text{ن-۱}} + \text{قبلا}^{\text{ن-۲}} + \text{قبلا}^{\text{ن-۳}} + \dots + \text{قبلا}^{\text{ن-۱۰۰}}$$

سے تعبیر کرو۔ اب اگر باقی جس میں لا شامل نہ ہو ب ہو تو ظاہر ہے کہ

$$\text{قبلا}^{\text{ن}} + \text{قبلا}^{\text{ن-۱}} + \text{قبلا}^{\text{ن-۲}} + \text{قبلا}^{\text{ن-۳}} + \dots + \text{قبلا}^{\text{ن-۱۰۰}}$$

$$= (لا - ۱) (\text{قبلا}^{\text{ن}} + \text{قبلا}^{\text{ن-۱}} + \text{قبلا}^{\text{ن-۲}} + \text{قبلا}^{\text{ن-۳}} + \dots + \text{قبلا}^{\text{ن-۱۰۰}}) + \text{ب}$$

مرب دینے اور لا کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی رکھنے سے

$$\text{قب} = \text{قب}$$

$$\text{قب} - \text{قب} = \text{قب} - \text{قب} \text{ یعنی } \text{قب} = \text{قب} + \text{قب}$$

$$\text{قب} - \text{قب} = \text{قب} - \text{قب} \text{ یعنی } \text{قب} = \text{قب} + \text{قب}$$

$$\text{قب} - \text{قب} = \text{قب} - \text{قب} \text{ یعنی } \text{قب} = \text{قب} + \text{قب}$$

ب۔ اقن۔۱ = فن یعنی ب = اقن۔۱ + فن

اس سے ظاہر ہے کہ خارج قسمت کے متوازی سر اس طرح بنتے ہیں خارج قسمت کی رقوم باقیل کے سر کو ۱ سے ضرب دو اور مقسوم میں اگلی رقوم کا جو سر ہے اس کو اس حاصل ضرب میں جمع کر دو۔ خارج قسمت کی متوازی رقوم اور باقی کے بنانے کا عمل ذیل کی ترتیب سے واضح ہو سکتا ہے۔

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| فب  | فب  | فب  | فب  | فب  | فب  | فب  | فب  |
| اقب | اقب | اقب | اقب | اقب | اقب | اقب | اقب |
| قب  | قب  | قب  | قب  | قب  | قب  | قب  | قب  |

پس ب = اقن۔۱ - فن = ۱ ( اقن۔۱ + فن۔۱ ) + فن۔۱ = .....۱

قب ۱ + فن ۱ + فن ۱ + فن ۱ + ..... + فن ۱  
اگر مقسوم علیہ لا ۱ ہو تو بھی یہ طریقہ استعمال ہو سکتا ہے لیکن اس صورت میں ضارب ۱ کی بجائے ۱ ہوگا۔  
مثال۔ اگر ۳ لا ۱ + ۳ لا ۲ + ۳ لا ۳ + ۳ لا ۴ + ۳ لا ۵ کو لا ۲ پر تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت اور باقی معلوم کرو۔

یہاں ضارب ۲ ہے، لہذا

|   |    |    |    |    |    |    |   |
|---|----|----|----|----|----|----|---|
| ۳ | ۱  | ۰  | ۳۱ | ۰  | ۰  | ۲۱ | ۵ |
| ۶ | ۱۳ | ۲۸ | ۶  | ۱۲ | ۲۴ | ۶  |   |
| ۳ | ۱۳ | ۳  | ۶  | ۱۲ | ۳  | ۱۱ |   |

پس خارج قسمت ۳ لا ۱ + ۳ لا ۲ + ۳ لا ۳ + ۳ لا ۴ + ۳ لا ۵ ہے اور باقی ۱۱ ہے۔  
۱۶ ۵ مشق باقیل میں اختصار کی خاطر مختلف رقوم کے صرف سر درج کئے گئے ہیں اور





کارآمد ہوتا ہے، لیکن اس کی کوئی مثال دینے سے پہلے ہم متشاكل اور متقابل تفاعیل کے متعلق چند امور کا ذکر کر دینا مناسب سمجھتے ہیں۔

اگر ایک تفاعل ایسا ہو کہ اس کے متغیرات کے کسی زوج کو ایک دوسرے سے بدلنے سے تفاعل مذکور میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہو تو یہ تفاعل اپنے متغیرات کے لحاظ سے متشاكل کہلاتا ہے۔ مثلاً لا + ما + ی، لا + ما + ی + ی لا + لا + ما + ی + ی - لا + ما + ی بالترتیب پہلے دوسرے تیسرے درجہ کے متشاكل تفاعل ہیں۔

یہ بات قابل غور ہے کہ درجہ اول کے تفاعل متشاكل صرف م (لا + ما + ی) کی شکل کا ہو سکتا ہے جہاں م بے تعلق ہو لا + ما + ی سے۔ ۵۱۹۔ متشاكل تفاعیل کی تعریف سے یہی ظاہر ہے کہ دو متشاكل جلوں کا مجموعہ فرق، حاصل ضرب اور خارج قسمت سب متشاكل ہونگے۔ اس اصول کو ذہن میں رکھنے سے جبریت عمل کی صحت کو جانچنے کے لئے بعض اوقات بڑی آسانی ہوتی ہے اور بعض صورتوں میں ہم طویل عملوں کی زحمت سے بچ جاتے ہیں۔

مثلاً ہم جانتے ہیں کہ (لا + ما + ی) کی تفصیل درجہ سوم کا ایک متجانس جملہ ہوگی اور اس لئے اس کی شکل لا + ما + ی + ی لا + لا + ما + ی + ی - لا + ما + ی + ی لا + لا + ما + ی + ی ہوگی جہاں 'ب' ایسی متغیرات ہیں جو لا + ما + ی کے تابع نہیں ہیں۔

دیکھیے، تب ۱ = ۳ کیونکہ لا + لا + ما + ی کی تفصیل میں لا + ما کا سر ہے، لا + لا + ما + ی = ۱ تب ہمیں حاصل ہوتا ہے ۲۴ = ۳ + (۶ × ۳) + ب یعنی ب = ۶

پس (لا + ما + ی) = لا + ما + ی + ی لا + لا + ما + ی + ی لا + لا + ما + ی + ی لا + لا + ما + ی + ی لا + لا + ما + ی + ی لا + لا + ما + ی + ی

۵۲۰۔ اگر ایک تفاعل ایسا ہو کہ اس کے متغیرات کے کسی زوج کو باہم بدلنے سے تفاعل کی علامت بدل جائے لیکن اس کی عددی قیمت تبدیل نہ ہو

تفاعل اپنے متغیرات کے لحاظ سے متبادل کہلاتا ہے۔ مثلاً لا۔ ما اور  
 (ا۔ب)۔ (ج) + (ب۔ج)۔ (ا) + (ج۔ا)۔ (ب)

متبادل تفاعل ہیں۔

یہ ظاہر ہے کہ کوئی خطی متبادل تفاعل ایسا نہیں ہو سکتا جس میں دو سے  
 زیادہ متغیر ہوں۔ نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ کسی متشاکل تفاعل اور متبادل تفاعل  
 کا حاصل ضرب ایک متبادل تفاعل ہوتا ہے۔

۵۲۔ متشاکل اور متبادل تفاعل صرف ایک رقم لکھنے اور اس رقم کے  
 ماقبل علامت کے جو حاصل جمع کا اختصار ہے ثبت کرنے سے تعبیر کئے  
 جا سکتے ہیں۔ مثلاً  $\chi = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$   
 نوٹ کی ہیں،  $\chi = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$   
 کے نوٹ کی ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ مثلاً اگر تفاعل میں چار حروف (ا، ب، ج، د)  
 ہوں تو

$$\chi = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

$$\chi = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

علیٰ القیاس

اسی طرح سے اگر کسی تفاعل میں تین حروف (ا، ب، ج) ہوں تو  
 $\chi = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

اور  $\chi = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$  وغیرہ وغیرہ

یہ بات قابل توجہ ہے کہ جب حروف کی تعداد تین ہو تو  $\chi = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$   
 تین رقموں پر نہیں بلکہ چھ رقموں پر مشتمل ہے، یعنی

$$\chi = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

علامت کے حروف کے دو یا زیادہ جوڑوں کے لحاظ سے جمع کے عمل کو تعبیر  
 کرنے کے لئے بھی استعمال ہو سکتی ہے۔ مثلاً





معلوم ہو جاتا ہے، پس اس کا ایک جزو ضربی (۱-ب) ہے [دیکھو دفعہ ۵۱۴]  
 اسی طرح سے (ب-ج) اور (ج-۱) بھی اس کے اجزائے ضربی ہیں (ب-ج) (ج-۱)  
 (۱-ب) بطور جزو ضربی کے شامل ہوتا ہے۔

نیز چونکہ ع چوتھے درجہ کا ہے، اس لئے باقی جزو ضربی پہلے درجہ کا ہوگا اور چونکہ  
 ع ایک متشکل تقاطل ہے، ۱، ب، ج کا اس لئے آخر الذکر جزو ضربی م (۱+ب+ج)  
 کی شکل کا ہوگا۔ [دیکھو دفعہ ۵۱۸]

ع = م (ب-ج) (ج-۱) (۱-ب) (۱+ب+ج) م کی قیمت معلوم کرنے  
 کے لئے ہم ۱، ب، ج کو کوئی ایسی قیمت دے سکتے ہیں جو ہمیں آسان ترین معلوم ہو،  
 ۱ = ۱، ب = ۱، ج = ۱۰ رکھنے سے م = ۱ اور اس سے ہمیں مطلوبہ نتیجہ حاصل  
 ہو جاتا ہے۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ۔

(۱+ما+ی)۔ (۱+ا)۔ (۱+ی) (۱+ا+ی) (۱+لا+ما+ا+ی+لا+ما+ی+لا+ما+ی) (۱+ما+ی)  
 دائیں جانب کے جو کو ع سے تیسرے درجہ کا ہے، تب ج معلوم ہو جاتا ہے جب م = ۱۔ پس (ما+ی)  
 ایک جزو ضربی ہے ع کا، اسی طرح سے (ی+لا) اور (لا+ما) بھی اجزائے ضربی ہیں۔  
 لہذا (لا+ما) (ما+ی) (ی+لا) جزو ضربی ہے ع کا، نیز چونکہ ع پانچویں درجہ کا ہے،  
 اس لئے باقی جزو ضربی دوسرے درجہ کا ہوگا اور چونکہ ع بلحاظ لا، ما، ی کے متشکل ہے،  
 اس لئے موزن الذکر جزو ضربی کی شکل یہ ہوگی۔

$$(۱+لا+ما+ی) + (۱+لا+ما+ی+لا+ما+ی+لا+ما+ی) (۱+لا)$$

$$لا = ما = ی = ۱ رکھنے سے ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

$$لا = ۲، ما = ۱، ی = ۱۰ رکھنے سے ۳۵ = ۲ + ۱ + ۱$$

$$حل کرنے سے ۱ = ب = ۵$$

پس مطلوبہ نتیجہ فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

۵۲۳۔ حوالہ کے لئے ذیل میں ہم ایک فہرست ایسی مساوات متماثلہ کی  
 درج کرتے ہیں جو جبریہ جملوں کی تحویل میں کارآمد ہوتی ہیں ان میں سے  
 اکثر ابتدائی الجبرا کے باب ۲۹ میں درج کی جا چکی ہیں۔

$$\Sigma \text{ ب ج } ( \text{ب} - \text{ج} ) = - ( \text{ب} - \text{ج} ) ( \text{ج} - \text{ا} ) ( \text{ا} - \text{ب} )$$

$$\Sigma \text{ ا } ( \text{ا} - \text{ب} ) ( \text{ب} - \text{ج} ) = - ( \text{ب} - \text{ج} ) ( \text{ج} - \text{ا} ) ( \text{ا} - \text{ب} )$$

$$\Sigma \text{ ا } ( \text{ب} - \text{ج} ) = ( \text{ب} - \text{ج} ) ( \text{ج} - \text{ا} ) ( \text{ا} - \text{ب} )$$

$$\Sigma \text{ ا } ( \text{ب} - \text{ج} ) = - ( \text{ب} - \text{ج} ) ( \text{ج} - \text{ا} ) ( \text{ا} - \text{ب} ) ( \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} )$$

$$\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - ۳ \text{ا ب ج} = ( \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} )$$

$$( \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{ب ج} - \text{ج ا} - \text{ا ب} )$$

آخری مثلاً ذیل کی شکل میں بھی لکھی جاسکتی ہے:-

$$\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - ۳ \text{ا ب ج} = \frac{۱}{۴} ( \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} ) ( \text{ب} - \text{ج} ) ( \text{ج} - \text{ا} ) ( \text{ا} - \text{ب} )$$

$$( \text{ب} - \text{ج} ) ( \text{ج} - \text{ا} ) ( \text{ا} - \text{ب} ) = ۳ ( \text{ب} - \text{ج} ) ( \text{ج} - \text{ا} ) ( \text{ا} - \text{ب} )$$

$$( \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} ) ( \text{ج} - \text{ا} ) ( \text{ا} - \text{ب} ) = ۳ ( \text{ب} - \text{ج} ) ( \text{ج} - \text{ا} ) ( \text{ا} - \text{ب} )$$

$$\Sigma \text{ ب ج } ( \text{ب} + \text{ج} ) + ۲ \text{ا ب ج} = ( \text{ب} + \text{ج} ) ( \text{ج} + \text{ا} ) ( \text{ا} + \text{ب} )$$

$$\Sigma \text{ ا } ( \text{ا} + \text{ب} ) ( \text{ب} + \text{ج} ) + ۲ \text{ا ب ج} = ( \text{ا} + \text{ب} ) ( \text{ب} + \text{ج} ) ( \text{ا} + \text{ا} )$$

$$( \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} ) ( \text{ب} + \text{ج} + \text{ا} ) ( \text{ا} + \text{ب} ) = ( \text{ب} + \text{ج} ) ( \text{ج} + \text{ا} ) ( \text{ا} + \text{ب} )$$

$$۲ \text{ب ج} + ۲ \text{ج ا} + ۲ \text{ا ب} - \text{ا}^2 - \text{ب}^2 - \text{ج}^2$$

$$= ( \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} ) ( \text{ب} + \text{ج} - \text{ا} ) ( \text{ا} + \text{ج} - \text{ب} ) ( \text{ا} + \text{ب} - \text{ج} )$$

مثلاً نمبری ۳۴ ( ا )

۱۔ معلوم کرو کہ ۳ لا + ۱۱ لا + ۹۰ لا - ۱۹ لا + ۵۳ کو لا + ۵ پر تقسیم کرنے سے

باقی کیا بچے گی۔



$$۱۵- \Sigma (ب + ج - ۱)^۲ = ۳(ب + ج - ۱)(ج + ۱ - ۲)(ب - ۱ + ۲) = ۳(ب + ج - ۱)(ج + ۱ - ۲)(ب - ۱ + ۲)$$

$$۱۶- \frac{۱(ب - ج)}{(ج - ۱)(۱ - ۲)} + \frac{ب(ج - ۱)}{(۱ - ۲)(ب - ۱)} + \frac{ج(۱ - ۲)}{(ب - ۱)(ج - ۱)} = ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

$$۱۷- \frac{۱۲}{۱ + ب} + \frac{۲}{ب + ج} + \frac{ج}{۱ + ج} = \frac{۱۲}{۱ + ب} + \frac{۲}{ب + ج} + \frac{ج}{۱ + ج} = \frac{۱۲}{۱ + ب} + \frac{۲ + ج}{ب + ج} = \frac{۱۲}{۱ + ب} + \frac{۲ + ج}{ب + ج}$$

$$۱۸- \Sigma (ب + ج - ۱) = ۲(ب + ج - ۱) = ۲(ب + ج - ۱) = ۲(ب + ج - ۱)$$

$$۱۹- \frac{۱(ب + ج)}{(ج - ۱)(۱ - ۲)} + \frac{ب(ج + ۱)}{(۱ - ۲)(ب - ۱)} + \frac{ج(۱ + ۲)}{(ب - ۱)(ج - ۱)} = \frac{۱(ب + ج)}{(ج - ۱)(۱ - ۲)} + \frac{ب(ج + ۱)}{(۱ - ۲)(ب - ۱)} + \frac{ج(۱ + ۲)}{(ب - ۱)(ج - ۱)}$$

$$۲۰- \Sigma (ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲) = ۱(ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲) = ۱(ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲)$$

$$۲۱- (۱ + ۱)(۱ + ۱)(۱ + ۱) = ۲(۱ + ۱)(۱ + ۱) = ۲(۱ + ۱)(۱ + ۱)$$

$$۲۲- \Sigma (ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲) = (ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲) = (ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲)$$

$$۲۳- ۱(ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲) = ۱(ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲) = ۱(ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲)$$

$$= (۱ - ۲)(ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲) = (۱ - ۲)(ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲)$$

$$۲۴- \Sigma (ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲) = ۱(ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲) = ۱(ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲)$$

$$\Sigma (ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲) = ۱(ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲) = ۱(ب - ج)(ج - ۱)(۱ - ۲)$$

$$۲۵- (ب + ج) + (ج + ۱) + (۱ + ۲) = ۳(ب + ج) + (ج + ۱) + (۱ + ۲) = ۳(ب + ج) + (ج + ۱) + (۱ + ۲)$$

$$= (۱ + ۲)(ب + ج) + (ج + ۱) + (۱ + ۲) = (۱ + ۲)(ب + ج) + (ج + ۱) + (۱ + ۲)$$

$$۲۶- اگر ۱ = ب + ج - ۱، ۲ = ج + ۱ - ۲، ۳ = ۱ + ۲ - ۳، اور ۱ = ب + ج - ۱$$

تو ثابت کرو کہ

لا + ا + ی = ۲ - ۳ لا می = ۴ (ا + ب + ج - ۳ - ۲ ا ب ج)  
 ۲ - ثابت کرو کہ ا + ب + ج - ۳ - ۲ ا ب ج کی قیمت میں کوئی فرق نہیں  
 آتا اگر ہم ا، ب، ج کی بجائے بالترتیب س - ا، س - ب، س - ج  
 رکھیں جہاں ۳ س = ۲ (ا + ب + ج)  
 جملات ذیل کی قیمتیں معلوم کرو۔

ج

ب

ا

$$\begin{aligned} & ۲۸ - \frac{(ا-ب)(ج-ا)(ج-ب) + (ب-ج)(ا-ب)(ا-ج) + (ج-ا)(ج-ب)(ب-ا)}{(ا-ب)(ج-ا)(ج-ب) + (ب-ج)(ا-ب)(ا-ج) + (ج-ا)(ج-ب)(ب-ا)} \\ & ۲۹ - \frac{(ا-ب)(ج-ا)(ج-ب) + (ب-ج)(ا-ب)(ا-ج) + (ج-ا)(ج-ب)(ب-ا)}{(ا-ب)(ج-ا)(ج-ب) + (ب-ج)(ا-ب)(ا-ج) + (ج-ا)(ج-ب)(ب-ا)} \\ & ۳۰ - \frac{(ا-ب)(ج-ا)(ج-ب) + (ب-ج)(ا-ب)(ا-ج) + (ج-ا)(ج-ب)(ب-ا)}{(ا-ب)(ج-ا)(ج-ب) + (ب-ج)(ا-ب)(ا-ج) + (ج-ا)(ج-ب)(ب-ا)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ۳۱ - \frac{(ا-ب)(ج-ا)(ج-ب) + (ب-ج)(ا-ب)(ا-ج) + (ج-ا)(ج-ب)(ب-ا)}{(ا-ب)(ج-ا)(ج-ب) + (ب-ج)(ا-ب)(ا-ج) + (ج-ا)(ج-ب)(ب-ا)} \\ & ۳۲ - \frac{(ا-ب)(ج-ا)(ج-ب) + (ب-ج)(ا-ب)(ا-ج) + (ج-ا)(ج-ب)(ب-ا)}{(ا-ب)(ج-ا)(ج-ب) + (ب-ج)(ا-ب)(ا-ج) + (ج-ا)(ج-ب)(ب-ا)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ۳۳ - اگر لا + ما + می = س اور لا می = ف تو ثابت کرو کہ \\ & \left( \frac{ف}{س} - \frac{ف}{س} \right) \left( \frac{ف}{س} - \frac{ف}{س} \right) + \left( \frac{ف}{س} - \frac{ف}{س} \right) \left( \frac{ف}{س} - \frac{ف}{س} \right) + \left( \frac{ف}{س} - \frac{ف}{س} \right) \left( \frac{ف}{س} - \frac{ف}{س} \right) \end{aligned}$$

$$\left( \frac{ف}{س} - \frac{ف}{س} \right) \left( \frac{ف}{س} - \frac{ف}{س} \right) + \left( \frac{ف}{س} - \frac{ف}{س} \right) \left( \frac{ف}{س} - \frac{ف}{س} \right) + \left( \frac{ف}{س} - \frac{ف}{س} \right) \left( \frac{ف}{س} - \frac{ف}{س} \right)$$

### متفرق متماثلات

۵۲۴ - بہت سی متماثلات ا کے جذر الکعبوں کے خواص کے استعمال سے  
 نہایت آسانی سے ثابت کی جاسکتی ہیں۔ ان جذروں کو حسب معمول  
 ۱، ۲، ۳ سے تعبیر کیا جائیگا۔

**مثال۔ ثابت کرو کہ**

$$(1+y+z)(1+y)yz = 1 - y - (1+y)$$

دائیں طرف کا جو  $x$  معدوم ہو جاتا ہے اگر  $0 = 1, 0 = 1, 0 = 1$  لہذا  $(0, 0, 0)$  اس کا جزو ضروری ہے۔

لا = سنا رکھنے سے

$$I \{ 1 - s - (s-) \} = I \{ 1 - s - (s+i) \} = 0$$

پس ظاہر ہے کہ ع میں ایک جزو ضربی (لا - سہ ما) شامل ہے، اسی طرح سے ہم  
تابع کر سکتے ہیں کہ اس میں لا - سہ ما بطور جزو ضربی شامل ہے، اس لئے  
ع، (لا - سہ ما) (لا - سہ ما) پر تقسیم ہو سکتا ہے یعنی لا + لا + لا + لا پر تقسیم ہو سکتا ہے۔  
مزید ہاں جو کس ع سات ابعاد کا مجموعہ ہے اور لا (لا + لا) (لا + لا + لا + لا + لا)  
پانچ ابعاد کا ہے، اس لئے باقی جزو ضربی و (لا + لا + لا) + ب لا کی شکل کا ہوگا۔ یعنی  
(لا + لا) - لا - لا = لا (لا + لا + لا) (لا + لا + لا) (لا + لا + لا + لا + لا)

لا = 11، 1 = 6، 2 = 11، 3 = 12، 4 = 13، 5 = 14، 6 = 15، 7 = 16، 8 = 17، 9 = 18، 10 = 19، 11 = 20، 12 = 21، 13 = 22، 14 = 23، 15 = 24، 16 = 25، 17 = 26، 18 = 27، 19 = 28، 20 = 29، 21 = 30، 22 = 31، 23 = 32، 24 = 33، 25 = 34، 26 = 35، 27 = 36، 28 = 37، 29 = 38، 30 = 39، 31 = 40، 32 = 41، 33 = 42، 34 = 43، 35 = 44، 36 = 45، 37 = 46، 38 = 47، 39 = 48، 40 = 49، 41 = 50، 42 = 51، 43 = 52، 44 = 53، 45 = 54، 46 = 55، 47 = 56، 48 = 57، 49 = 58، 50 = 59، 51 = 60، 52 = 61، 53 = 62، 54 = 63، 55 = 64، 56 = 65، 57 = 66، 58 = 67، 59 = 68، 60 = 69، 61 = 70، 62 = 71، 63 = 72، 64 = 73، 65 = 74، 66 = 75، 67 = 76، 68 = 77، 69 = 78، 70 = 79، 71 = 80، 72 = 81، 73 = 82، 74 = 83، 75 = 84، 76 = 85، 77 = 86، 78 = 87، 79 = 88، 80 = 89، 81 = 90، 82 = 91، 83 = 92، 84 = 93، 85 = 94، 86 = 95، 87 = 96، 88 = 97، 89 = 98، 90 = 99، 91 = 100، 92 = 101، 93 = 102، 94 = 103، 95 = 104، 96 = 105، 97 = 106، 98 = 107، 99 = 108، 100 = 109، 101 = 110، 102 = 111، 103 = 112، 104 = 113، 105 = 114، 106 = 115، 107 = 116، 108 = 117، 109 = 118، 110 = 119، 111 = 120، 112 = 121، 113 = 122، 114 = 123، 115 = 124، 116 = 125، 117 = 126، 118 = 127، 119 = 128، 120 = 129، 121 = 130، 122 = 131، 123 = 132، 124 = 133، 125 = 134، 126 = 135، 127 = 136، 128 = 137، 129 = 138، 130 = 139، 131 = 140، 132 = 141، 133 = 142، 134 = 143، 135 = 144، 136 = 145، 137 = 146، 138 = 147، 139 = 148، 140 = 149، 141 = 150، 142 = 151، 143 = 152، 144 = 153، 145 = 154، 146 = 155، 147 = 156، 148 = 157، 149 = 158، 150 = 159، 151 = 160، 152 = 161، 153 = 162، 154 = 163، 155 = 164، 156 = 165، 157 = 166، 158 = 167، 159 = 168، 160 = 169، 161 = 170، 162 = 171، 163 = 172، 164 = 173، 165 = 174، 166 = 175، 167 = 176، 168 = 177، 169 = 178، 170 = 179، 171 = 180، 172 = 181، 173 = 182، 174 = 183، 175 = 184، 176 = 185، 177 = 186، 178 = 187، 179 = 188، 180 = 189، 181 = 190، 182 = 191، 183 = 192، 184 = 193، 185 = 194، 186 = 195، 187 = 196، 188 = 197، 189 = 198، 190 = 199، 191 = 200، 192 = 201، 193 = 202، 194 = 203، 195 = 204، 196 = 205، 197 = 206، 198 = 207، 199 = 208، 200 = 209، 201 = 210، 202 = 211، 203 = 212، 204 = 213، 205 = 214، 206 = 215، 207 = 216، 208 = 217، 209 = 218، 210 = 219، 211 = 220، 212 = 221، 213 = 222، 214 = 223، 215 = 224، 216 = 225، 217 = 226، 218 = 227، 219 = 228، 220 = 229، 221 = 230، 222 = 231، 223 = 232، 224 = 233، 225 = 234، 226 = 235، 227 = 236، 228 = 237، 229 = 238، 230 = 239، 231 = 240، 232 = 241، 233 = 242، 234 = 243، 235 = 244، 236 = 245، 237 = 246، 238 = 247، 239 = 248، 240 = 249، 241 = 250، 242 = 251، 243 = 252، 244 = 253، 245 = 254، 246 = 255، 247 = 256، 248 = 257، 249 = 258، 250 = 259، 251 = 260، 252 = 261، 253 = 262، 254 = 263، 255 = 264، 256 = 265، 257 = 266، 258 = 267، 259 = 268، 260 = 269، 261 = 270، 262 = 271، 263 = 272، 264 = 273، 265 = 274، 266 = 275، 267 = 276، 268 = 277، 269 = 278، 270 = 279، 271 = 280، 272 = 281، 273 = 282، 274 = 283، 275 = 284، 276 = 285، 277 = 286، 278 = 287، 279 = 288، 280 = 289، 281 = 290، 282 = 291، 283 = 292، 284 = 293، 285 = 294، 286 = 295، 287 = 296، 288 = 297، 289 = 298، 290 = 299، 291 = 300، 292 = 301، 293 = 302، 294 = 303، 295 = 304، 296 = 305، 297 = 306، 298 = 307، 299 = 308، 300 = 309، 301 = 310، 302 = 311، 303 = 312، 304 = 313، 305 = 314، 306 = 315، 307 = 316، 308 = 317، 309 = 318، 310 = 319، 311 = 320، 312 = 321، 313 = 322، 314 = 323، 315 = 324، 316 = 325، 317 = 326، 318 = 327، 319 = 328، 320 = 329، 321 = 330، 322 = 331، 323 = 332، 324 = 333، 325 = 334، 326 = 335، 327 = 336، 328 = 337، 329 = 338، 330 = 339، 331 = 340، 332 = 341، 333 = 342، 334 = 343، 335 = 344، 336 = 345، 337 = 346، 338 = 347، 339 = 348، 340 = 349، 341 = 350، 342 = 351، 343 = 352، 344 = 353، 345 = 354، 346 = 355، 347 = 356، 348 = 357، 349 = 358، 350 = 359، 351 = 360، 352 = 361، 353 = 362، 354 = 363، 355 = 364، 356 = 365، 357 = 366، 358 = 367، 359 = 368، 360 = 369، 361 = 370، 362 = 371، 363 = 372، 364 = 373، 365 = 374، 366 = 375، 367 = 376، 368 = 377، 369 = 378، 370 = 379، 371 = 380، 372 = 381، 373 = 382، 374 = 383، 375 = 384، 376 = 385، 377 = 386، 378 = 387، 379 = 388، 380 = 389، 381 = 390، 382 = 391، 383 = 392، 384 = 393، 385 = 394، 386 = 395، 387 = 396، 388 = 397، 389 = 398، 390 = 399، 391 = 400، 392 = 401، 393 = 402، 394 = 403، 395 = 404، 396 = 405، 397 = 406، 398 = 407، 399 = 408، 400 = 409، 401 = 410، 402 = 411، 403 = 412، 404 = 413، 405 = 414، 406 = 415، 407 = 416، 408 = 417، 409 = 418، 410 = 419، 411 = 420، 412 = 421، 413 = 422، 414 = 423، 415 = 424، 416 = 425، 417 = 426، 418 = 427، 419 = 428، 420 = 429، 421 = 430، 422 = 431، 423 = 432، 424 = 433، 425 = 434، 426 = 435، 427 = 436، 428 = 437، 429 = 4

لا = ۱، ۲ = ۱ - اے کہنے سے      ۴۱ = ۵ - ۲ ب

مل کرنے سے      ۱ = ا ، ب = ۷

$$(1 + y + y^2)(1 + y)y^4 = 1 - y = 1 - (1 + y) \therefore$$

۵۲۵۔ ابتدائی الجبر سے ہم جانتے ہیں کہ

نیز دفعہ ۱۱۰ مشق ۳ کی رو سے یہیں معلوم ہے کہ

اُ + پ + ج - اُ پ - پ ج - ج ا = (ا + س د پ + س ج) (ا + س د پ + س ج)

پس  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  ج میں خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

(اُ + ب + ج = ۱) (ا + ب + ج = ۱) (ا + ب + ج = ۱) (ا + ب + ج = ۱) (ا + ب + ج = ۱)

مثال :- ثابت کرو کہ





$$1 + f + l + q + r = 0$$

جہاں  $f = 1 + b + j$ ،  $q = 1 + b + j + c$ ،  $r = 1 + b + j$  پس شرط مفروضہ یعنی  $1 + b + j = 0$  کو استعمال کرنے سے

$$(1 + l + r) + (1 + b + j) = 1 + q + r = 0$$

دونوں جانب کو جمع کر لیں اور  $l$  کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$\frac{(1 + l + r) + (1 + b + j)}{n} = \frac{1 + q + r}{n} = \frac{1 + b + j + c + 1 + b + j}{n} = \frac{2 + 2b + 2j + c}{n}$$

$$= \frac{1 + b + j + c}{n} = \frac{1 + b + j + c}{n} = \frac{1 + b + j + c}{n} = \frac{1 + b + j + c}{n}$$

$$= \frac{1 + b + j + c}{n} = \frac{1 + b + j + c}{n} = \frac{1 + b + j + c}{n} = \frac{1 + b + j + c}{n}$$

$$\text{جس سے } \frac{1 + b + j + c}{n} = \frac{1 + b + j + c}{n} = \frac{1 + b + j + c}{n} = \frac{1 + b + j + c}{n}$$

اور مطلوبہ نتیجہ فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

اگر  $1 = b$ ،  $b = j$ ،  $j = c$ ،  $c = 1$ ۔ تب تو شرط مذکورہ بالا پوری ہوتی ہے۔

پس  $1 + b + j + c$  اور  $j$  کی تمام قیمتوں کے لئے ذیل کی مساوات متماثل طور پر صحیح ہے۔

$$\{ (1 - b) + (b - j) + (j - c) + (c - 1) \}$$

$$= \{ (1 - b) + (b - j) + (j - c) + (c - 1) \} = \{ (1 - b) + (b - j) + (j - c) + (c - 1) \}$$

$$\text{یعنی } (1 - b) + (b - j) + (j - c) + (c - 1) = 0$$

$$(1 - b) + (b - j) + (j - c) + (c - 1) = 0$$

دفعہ ۵۲۲ مشق ۳ سے مقابلہ کرو۔

### امثلہ ۳۴ (ب)

۱۔ اگر  $(۱ + ب + ج) = ۳$  و  $(۱ + ب + ج) = ۳$  ثابت کرو کہ  $(۱ + ب + ج) = ۳$

$= ۱ + ب + ج + ۱ + ب + ج + ۱ + ب + ج$  چنان کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ  $(۱ + ب + ج) = ۳$  و  $(۱ + ب + ج) = ۳$  ثابت کرو کہ  $(۱ + ب + ج) = ۳$

$= (۱ + ب + ج) (۱ + ب + ج) (۱ + ب + ج)$

۳۔ ثابت کرو کہ اگر کوئی طاق مثبت صحیح عدد ہو جو ۳ کا کوئی ضعف نہ ہو تو  $(۱ + ب + ج) = ۳$  تقسیم ہو سکتا ہے  $(۱ + ب + ج) = ۳$  پر

۴۔ ثابت کرو کہ  $(۱ + ب + ج) = ۳$  و  $(۱ + ب + ج) = ۳$  ثابت کرو کہ  $(۱ + ب + ج) = ۳$

$= ۱ + ب + ج + ۱ + ب + ج + ۱ + ب + ج$

۵۔ اس جملہ کی قیمت معلوم کرو۔

$(۱ + ب + ج) (۱ + ب + ج) (۱ + ب + ج) (۱ + ب + ج) (۱ + ب + ج)$   
 $(۱ + ب + ج) (۱ + ب + ج) (۱ + ب + ج) (۱ + ب + ج) (۱ + ب + ج)$

۶۔ ثابت کرو کہ  $(۱ + ب + ج) = ۳$  و  $(۱ + ب + ج) = ۳$  ثابت کرو کہ  $(۱ + ب + ج) = ۳$

$= ۱ + ب + ج + ۱ + ب + ج + ۱ + ب + ج$

۷۔ ثابت کرو کہ  $(۱ + ب + ج) = ۳$  و  $(۱ + ب + ج) = ۳$  ثابت کرو کہ  $(۱ + ب + ج) = ۳$

$= ۱ + ب + ج + ۱ + ب + ج + ۱ + ب + ج$

ثابت کرو کہ

۸۔  $(۱ + ب + ج) = ۳$  و  $(۱ + ب + ج) = ۳$  ثابت کرو کہ  $(۱ + ب + ج) = ۳$

$= ۱ + ب + ج + ۱ + ب + ج + ۱ + ب + ج$

۹۔  $(۱ + ب + ج) = ۳$  و  $(۱ + ب + ج) = ۳$  ثابت کرو کہ  $(۱ + ب + ج) = ۳$

$= ۱ + ب + ج + ۱ + ب + ج + ۱ + ب + ج$

۱۰۔  $(۱ + ب + ج) = ۳$  و  $(۱ + ب + ج) = ۳$  ثابت کرو کہ  $(۱ + ب + ج) = ۳$

$= ۱ + ب + ج + ۱ + ب + ج + ۱ + ب + ج$

اگر  $ا + ب + ج = ۰$  تو مساوات ۱۱ء کی علامت مثبت کرو۔

$$۱۱ - (ا + ب + ج)^۲ = (ا + ب + ج)^۲$$

$$۱۳ - (ا + ب + ج)^۲ = (ا + ب + ج)^۲$$

$$۱۳ - (ا + ب + ج)^۲ = (ا + ب + ج)^۲$$

$$۱۳ - (ا + ب + ج)^۲ = (ا + ب + ج)^۲$$

$$۱۵ - (ا + ب + ج)^۲ = (ا + ب + ج)^۲$$

$$۱۶ - (ا + ب + ج)^۲ = (ا + ب + ج)^۲$$

$$۱۷ - (ا + ب + ج)^۲ = (ا + ب + ج)^۲$$

$$= (ا + ب + ج)^۲$$

$$۱۸ - (ا + ب + ج)^۲ = (ا + ب + ج)^۲$$

$$۲۱ = (ا + ب + ج)^۲$$

$$۱۹ - (ا + ب + ج)^۲ = (ا + ب + ج)^۲$$

$$= (ا + ب + ج)^۲$$

$$۲۰ - (ا + ب + ج)^۲ = (ا + ب + ج)^۲$$

$$= (ا + ب + ج)^۲$$

$$۲۱ - (ا + ب + ج)^۲ = (ا + ب + ج)^۲$$

$$= (ا + ب + ج)^۲$$

$$۲۲ - (ا + ب + ج)^۲ = (ا + ب + ج)^۲$$

$$۴ (و + لا + ب + ا + ج + ی) - ۳ (و + لا + ب + ا + ج + ی) (و + لا + ب + ا + ج + ی) \\ ۲ - (ب - ج) (ج - ا) (ا - و) (و - ب) (ب - ا) (ی - ی) (ی - لا) (لا - و) = ۵۴ (و + ب + ج + لا + ی)$$

اگر  $و + ب + ج + د + ۵ = ۰$  تو ثابت کرو کہ

$$۲۳ - \frac{و + ب + ج + د + ۵}{۵} = \frac{و + ب + ج + د + ۵}{۳} \times \frac{و + ب + ج + د + ۵}{۲}$$

$$۲۴ - (و + ب + ج + د + ۵) = ۹ (ب + ج + د + ا + د + ا + ب + و + ب + ج)$$

$$۹ = (ب + ج - ا + د) (ج - ا - ب + د) (ا + ب - ج - د)$$

$$۲۵ - اگر ۲ = ۱ + ب + ج اور ۲ = ۱ + و + ب + ج ۲ تو ثابت کرو کہ$$

$$\sum (س - ب) (ب - ج) (ج - ا) (ا - و) (و - ب) (ب - ا) (ی - ی) (ی - لا) (لا - و) = ۵۴ (س + ج + ب + ا + و + ب + ج + لا + ی)$$

$$۲۶ - ثابت کرو کہ (۱ + و + ب + ج + لا + ی) + (۱ + و + ب + ج + لا + ی) + (۱ + و + ب + ج + لا + ی) = ۲۴ (۱ + و + ب + ج + لا + ی)$$

$$۲۴ = ۲ (۱ + و + ب + ج + لا + ی) (۱ + و + ب + ج + لا + ی)$$

$$۲۷ - ثابت کرو کہ \sum \frac{و}{(و - ب)(ب - ج)(ج - ا)(ا - د)}$$

$$= \frac{و + ب + ج + د + ۵}{۵} + \frac{و + ب + ج + د + ۵}{۳} + \frac{و + ب + ج + د + ۵}{۲} = ۰$$

۲۸ - ذیل کے جملہ کو ابروئے ضربی میں تحلیل کرو:

$$۲ (و + ب + ج + لا + ی) + (و + ب + ج + لا + ی) (و + ب + ج + لا + ی) + (و + ب + ج + لا + ی) (و + ب + ج + لا + ی)$$

استقاط

۵۲۷ - باب سی و سوم میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ خطی مساواتوں کے ایک نظام کا حاصل استقاط فوراً ایک مقطوعہ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ عمل استقاط کے ان عام طریقوں پر جن کا اطلاق ہر درجہ کی مساواتوں پر ہو سکے مساواتوں کے نظریہ کی کتابوں میں مفصل بحث کی گئی ہے طالب علم

کو چاہیے کہ بالخصوص ڈاکٹر سالن کی کتاب Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra کے ابواب چہارم و ششم کا اور برن سائیڈ اور پٹین کے نظریہ مساوات باب ہشتم کا مطالعہ کرے۔

اگرچہ یہ طریقہ نظری طور پر بالکل مکمل ہیں مگر عملی طور پر ہمیشہ سہولت بخش ثابت نہیں ہوتے۔ اس لئے ہم پہلے عمل اسقاط کے عام نظریہ کی مجمل تشریح کر دیں گے اور پھر ان قاعدوں کی توضیح کے لئے جو عملی طور پر زیادہ مفید ہیں چند مثالیں حل کریں گے۔

۵۲۸۔ پہلے دو مساواتوں میں سے ایک نامعلوم مقدار کے اسقاط پر غور کرو۔ فرض کرو کہ مساواتیں  $f(x) = 0$  اور  $g(x) = 0$  ہیں۔ نیز فرض کرو کہ اگر ممکن ہو تو یہ مساواتیں ایسی شکل میں تحویل کر دی گئی ہیں جس میں  $f(x)$  اور  $g(x)$  دونوں  $x$  کے منطق صحیح تغاقل ہیں۔ چونکہ یہ دونوں تغاقل ایک ساتھ معدوم ہوتے ہیں، اس لئے  $x$  کوئی نہ کوئی ایسی قیمت ضرور ہوگی جو دونوں مساواتوں کو پورا کرے۔ پس حاصل اسقاط اس شرط کو تعبیر کرتا ہے جو کہ ان مساواتوں کے سروں میں ہونی چاہیئے تاکہ ان مساواتوں کی ایک اصل مشترک ہو۔

فرض کرو کہ  $f(x) = 0$  اور  $g(x) = 0$  مساواتیں  $f(x) = 0$  اور  $g(x) = 0$  کی اصلیں ہیں، تب متبادر  $f(x) = 0$  اور  $g(x) = 0$  میں سے کم از کم ایک مقدار ضرور صفر کے مساوی ہوگی، پس حاصل اسقاط مطلوب  $f(x) = 0$  اور  $g(x) = 0$  ہے۔

دائیں طرف کا جملہ مساواتیں  $f(x) = 0$  کی اصلوں کا ایک متشاکل تغاقل ہے اور اس کی قیمت معلوم کرنے کے طریقہ نظریہ معادلات کی کتابوں میں درج ہیں۔

۵۲۹۔ اب ہم عمل اسقاط کے تین عام طریقوں کی تشریح کریں گے۔ ہمارے مقاصد کے لئے صرف ایک آسان مثال حل کرنا کافی ہے لیکن ہم دیکھیں گے کہ ہر صورت میں اس عمل کا اطلاق ہر درجہ کی مساوات پر ہو سکتا ہے۔

ذیل کی مثال میں جو اصول تمثیلاً بیان کیا گیا ہے اُس کو ایسر نے دریافت کیا تھا۔

مثال - ذیل کی مساواتوں میں سے لا کو ساقط کرو

$$\text{اولاً} + \text{ب لا} + \text{ج لا} + \text{د} = \text{و} ، \text{ف لا} + \text{گ لا} + \text{ھ} = \text{۔}$$

فرض کرو کہ

دونوں مساواتوں کی مشترک اصل کے جواب میں جزو ضربی لا + ک ہے اور فرض کرو کہ

$$\text{اولاً} + \text{ب لا} + \text{ج لا} + \text{د} = (\text{لا} + \text{ک}) (\text{اولاً} + \text{ل لا} + \text{م})$$

$$\text{اور} \quad \text{ف لا} + \text{گ لا} + \text{ھ} = (\text{لا} + \text{ک}) (\text{ف لا} + \text{ن})$$

جہاں ک، ل، م، ن نامعلوم مقادیر ہیں۔  
ان مساواتوں سے متماثل طور پر

$$(\text{اولاً} + \text{ب لا} + \text{ج لا} + \text{د}) (\text{ف لا} + \text{ن}) = (\text{اولاً} + \text{ل لا} + \text{م}) (\text{ف لا} + \text{گ لا} + \text{ھ})$$

لا کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$\text{فل} - \text{ون} + \text{وگ} - \text{ب ف} = \text{۔}$$

$$\text{گل} + \text{ف م} - \text{بن} + \text{اھ} - \text{ج ف} = \text{۔}$$

$$\text{ھل} + \text{گ م} - \text{جن} - \text{د ف} = \text{۔}$$

$$\text{۔} = \text{۔} \quad \text{۔} \quad \text{۔} \quad \text{۔}$$

ان مساواتوں میں سے ل، م، ن کو ساقط کرنے سے ذیل کا مقلوعہ حاصل ہوتا ہے

|   |   |   |    |   |   |   |
|---|---|---|----|---|---|---|
| ف | ۔ | ا | وگ | - | ب | ف |
| گ | ف | ب | اھ | - | ج | ف |
| ھ | گ | ج | -  | د | ف |   |
| ۔ | ھ | د |    |   |   |   |

۔ =

۵۳۰۔ مُعادلات ف (لا) = اور فہ (لا) = کا حاصل استقاط سل بسٹر (Sylvester) کے افتراتی طریقہ استقاط سے ایک مقطعہ کی شکل میں آسانی معلوم ہو سکتا ہے۔ ہم گزشتہ مثال ہی کو حل کر بیٹھے۔  
مثال۔ مساوات  $لا + ب لا + ج لا + د = ۰$   
ف لا + گ لا + ہ = ۰

میں سے لا کو ساقط کرو۔

پہلی مساوات کو لا سے اور دوسری مساوات کو بالترتیب لا اور لا سے ضرب دو۔ اس طرح سے ہمیں پانچ مساواتیں حاصل ہونگی جن میں سے ہم چار مقادیر لا، لا، لا اور لا کو ساقط کر سکتے ہیں جن کو مختلف متغیر خیال کیا جاسکتا ہے۔ یہ مساواتیں حسب ذیل ہیں:-

$$\begin{aligned} لا + ب لا + ج لا + د &= ۰ \\ لا + ب لا + ج لا + د لا &= ۰ \\ ف لا + گ لا + ہ &= ۰ \\ ف لا + گ لا + ہ لا &= ۰ \\ ف لا + گ لا + ہ لا &= ۰ \end{aligned}$$

پس حاصل استقاط مطلوبہ یہ ہے:-

$$= \begin{vmatrix} لا & ب & ج & د \\ لا & ب & ج & د \\ ف & گ & ہ & \\ ف & گ & ہ & \\ ف & گ & ہ & \end{vmatrix}$$

۵۳۱۔ ذیل میں جو طریقہ مندرج کیا گیا ہے اسکا اصول بیزاؤٹ (Bezout) نے دریافت کیا تھا۔ اس طریقہ سے ہم حاصل استقاط کو گزشتہ طریقوں کی نسبت مقابلہ چھوٹے درجہ کے مقطعہ میں ظاہر کر سکتے ہیں، اس لحاظ سے یہ طریقہ گزشتہ دفعہ کے دونوں طریقوں پر فوقیت رکھتا

ہے، ہم پھر وہی مثال لینگے جو پہلے حل کی گئی ہے اور عمل استقاط کے لئے کوشش کا طریق عمل درج کریں گے۔

$$\text{مثال۔ مساوات } ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب لا} + ۳ \text{ ج لا} + ۴ \text{ د} = ۰$$

$$\text{مثال۔ مساوات } ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب لا} + ۳ \text{ ج لا} + ۴ \text{ د} = ۰$$

اور

میں سے لا کو ساقط کرو۔

$$\frac{۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب لا} + ۳ \text{ ج لا} + ۴ \text{ د}}{۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب لا} + ۳ \text{ ج لا} + ۴ \text{ د}} = \frac{۱}{۱}$$

$$\frac{۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب لا} + ۳ \text{ ج لا} + ۴ \text{ د}}{۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب لا} + ۳ \text{ ج لا} + ۴ \text{ د}} = \frac{۱}{۱}$$

$$\text{جس سے (اگ - ب ف) لا} + (۱ - ۲ ج) ف - ۳ د = ۰$$

$$\text{اور (۱ - ج ف) لا} + (۲ - ۱ ب) ج - ۳ د = ۰$$

ان دونوں مساواتوں کو ف لا + ۲ ب لا + ۳ ج لا + ۴ د کے ساتھ ملانے سے اور لا اور لا کو مختلف متغیر خیال کرنے سے

$$\begin{array}{c} \text{ف} \quad \text{گ} \quad \text{ه} \\ \text{اگ - ب ف} \quad \text{ا - ج ف} \quad \text{د ف} \\ \text{ا - ج ف} \quad \text{ب - ج گ} \quad \text{د گ} \end{array} = ۰$$

۵۳۲۔ اگر ہمارے پاس دو مساواتیں فہ (لا، ما) = ۰ اور فہ (لا، ما) = ۰ کی شکل کی ہوں تو ہم ما کو گزشتہ طریقوں میں سے کسی ایک طریقہ سے ساقط کر سکتے ہیں۔ اس صورت میں حاصل استقاط لا کا ایک تفاعل ہوگا۔

اگر ہمارے پاس تین مساواتیں ان شکلوں

$$\text{فہ (لا، ما، ی) = ۰، فہ (لا، ما، ی) = ۰، فہ (لا، ما، ی) = ۰}$$

کی ہوں تو پہلی اور دوسری مساواتوں سے ی کو ساقط کرنے سے اور پھر دوسری اور تیسری مساواتوں سے ی کو ساقط کرنے سے ہیں دو مساواتیں

اس شکل



سب (لا، ما) = . اور سب (لا، ما) = .  
 کی ملتی ہیں۔ اگر ہم ان مساواتوں سے ما کو ساقط کریں تو ہمیں ایک حاصل  
 ف (لا) = . کی شکل کا ملیگا۔

اس قسم کے استدلال سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ہم ن + ا  
 مساواتوں میں سے ن متغیروں کو ساقط کر سکتے ہیں۔  
 ۵۳۳۔ عمل اسقاط کے متعلق جو عام طریقے اوپر بیان ہوئے ان سے اکثر  
 اوقات استفادہ کیا جاسکتا ہے لیکن اس طرح سے جو حاصل اسقاط ملینگے  
 وہ شاذ و نادر ہی سادہ ترین شکل میں ہونگے۔ اکثر اوقات مساواتوں کو  
 دیکھنے سے ہی خود بخود اسقاط کے کسی خاص طریقہ کا پتا چل جاتا ہے  
 اس کی تشریح ذیل میں کی جاتی ہے:-  
 مثال ۱۔ ذیل کی مساواتوں

$$ل + ا + م = ما = ۱، م - لا - ل = ما = ب + ا + م = ۱$$

سے ل اور م کو ساقط کرو۔

پہلی دو مساواتوں کا مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$ل^۲ + ا^۲ + م^۲ + لا + ام + مال = لا^۲ + ما^۲ = ب^۲ + ا^۲ + م^۲$$

$$\text{یعنی } (ل + ا + م)^۲ = (لا + ما)^۲ = ب^۲ + ا^۲ + م^۲$$

$$\text{پس حاصل اسقاط مطلوبہ } لا^۲ + ما^۲ = ب^۲ + ا^۲ + م^۲$$

اگر ل = جم طہ اور م = جب طہ تو فیصدی مساوات متماثل طور پر پوری ہوتی ہے

$$\text{یعنی لاجم طہ + ماجب طہ = لا لاجب طہ - ماجم طہ = ب کا حاصل اسقاط}$$

$$لا + ما = ب + ا + م$$

$$\text{مثال ۲۔ مساوات } ما + ی = ام + ی، ی + لا = ب + ی، لا + ما = ج + لا$$

سے (لا، ما، ی) ساقط کرو۔

ان مساواتوں سے  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ،  $\frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ،  $\frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$  ج

ان تینوں مساواتوں کو ضرب دینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:-

$$2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{o} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$\text{پس } 2 + (2 - \frac{1}{a}) + (2 - \frac{1}{b}) + (2 - \frac{1}{c}) = 2 + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{o} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$\therefore 2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{o} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

مثال ۳۔ مساوات  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ،  $\frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ،  $\frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$  سے  $\frac{1}{a}$  کو ساقط کرو۔

پہلی مساوات کو  $\frac{1}{a}$  سے اور دوسری کو  $\frac{1}{b}$  سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$$

اس لئے تیسری مساوات سے

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

اسی طرح سے  $\frac{1}{c} = \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$

$$\text{پس } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \text{ اور } \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{o} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{o} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

مثال ۴۔ مساوات  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ،  $\frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ،  $\frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$  سے

$\frac{1}{a}$  کو ساقط کرو۔

$$\frac{(لا-ما)(ی-لا) + (ی-لا)(لا-ما)}{لا\text{ما}ی} =$$

$$\frac{(ما-ی)(ی-لا) + (ی-لا)(لا-ما)}{لا\text{ما}ی} =$$

اگر ہم لاکھ علامت بدلیں تو ب اور ج کی علامتیں بدل جاتی ہیں لیکن لا کی علامت نہیں بدلتی۔

$$\frac{(ما-ی)(ی+لا) + (ی+لا)(لا-ما)}{لا\text{ما}ی} =$$

$$\frac{(ما+ی)(ی-لا) + (ی-لا)(لا+ما)}{لا\text{ما}ی} =$$

$$\frac{(ما+ی)(ی+لا) + (ی+لا)(لا-ما)}{لا\text{ما}ی} =$$

$$\frac{(لا+ما)(ی+لا) + (ی+لا)(لا-ما)}{لا\text{ما}ی} =$$

$$\frac{(ما+ی)(ی+لا) + (ی+لا)(لا-ما)}{لا\text{ما}ی} =$$

### امثلہ ۳۳ (ج)

- ۱۔ مساوات  $م^۲ - لا - م + ما = ۰$  سے  $م + ما = لا$  سے  $م$  کو ساقط کرو۔
- ۲۔ مساوات  $م^۲ - لا - م + ما = ۰$  سے  $ن - لا - ن + ما = ۰$  سے  $م + ن = لا$  میں سے  $م$  اور  $ن$  کو ساقط کرو۔
- ۳۔ مساوات  $م - لا - م = ۰$  سے  $ن - لا - م = ۰$  سے  $م + ن = لا$  میں سے  $م$  اور  $ن$  کو ساقط کرو۔

۴۔ معادلات  $ف + ق + ر = ۱$ ،  $ا(ق + ر + ف + ق) = ۲ - ۱ = ۱$ ۔ لا

ا ف ق ر = ۱ ، ق ر = ۱ - ۱

میں سے ف، ق، ر کو ساقط کرو۔

۵۔ معادلات  $ا - ۱ = ۲$ ،  $۲ - ۱ = ۱$ ،  $۱ + ۲ = ۳$ ،  $۳ - ۱ = ۲$ ۔ میں سے لا کو ساقط کرو۔

۶۔ معادلات  $ا + م = ۱$ ،  $ا(۱ + م) = ۱$ ،  $م - ۱ = ۱$ ،  $ا(۱ - م) = ۱$  میں سے م کو ساقط کرو۔

۷۔ معادلات  $ا + ی = ۱$ ،  $ا(۱ + ی) = ۱$ ،  $ی - ۱ = ۱$ ،  $ا(۱ - ی) = ۱$  میں سے لا، ا، ی کو ساقط کرو۔

۸۔ معادلات  $ا(ف + ق) = ۱$ ،  $ا(ف - ق) = ۱$ ،  $ا(۱ + ف + ق) = ۱$ ،  $ا(۱ - ف - ق) = ۱$  میں سے ف، ق کو ساقط کرو۔

۹۔ معادلات  $ا - ۱ = ۲$ ،  $۲ - ۱ = ۱$ ،  $۱ + ۲ = ۳$ ،  $۳ - ۱ = ۲$  میں سے لا، ا کو ساقط کرو۔

۱۰۔ معادلات  $ا + م = ۱$ ،  $ا(۱ + م) = ۱$ ،  $م - ۱ = ۱$ ،  $ا(۱ - م) = ۱$  میں سے لا، ا کو ساقط کرو۔

۱۱۔ معادلات  $ا + ب + ج + ی = ۱$ ،  $ا(۱ + ب + ج + ی) = ۱$ ،  $ب + ج + ی - ۱ = ۱$ ،  $ا(۱ - ب - ج - ی) = ۱$  میں سے لا، ا، ب، ج، ی کو ساقط کرو۔

۱۲۔ معادلات  $ا + م + ی = ۱$ ،  $ا(۱ + م + ی) = ۱$ ،  $م + ی - ۱ = ۱$ ،  $ا(۱ - م - ی) = ۱$  میں سے لا، ا، م، ی کو ساقط کرو۔

$ا + م + ی = ۱$ ،  $ا(۱ + م + ی) = ۱$ ،  $م + ی - ۱ = ۱$ ،  $ا(۱ - م - ی) = ۱$

میں سے لا، ا، م، ی کو ساقط کرو۔

۱۳۔ معادلات  $ا + م + ی = ۱$ ،  $ا(۱ + م + ی) = ۱$ ،  $م + ی - ۱ = ۱$ ،  $ا(۱ - م - ی) = ۱$

$$\frac{۱}{ا} = \frac{۱}{ب} + \frac{۱}{ج} + \frac{۱}{د}، \frac{۱}{ب} = \left(\frac{۱}{ا} + \frac{۱}{ج}\right) \left(\frac{۱}{د} + \frac{۱}{ی}\right)$$

$$ج = \left(\frac{۱}{ا} + \frac{۱}{د}\right)$$



# پینتیسواں باب

## نظریہ مساوات

۵۳۴۔ باب ہفتم میں ہم مساوات درجہ دوم کے سروں اور اصلوں کے چند باہمی روابط ثابت کر چکے ہیں۔ یہاں ہم پہلے ن دس درجہ کی مساواتوں کی صورت میں اسی قسم کے روابط معلوم کرینگے اور پھر مساواتوں کے عام نظریہ کے چند ابتدائی خواص پر بحث کرینگے۔

۵۳۵۔ فرض کرو کہ  $ف^۱ لا^۱ + ف^۲ لا^۲ + ف^۳ لا^۳ + \dots + ف^n لا^n + ف^{n+۱}$  لاکا ایک ن ابعاد کا منطق صحیح تفاعل ہے، اس کو ف (لا) سے تعبیر کرو، تب ف (لا) = ن دس درجہ کی منطق صحیح مساوات کا ایک عام نمونہ ہے۔ اس کی سب رفتوں کو فہ پر تقسیم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ عمومیت میں کسی طرح خارج ہونے بغیر مساوات

$$لا^۱ + ف^۱ لا^۱ + ف^۲ لا^۲ + \dots + ف^n لا^n + ف^{n+۱} = ف^{n+۱}$$

کو کسی درجہ کی ایک منطق صحیح مساوات کے نمونہ کے طور پر لیا جاسکتا ہے۔ اگر اس کے برعکس نہ بیان کیا گیا ہو تو سروں  $ف^۱، ف^۲، \dots، ف^n$  کو ہمیشہ منطق تصور کیا جائیگا۔ ۵۳۶۔ لا کی کوئی قیمت جس سے ف (لا) صفر ہو جائے مساوات ف (لا) = ۰ کی اصل کہلاتی ہے۔

دفعہ ۵۱۴ میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ جب ف (لا) کو لا = ۱ پر تقسیم کیا جائے تو باقی ف (۱) بچتی ہے، پس اگر ف (لا) لا = ۱ پر پورا تقسیم ہو جائے اور باقی کچھ نہ بچے تو مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل ۱ ہوگی۔

۵۳۷۔ ہم یہاں یہ تسلیم کر لیں گے کہ ف (لا) = ۰ کی شکل کی ہر ایک مساوات کی ایک اصل ضرور ہے۔ خواہ یہ اصل حقیقی ہو یا خیالی۔ اس مسئلہ کا ثبوت نظریہ

تساویات کی کتابوں میں مل سکتا ہے اور کتاب مذ کی حدود سے باہر ہے۔  
۵۳۸۔ ن۔ وین درجہ کی ہر مساوات کی ن اصلیں ہوتی ہیں اس سے زیادہ  
نہیں ہو سکتیں۔

مساوات مفروضہ کو ف (لا) = سے تعبیر کرو جہاں

ف (لا) = قبل لا + فم لا<sup>۱</sup> + فم لا<sup>۲</sup> + ..... + فم

اب مساوات ف (لا) = کی ایک اصل (خیالی یا حقیقی) ہے، فرض کرو کہ  
یہ اصل لم ہے، تب ف (لا) پورا تقسیم ہو سکتا ہے لا۔ لم پر، یعنی

ف (لا) = (لا۔ لم) (فم۔ لا)

جہاں فم (لا) ن۔ ۱ وین ابعاد کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے، اب پھر مساوات  
فم (لا) کی ایک حقیقی یا خیالی اصل ہے، اس اصل کو لم سے تعبیر کرو، تب فم (لا)  
لا۔ لم پر پورا تقسیم ہو جائیگا۔ یعنی

فم (لا) = (لا۔ لم) (فم۔ لا)

جہاں فم (لا) ن۔ ۲، ابعاد کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے

لہذا ف (لا) = (لا۔ لم) (لا۔ لم) (فم۔ لا)

اسی طرح سے ہمیں دفعہ ۳۰۹ کی مانند حاصل ہوتا ہے:

ف (لا) = فم (لا۔ لم) (لا۔ لم) ..... (لا۔ لم)

پس مساوات ف (لا) = کی ن اصلیں ہیں کیونکہ ف (لا) معدوم  
ہو جاتا ہے جبکہ لا کی قیمت لم، لم، لم ..... لن میں سے کسی ایک کے مساوی ہو  
نیز مساوات بلا کی اصلیں ن سے زیادہ نہیں ہو سکتیں کیونکہ اگر متغیر  
لم، لم، لم ..... لن کے علاوہ لا کی کوئی اور قیمت ہو تو بائیں جانب کے





$$= \frac{f_n}{f_0} + \frac{f_{n-1}}{f_0} + \dots + \frac{f_1}{f_0} + \frac{f_0}{f_0}$$

اور دفعہ ۵۲۱ کی ترقیم کی رو سے

$$\Sigma_{i=1}^n \frac{f_i}{f_i} = \Sigma_{i=1}^n \frac{f_i}{f_i} = \Sigma_{i=1}^n 1 = n$$

واجب ج..... ک = (۱ - ۵) فن فن

مثال ۱۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

ان مساواتوں سے ہم دیکھتے ہیں کہ 'ا'ب' ج مقدرات کی قیمتیں ہیں جو کبھی مساوات

ت۳۔ ی ت۲۔ و ات۔ لا = ۰

کو پورا کرتی ہیں۔

اسی لئے ی = ا + ب + ج ، ما = - (ب ج + ج ا + ا ب) ' لا = ا ب ج

مثال ۲۔ اگر مساوات  $لا^۳ + فہ^۲ + فہ^۱ + فہ^۰ =$  کی اصلیں  $۱، ۲، ۳$  ج ہوں تو ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں  $۱، ۲، ۳$  ج ہوں۔

مسافات مطلوبه یہ ہیں: (۱-۱) (۱-۲) (۱-۳) (۲-۱) (۲-۲) (۲-۳) (۳-۱) (۳-۲) (۳-۳) =

یا (و' - و') (و' - ب') (و' - ج') = اگر ۱ = و'

یعنی  $(1-a)(1-b)(1-c)(1+d)(1+e)(1+f) = 1$

لیکن (لا-ا) (لا-ب) (و-ج) = لا+فم لا+فم لا+فم

المستعمل (لا + و) (لا + ب) (لا + ج) = لا<sup>٢</sup> - فم لا + فم لا - فم

پس مساوات مطلوب یہ ہے :-

$$(لا^۳ + فم^۳ لا^۲ + فم^۳ لا) (لا^۲ - فم^۲ لا^۲ + فم^۲ لا - فم^۲) = .$$

$$یا (لا^۲ + فم^۲ لا^۲) - (فم^۲ لا^۲ + فم^۲) = .$$

$$یا لا^۲ + (۲ فم^۲ - فم^۲) لا^۲ + (فم^۲ - ۲ فم^۲ فم^۲) لا^۲ - فم^۲ = .$$

اور اگر ہم لا کی بجائے ما رکھیں تو

$$ما^۲ + (۲ فم^۲ - فم^۲) ما^۲ + (فم^۲ - ۲ فم^۲ فم^۲) ما - فم^۲ = .$$

۵۴۔ شاید طالب علم یہ خیال کرے کہ دفعتاً قبل کے روابط ہر مفروضہ مساوات کے حل کرنے میں مدد دے سکتے ہیں کیونکہ روابط کی تعداد اصلوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہو جائیگا کہ دراصل ایسا نہیں ہے۔ فرض کرو کہ ہم پہلے متادیر ۱، ب، ج، .....، گ میں سے ن۔ ۱ متادیر کو ساقط کرتے ہیں اور اس طرح سے باقی ماندہ ایک مقدار کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ایک مساوات حاصل کرتے ہیں۔ تب چونکہ یہ متادیر ہر مساوات میں متماثل طور پر شامل ہوتی ہیں، اس لئے ظاہر ہے کہ محصلہ مساوات میں ہر صورت میں سرورھی ہو گئے۔

اس لئے یہ مساوات دراصل ابتدائی مساوات ہی ہو گی جبکہ اصلوں ۱، ب، ج، .....، گ میں سے کسی ایک اصل کو لا کی بجائے لکھا جائے ہم مثال کے طور پر مساوات ذیل پر غور کرتے ہیں۔

$$لا^۳ + فم^۳ لا^۲ + فم^۳ لا + فم^۳ = .$$

فرض کرو کہ اس کی اصلیں ۱، ب، ج، ہیں، تب

$$۱ + ب + ج = فم^۳$$

$$۱ ب + ۱ ج + ب ج = فم^۳$$

$$۱ ب ج = فم^۳$$



- ۳ - ج ۲ - ۱ ا

$$\frac{25}{12} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} \quad \text{ب} \quad \frac{1}{4} = \frac{3}{12} = 1\frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$$

۲) اب = -  $\frac{1}{9}$  کو پورا نہیں کرتیں، اس لئے ہمارے پاس صرف یہ دو نمائشیں

۱۔  $\frac{5}{7}$  اور ۲۔  $\frac{3}{4}$  = ب =  $\frac{5}{7}$

۲۰ باقی ہیں۔ لہذا مطلوبہ اصلیں ۳، ۴، ۵ - ۶ ہیں۔

۵۴۲۔ اگرچہ یہ ممکن ہے کہ ہم دفعہ ۵۳۹ کے روابط سے کسی مساوات کی اصلیں معلوم نہ کر سکیں لیکن ہم ان روابط کو اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کی قیمتیں معلوم کرنے میں استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ مساوات لائے  $f + 2 = 3$  -  $2 = 3$  - کی اصلوں کے مربعوں اور مکعبوں کے حاصل جمع معلوم کرو۔

فرض کر دے کہ اصلیں ۱، پ اور ج ہیں، تب

۱ + ب + ج = ف اور ب + ج + ۱ = ق

اب و<sup>۱</sup>ب<sup>۲</sup>ج<sup>۳</sup> = (۱ + ب + ج) = - (ب + ج + ۱) = (ب + ج + ۱ + ب)

ف' - ۲ ق

نیز مساوات مفروضہ میں لاکھ بجائے بالترتیب 'ا' ب 'ج' لکھنے اور جمع کرنے سے

$$0 = ۳ - (ج + ب + ۱) ق + (ج + ب + ۱) ف - ج + ب + ۱$$

$$١٠ \quad \text{ج}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{ا}^٢ = \text{ف}(\text{ف}^٢ - \text{ق}^٢) - \text{ف} \text{ق} + \text{ر}^٣$$

$$= \text{ف}^2 - 3\text{ف} + 3$$

مثال ۲۔ اگر مساوات  $لا + ف + لا + ق + لا + س =$  کی اصلیں  $ا، ب،$

ج' د ہوں تو ج' اب کی قیمت معلوم کرو

(۱) یہاں د + ب + ج + د = ف

(۲)  $ق = دج + دپ + جپ + دا + جا + اب$

(۳)  $ابج + باج + جاب + جبا + ابا + ابا + ج - ر$

ان ساداتوں سے - ف ق = ۳ (و ب ج + و ب د + و ج د + ب ج د)



کی قیاس معلوم کرو۔

۱۹۔ اگر  $ا، ب، ج$  مساوات  $ا^۲ + ق + لا + ر = ۰$  کی اصلیں ہوں تو

$$(۱) (ب - ج + ا^۲) + (ج - ا + ا^۲) + (ا - ب + ا^۲) + (ب + ج - ا + ا^۲) + (ج + ا - ب + ا^۲) + (ا + ب - ج + ا^۲)$$

۲۰۔ مساوات  $ا^۲ + ق + لا + ر + لا + س = ۰$  کی اصلوں کے مربعوں اور مکعبوں کے حاصل جمع معلوم کرو۔

۲۱۔ مساوات  $ا^۲ + ق + لا + ر = ۰$  کی اصلوں کی چوتھی قوتوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔  
۲۲۔ حقیقی سروں والی مساوات میں خیالی اصلوں کے زوج واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ  $ف(لا) = ۰$  حقیقی سروں والی ایک مساوات سے  
اور اس کی ایک خیالی اصل  $ا + خ ب$  ہے، ہم ثابت کریں گے کہ  
۱۔  $خ ب$  بھی اس کی ایک اصل ہوگی۔

ان دو اصلوں کے متناظر  $(لا)$  کا جزو ضربی یہ ہے:-

$$(لا - ا - خ ب)(لا - ا + خ ب) یا (لا - ا)^۲ + ب^۲$$

$ف(لا)$  کو  $(لا - ا)^۲ + ب^۲$  پر تقسیم کرو اور فرض کرو کہ خارج قسمت  $بق$  ہے  
اور باقی (اگر کوئی ہے تو)  $ب(لا + ا)$  ہے

$$تب \quad ف(لا) = ق \{ (لا - ا)^۲ + ب^۲ \} + ب(لا + ا)$$

اس مساوات متانکہ میں  $لا = ا + خ ب$  رکھو، تب  $ف(لا) = جب$

معطیات معدوم ہو جاتا ہے، نیز  $(لا - ا)^۲ + ب^۲ = ۰$  اسلئے  $ب(ا + خ ب) + ب = ۰$ ۔  
حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی کرنے سے

$$ب(ا + ب) = ۰ \quad اور \quad ب(ب) = ۰$$

لیکن معطیات کی رو سے  $ب$  صفر نہیں ہے



سے حاصل ہوتی ہیں۔ لہذا مطلوبہ اصلیں یہ ہیں۔

$$-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, (2 + \sqrt{3}), (2 - \sqrt{3})$$

مثال ۲۔ منطوق سروں کی ایک مساوات درجہ چہارم بناؤ جس کی ایک اصل  $\sqrt{3} + 2$  ہو۔  
 حل۔ ہو گا ہر ہے کہ اصلوں کا ایک زوج  $\sqrt{3} + 2$  اور  $\sqrt{3} - 2$  ہوگا اور دوسرا زوج  $-\sqrt{3} + 2$  اور  $-\sqrt{3} - 2$  ہوگا۔

پہلے زوج کے متناظر درجہ دوم کا ایک جزو ضربی لا<sup>۲</sup> - ۲ + ۲ لا + ۵ اور دوسرے زوج کے متناظر درجہ دوم کا ایک جزو ضربی لا<sup>۲</sup> + ۲ + ۲ لا + ۵ ہے پس مطلوبہ مساوات یہ ہے۔

$$(لا^۲ + ۲ + ۲ لا + ۵)(لا^۲ - ۲ + ۲ لا + ۵) = ۰$$

$$یعنی (لا^۲ + ۵) - ۲(لا) = ۰$$

$$لا^۲ + ۲ لا + ۵ = ۰$$

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{1}{لا-۱} + \frac{۲}{لا-۲} + \frac{۳}{لا-۳} + \dots + \frac{۲۰۰}{لا-۲۰۰} = \frac{۲۰۰}{لا-۲۰۰}$$

کی کوئی خیالی اصل نہیں۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ف + خ ق ایک اصل ہے، تب ف - خ ق بھی ایک اصل ہے، لاکہ بجائے یہ قیمتیں درج کر دو اور پہلے نتیجہ کو دوسرے نتیجہ میں سے تفریق کرو، تب

$$ق = \frac{۱}{(ف-۱) + (خ-۱)} + \frac{۲}{(ف-۲) + (خ-۲)} + \frac{۳}{(ف-۳) + (خ-۳)} + \dots + \frac{۲۰۰}{(ف-۲۰۰) + (خ-۲۰۰)}$$

اور یہ ممکن نہیں تا وقتیکہ ق = -

۳۴۵۔ مساوات کی بعض اصلوں کی نوعیت معلوم کرنے کے لئے ہمیشہ



ضروری نہیں ہوتا کہ مساوات مذکور کو حل کیا جائے۔ ذیل کے امور کی صحت از خود واضح اور یقین ہے۔

(۱) اگر سب مثبت ہوں تو مساوات کی کوئی اصل مثبت نہیں ہو سکتی مثلاً مساوات  $لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ = ۱$  کی کوئی اصل مثبت نہیں ہے۔  
(۲) اگر لا کی جنت قوتوں کے سب یکساں علامت کے ہوں اور طاق قوتوں کے سب مختلف علامتوں کے ہوں تو مساوات کی کوئی منفی اصل نہیں ہو سکتی۔ مثلاً مساوات

$$لا + لا^۲ - لا^۳ + لا^۴ - لا^۵ = ۰$$

کی کوئی اصل منفی نہیں ہے۔

(۳) اگر مساوات میں لا کی صرف جنت قوتیں ہوں اور سب سب ایک ہی علامت کے ہوں تو مساوات کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہوتی، مثلاً مساوات  $لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ = ۰$  کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے۔

(۴) اگر کسی مساوات میں لا کی صرف طاق قوتیں ہوں اور سب سب ایک ہی علامت کے ہوں تو مساوات کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہوتی سوائے  $لا = ۰$  مثلاً مساوات  $لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ = ۰$  کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے سوائے  $لا = ۰$  کے۔

متذکرہ بالا گلی نتیجے اگلی دفعہ کے مسئلہ میں شامل ہیں، اس مسئلہ کو ڈی کارٹی (Descarte) کی علامتوں کا قانون کہتے ہیں۔

۶۔ مساوات  $ف(لا) = ۰$  کی زیادہ سے زیادہ اتنی مثبت اصلیں ہو سکتی ہیں جتنی کہ  $ف(لا)$  میں علامتوں کی تبدیلیاں ہیں اور زیادہ سے زیادہ اتنی منفی علامتیں ہو سکتی ہیں جتنی کہ  $ف(-لا)$  میں علامتوں کی تبدیلیاں ہیں فرض کرو کہ ایک کنیٹر الارقام جملہ کی رقوم کی علامتیں  $+++ + - - -$  ہیں۔ ہم یہ دیکھیں گے کہ اگر اس کنیٹر الارقام جملہ کو ایک جملہ ثنائی

سے جسکی علامتیں ++ ہوں ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب میں علامتوں کی تبدیلیوں کی جو تعداد ہوگی وہ ابتدائی جملہ کثیر الارقام کی علامتوں کی تبدیلیوں سے کم از کم ایک زیادہ ہوگی۔  
 اس ضرب میں رقموں کی محض علامتیں درج کرنے سے

- + - + - - - + - - - + +

- +

- + - + - - - + - - - + +

+ - + - + + + - + + - -

+ - + - + + + - + + - - + +

ابتدائی جملہ اور حاصل ضرب کی علامتوں کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ (۱) ابتدائی جملہ میں جب کوئی علامت مسلسل آتی ہے تو ہر تسلسل کے جواب میں حاصل ضرب میں مشتبہ علامت ہوتی ہے  
 (۲) مشتبہ علامت یا مشتبہ علامتوں کے پہلے اور بعد کی علامتیں مختلف ہیں۔

(۳) آخر میں علامت کی ایک مزید تبدیلی واقع ہوتی ہے۔  
 اب سب سے زیادہ ناموافق صورت پر غور کرو فرض کرو کہ سب مشتبہ علامتوں کی بجائے تسلسل بنادئے گئے ہیں، تب (۲) سے ظاہر ہے کہ خواہ ہم مشتبہ علامتوں کو اوپر کی علامتوں میں تبدیل کریں یا نیچے کی علامتوں میں، دونوں صورتوں میں علامتوں کی تبدیلیوں کی تعداد ایک ہی ہے۔ اوپر کی علامتیں لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ علامتوں کی تبدیلیوں کی تعداد

+ - + - + - - - + - - - + +

کی تبدیلیوں کی تعداد سے کم نہیں ہو سکتی اور علامتوں کا یہ سلسلہ وہی ہے جو ابتدائی کثیر الارقام کا سلسلہ ہے سوائے اس کے آخر میں علامت کی ایک مزید تبدیلی واقع ہوتی ہے۔

پس اگر ہم فرض کریں کہ منفی اور خیالی اصلوں کے متناظر اجزائے ضربی پہلے ضرب دئے جا چکے ہیں تو ظاہر ہے کہ محصلہ جملہ کو جزو ضربی

لا۔ ۱ سے ضرب دینے سے (جو ایک مثبت اصل کو تعبیر کرتا ہے) آخری حاصل ضرب میں کم از کم ایک مزید تبدیلی علامات پیدا ہوگی۔ پس کسی مساوات کی مثبت اصلیں زیادہ سے زیادہ ہوتی ہو سکتی ہیں جتنی کہ اس میں علامتوں کی تبدیلیاں ہیں۔

نیز مساوات ف۔ لا = کی اصلیں ف۔ لا = کی اصلوں کے مساوی سین ختف علامت ہیں۔ اسلئے مساوات ف۔ لا = کی منفی اصلیں ف۔ لا = کی مثبت اصلیں ہیں۔ لیکن ان مثبت اصلوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ ہوتی ہو سکتی ہے جتنی کہ ف۔ لا = میں علامتوں کی تبدیلیاں ہیں یعنی ف۔ لا = کی منفی اصلوں کی تعداد ف۔ لا = کی علامتوں کی تبدیلیوں کی تعداد سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔

مثال۔ مساوات لا + ۵ لا - لا + ۷ لا + ۲ = ۰ پر غور کرو۔  
اس میں علامتوں کی صرف دو تبدیلیاں ہیں۔ اس لئے مثبت اصلیں زیادہ سے زیادہ دو ہو سکتی ہیں۔

نیز ف۔ لا = لا + ۵ لا + لا - لا + ۲ = ۰

اس میں علامتوں کی صرف تین تبدیلیاں ہیں، اس لئے مفروضہ مساوات کی منفی اصلیں زیادہ سے زیادہ تین ہو سکتی ہیں۔ اس لئے لا + ۵ لا + لا - لا + ۲ = ۰

مثلاً نمبری ۳۵ (ب)

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$۱ - ۳ لا - ۱۰ لا + ۳ لا - لا - ۶ = ۰ \text{ جبکہ ایک اصل } \frac{۳ - لا}{۲} \text{ ہو}$$

$$۲ - ۶ لا - ۳ لا - ۳۵ لا - لا + ۳ = ۰ \text{ جبکہ ایک اصل } ۲ - لا \text{ ہو}$$

$$۳ - لا + ۳ لا + ۵ لا + ۲ لا - ۲ لا - ۲ = ۰ \text{ جبکہ ایک اصل } ۱ - لا \text{ ہو}$$

۳۔ لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> = ۵۔ جبکہ ایک اصل لا<sup>۱</sup> ہو  
 ۵۔ سادات لا<sup>۱</sup>۔ لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> = ۱۵۔ جبکہ ایک اصل لا<sup>۱</sup> ہو  
 دوسری ۱۔ لا<sup>۲</sup>۔ لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> = ۱۵۔ جبکہ ایک اصل لا<sup>۲</sup> ہو  
 ہوں اور جسکی اصلوں میں سے ایک اصل یہ ہو۔

$$۶۔ لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> = ۱۵۔ جبکہ ایک اصل لا<sup>۱</sup> ہو$$

$$۷۔ لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> = ۱۵۔ جبکہ ایک اصل لا<sup>۱</sup> ہو$$

$$۸۔ لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> = ۱۵۔ جبکہ ایک اصل لا<sup>۱</sup> ہو$$

$$۹۔ لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> = ۱۵۔ جبکہ ایک اصل لا<sup>۱</sup> ہو$$

$$۱۰۔ لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> = ۱۵۔ جبکہ ایک اصل لا<sup>۱</sup> ہو$$

$$۱۱۔ لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> = ۱۵۔ جبکہ ایک اصل لا<sup>۱</sup> ہو$$

$$۱۲۔ لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> = ۱۵۔ جبکہ ایک اصل لا<sup>۱</sup> ہو$$

$$۱۳۔ لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> = ۱۵۔ جبکہ ایک اصل لا<sup>۱</sup> ہو$$

$$۱۴۔ لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> = ۱۵۔ جبکہ ایک اصل لا<sup>۱</sup> ہو$$

$$۱۵۔ لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> = ۱۵۔ جبکہ ایک اصل لا<sup>۱</sup> ہو$$

(۱) دو اصلیں مساوی اور مختلف علامت ہوں

(۲) اصلیں ملکہ ہندسیہ میں ہوں

$$۱۸۔ اگر سادات لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> = ۱۵۔ جبکہ ایک اصل لا<sup>۱</sup> ہو$$

$$۱۹۔ اگر سادات لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> = ۱۵۔ جبکہ ایک اصل لا<sup>۱</sup> ہو$$

تو ثابت کر دو کہ  $f^2 = z$

۱۹۔ اگر مساوات لا<sup>۱</sup>۔ ۱ = کی اصلیں،  $z = 1 + j$ ،  $z = 1 - j$ ،  $z = 1 + j^2$ ،  $z = 1 - j^2$  ہوں تو ثابت کر دو کہ

$$(1 - j)(1 + j)(1 - j^2)(1 + j^2) = 1$$

اگر مساوات لا<sup>۲</sup>۔  $f^2 + f + 1 = 0$  کی اصلیں  $1 + j$ ،  $1 - j$  ہوں تو ذیل کی مقادیر کی قیمتیں معلوم کرو۔

$$20 - \sum (1 + j) \quad 21 - \sum (1 + j^2)$$

$$22 - \sum (1 + j + j^2) \quad 23 - \sum (1 + j)$$

اگر مساوات لا<sup>۳</sup>۔  $f^3 + f^2 + f + 1 = 0$  کی اصلیں  $1 + j$ ،  $1 - j$  ہوں تو ذیل کی مقادیر کی قیمتیں معلوم کرو۔

$$24 - \sum (1 + j) \quad 25 - \sum (1 + j^2)$$

۲۶۔  $f^4 + f^3 + f^2 + f + 1 = 0$  کی قیمت معلوم کرو جہاں  $f^4 + f^3 + f^2 + f + 1 = 0$  کا کوئی منطق صحیح متقابل ہے۔  
فرض کر دو کہ  $f^4 + f^3 + f^2 + f + 1 = 0$

$$f^4 + f^3 + f^2 + f + 1 = 0$$

$$f^4 + f^3 + f^2 + f + 1 = 0 \quad f^4 + f^3 + f^2 + f + 1 = 0$$

$$f^4 + f^3 + f^2 + f + 1 = 0$$

سب رقموں کو بذریعہ مسئلہ نشانی پھیلائے اور جواب کو  $h$  کی صعودی قوتوں کی ترتیب میں لکھئے

$$f^4 + f^3 + f^2 + f + 1 = 0 \quad f^4 + f^3 + f^2 + f + 1 = 0$$



$$\text{فا} (لا + ه) = \text{فا} (ه) + لا \text{فا} (ه) - لا^2 \text{فا} (ه) + \dots + لا^n \text{فا} (ه)$$

جہاں فا (ه) فا (ه) فا (ه) ... سے وہ نتیجے مراد ہیں جو متواتر مشتق  
تفاضلوں فا (لا) فا (لا) فا (لا) میں لا کی بجائے ه رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں۔  
مثال - اگر فا (لا) = ۲ لا - لا^۲ - لا^۳ + لا^۵ - لا^۱ تو فا (لا + ه) کی قیمت معلوم کرو۔

$$\text{یہاں فا} (لا) = ۲ لا - لا^۲ - لا^۳ + لا^۵ - لا^۱ \text{ یعنی فا} (۳) = ۱۳۱$$

$$\text{فا} (لا) = ۸ لا^۳ - لا^۲ - لا + ۵ \text{ اور فا} (۳) = ۱۸۲$$

$$\frac{\text{فا} (لا)}{لا} = \frac{۱۲ لا^۲ - لا - ۲}{لا} \text{ اور فا} (۳) = ۹۷$$

$$\frac{\text{فا} (لا)}{لا^۲} = \frac{۱ - لا}{لا^۲} \text{ اور فا} (۳) = ۲۳$$

$$۲ = \frac{\text{فا} (لا)}{لا^۲}$$

$$\text{پس فا} (لا + ه) = ۲ لا^۳ + ۲۳ لا^۲ + ۹۷ لا + ۱۸۲ + ۱۳۱$$

مندرجہ بالا قیمت ہارنر (Horner) کے طریقے سے زیادہ آسانی سے معلوم کی جاسکتی ہے۔

یہ طریقہ ذیل میں درج کیا جاتا ہے:-

$$۵۴۹ - \text{فرض کرو کہ فا} (لا) = \text{ف} لا^۵ + \text{ف} لا^۴ + \text{ف} لا^۳ + \text{ف} لا^۲ + \text{ف} لا + \text{ف} = ۵۴۹$$

رکھو لا = ما + ه اور فرض کرو کہ فا (لا) ہو جاتا ہے:-

$$\text{ق} ما^۵ + \text{ق} ما^۴ + \text{ق} ما^۳ + \text{ق} ما^۲ + \text{ق} ما + ق$$

اب چونکہ ما = لا - ه اس لئے ہیں ذیل کی مساوات متبادلہ حاصل ہوتی ہے:-

$$\text{ف} لا^۵ + \text{ف} لا^۴ + \text{ف} لا^۳ + \text{ف} لا^۲ + \text{ف} لا + \text{ف} = ۵۴۹$$

$$= \text{ق} (لا - ه)^۵ + \text{ق} (لا - ه)^۴ + \text{ق} (لا - ه)^۳ + \text{ق} (لا - ه)^۲ + \text{ق} (لا - ه) + ق$$

اس لئے ق باقی ہے جو فا (لا) کو لا-ھ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔  
نیز عمل تقسیم سے جو خارج قسمت حاصل ہوتا ہے وہ یہ ہے:-

$$ق (لا-ھ) + ق (لا-ھ) + ..... + ق-۱$$

اسی طرح سے ق باقی بنتی ہے جبکہ مندرجہ بالا جملہ کو لا-ھ پر تقسیم

کیا جائے اور اس عمل تقسیم سے جو خارج قسمت حاصل ہوتا ہے وہ یہ ہے:-

$$ق (لا-ھ) + ق (لا-ھ) + ..... + ق-۲$$

اور علیٰ ہذا القیاس، پس ق، ق-۱، ق-۲، ..... کی قیمتیں حسب شکلیہ دفعہ ۵۱۵  
نکل سکتی ہیں۔ آخری خارج قسمت ق ہے اور صریحاً شب کے مساوی ہے

$$\text{جملہ } ۲ \text{ زائد } ۲ \text{ لا } ۲ \text{ لا } ۵ + ۱$$

میں لا کو لا+۳ میں بدل دینے سے کیا حاصل ہوتا ہے۔  
یہاں ہم بالتواتر لا-۳ پر تقسیم کرتے ہیں۔

یا زائدہ مختصر طور پر اس طرح

|     |     |    |    |   |
|-----|-----|----|----|---|
| ۱   | ۵   | ۲  | ۱  | ۲ |
| ۱۳۱ | ۴۲  | ۱۳ | ۵  | ۲ |
|     | ۱۸۲ | ۴۶ | ۱۱ | ۲ |
|     |     | ۹۷ | ۱۷ | ۲ |
|     |     |    | ۲۳ | ۲ |

|         |     |    |    |   |
|---------|-----|----|----|---|
| ۱       | ۵   | ۲  | ۱  | ۲ |
| ۱۳۲     | ۳۹  | ۱۵ | ۶  |   |
| ق = ۱۳۳ | ۴۲  | ۱۳ | ۵  |   |
|         | ۱۳۸ | ۳۳ | ۶  |   |
| ق =     | ۱۸۲ | ۴۶ | ۱۱ |   |
|         |     | ۵۱ | ۶  |   |
| ق =     |     | ۹۷ | ۱۷ |   |
|         |     |    | ۲۳ |   |
| ق =     |     |    |    |   |

پس جواب مطلوبہ یہ ہے: ۲ لا + ۲۳ لا + ۹۷ لا + ۱۸۲ لا + ۱۳۱



دفعہ ۵۴۸ سے مقابلہ کرو۔

یہ ذکر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے کہ ہارنر کا طریقہ عددی حسابات میں خاص طور پر مفید ہوتا ہے۔

۵۵۰۔ اگر متغیر (لا) بتدریج بدل کر (ا) سے (ب) ہو جائے تو تفاعل (ف) (لا) بتدریج بدل کر (ف) (ا) سے (ف) (ب) ہو جاتا ہے۔  
فرض کرو کہ ج اور ج + ہ، لاکھ ایسی دو قیمتیں ہیں جو (ا) اور (ب) کے درمیان واقع ہیں۔ تب

$$\text{ف}(\text{ج} + \text{ہ}) - \text{ف}(\text{ج}) = \text{ہ} \text{ف}(\text{ج})$$

$$+ \frac{1}{2} \text{ہ}^2 \text{ف}''(\text{ج}) + \dots + \frac{1}{n} \text{ہ}^n \text{ف}^{(n)}(\text{ج})$$

اب ہ کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے  $\text{ف}(\text{ج} + \text{ہ})$  اور  $\text{ف}(\text{ج})$  کے فرق کو ہم اتنا کم کر سکتے ہیں جتنا چاہیں، اس لئے متغیر (لا) میں ایک چھوٹی تبدیلی پیدا کرنے سے تفاعل (ف) (لا) میں ایک متناظر چھوٹی تبدیلی پیدا ہوتی ہے، پس جب (لا) بتدریج بدل کر (ا) سے (ب) ہو جاتا ہے تو (لا) بتدریج بدل کر (ا) سے (ب) ہو جاتا ہے۔

۵۵۱۔ یہ بات قابل توجہ ہے کہ ہم نے یہ ثابت نہیں کیا ہے کہ  $\text{ف}(\text{لا})$  (ا) سے (ب) تک  $\text{ف}(\text{ا})$  ہو جاتا ہے یا  $\text{ف}(\text{ب})$  سے گھٹ کر  $\text{ف}(\text{ا})$  ہو جاتا ہے بلکہ صرف یہ ثابت کیا ہے کہ یہ بغیر کسی یک بخت تبدیلی کے بتدریج  $\text{ف}(\text{ا})$  سے بدل کر  $\text{ف}(\text{ب})$  ہوتا ہے۔ ممکن ہے کہ یہ اس تبدیلی کے دوران میں بعض اوقات بڑھتا ہو اور بعض اوقات کم ہوتا ہو۔

چونکہ اعلیٰ درجہ کی مشتقات کے طریقہ سے واقف رہے معنی  $\text{ف}(\text{لا})$  کی خاص صورتوں میں اترتیم بنانے سے  $\text{ف}(\text{لا})$  کی قیمت کے تدریجی تغیرات کا معائنہ کر سکتا ہے۔

۵۵۲۔ اگر  $\text{ف}(\text{ا})$  اور  $\text{ف}(\text{ب})$  مختلف علامت ہوں تو مساوات

فنا (لا) =۔ کی ایک اصل لا اور ب کے درمیان ضرور واقع ہوگی۔  
 جب لا بند ریمج بدل کر لا سے ب ہو جاتا ہے تو فنا (لا) بند ریمج  
 بن کر فنا (لا) سے فنا (ب) ہو جاتا ہے اور ابسا کرنے میں فنا (لا)  
 اور فنا (ب) کی کل مابینی قیمتیں اختیار کرتا ہے لیکن چونکہ فنا (لا)  
 اور فنا (ب) مختلف علامت ہیں اس لئے قیمت صفر ضرور ان کے درمیان  
 ہوگی یعنی لا اور ب کے درمیان لا کی کسی نہ کسی قیمت کے لئے فنا (لا)  
 ہوگا۔

اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ لا اور ب کے درمیان فنا (لا) =۔ کی  
 صرف ایک ہی اصل ہے اور نہ ہی یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر فنا (لا) اور فنا (ب)  
 کی علامت ایک ہی ہو تو مساوات فنا (لا) =۔ کی لا اور ب کے درمیان  
 کوئی اصل نہیں ہے۔  
 ۵۵۳۔ طاق درجہ کی کسی مساوات کی کم از کم ایک اصل حقیقی ہوتی ہے  
 اور اس کی علامت آخری رقم کی علامت کے برعکس ہوتی ہے۔  
 تفاعل فنا (لا) میں لا کی بجائے بالترتیب  $\infty$ ،  $\infty +$ ،  $\infty -$   
 درج کرنے سے

فنا ( $\infty +$ ) =  $\infty +$ ، فنا (۰) = فن اور فنا ( $\infty -$ ) =  $\infty -$   
 اگر فن مثبت ہو تو فنا (لا) =۔ کی ایک اصل  $\infty -$  اور  $\infty -$  کے درمیان  
 ہے اور اگر فن منفی ہو تو فنا (لا) =۔ کی ایک اصل  $\infty +$  اور  $\infty +$  کے  
 درمیان ہوگی۔

۵۵۴۔ اگر ایک مساوات کا درجہ جفت ہو اور اس کی آخری رقم منفی  
 ہو تو اس مساوات کی کم از کم دو اصلیں حقیقی ہوں گی جن میں سے ایک مثبت  
 ہوگی اور دوسری منفی۔

اس صورت میں فنا ( $\infty +$ ) =  $\infty +$ ، فنا (۰) = فن، فنا ( $\infty -$ ) =  
 $\infty +$  لیکن فن منفی ہے، اس لئے فنا (لا) =۔ کی ایک اصل  $\infty -$  اور  
 $\infty +$  کے درمیان ہے اور ایک اور اصل  $\infty -$  اور  $\infty -$  کے درمیان ہے۔



۵۵۶۔ اگر  $a, b, c, \dots$  ک مساوات  $f(a) = \dots$  کی اصلیں ہوں تو  
 $f(a) = f(b) = f(c) = \dots$  (لا-ک)  
 جہاں مقادیر  $a, b, c, \dots$  ک لازمی طور پر غیر مساوی نہیں ہیں اگر ان  
 میں سے راصلیں  $a$  کے مساوی ہوں، اس اصلیں  $b$  کے مساوی اور  $c$   
 اصلیں  $c$  کے مساوی ہوں..... نو

$f(a) = f(b) = f(c) = \dots$  (لا-ک) (لا-ج).....

ن صورت میں بھی یہی کہنا سہولت بخش ہے کہ مساوات  $f(a) = \dots$   
 کی اصلیں ہیں جبکہ مساوی اصول میں سے ہر ایک کو الگ الگ خیال  
 کیا جائے۔

۵۵۷۔ اگر مساوات  $f(a) = \dots$  کی راصلیں  $a$  کے مساوی ہوں تو مساوات  
 $f(a) = \dots$  کی راصلیں  $a$  کے مساوی ہوں گی۔  
 قرعہ کر کہ  $f(a)$  خارج قسمت ہے جبکہ  $f(a)$  کو  $(a)$  پر تقسیم  
 کیا جائے۔

نوٹی ہرے  $a + h$  رکھو

$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \dots$

$f(a) + h \cdot f'(a) + \dots = f(a) + h \cdot f'(a) + \dots$

$\{f(a) + h \cdot f'(a) + \dots\} = f(a) + h \cdot f'(a) + \dots$

یہ مساوات  $f(a) + h \cdot f'(a) + \dots$  کے سرور کو مساوی کرنے سے

$f(a) = f(a) + h \cdot f'(a) + \dots$

پس  $f(a) = f(a) + h \cdot f'(a) + \dots$  بار شامل ہے یعنی

مساوات  $f(a) = \dots$  کی راصلیں  $a$  کے مساوی ہیں۔



اس صورت میں مساواتیں فا (لا) = ۰ اور فا (لا) = ۰ یعنی

$$۱ + ۳ ب + ۳ ج + لا = ۰ \dots\dots (۱)$$

$$۱ + ۲ ب + لا + ج = ۰ \dots\dots (۲)$$

کی ایک اصل مشترک ہوگی اور بشرط مطلوبہ ان مساواتوں میں سے لا کو ساقط کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔

(۱) کو (۲) کے ساتھ ملائے۔

$$ب + لا + ج = ۰ \dots\dots (۳)$$

(۲) اور (۳) سے

$$\frac{۱}{(ب + ج - لا)} = \frac{لا}{(ب + ج - لا)} = \frac{۱}{(ب + ج - لا)}$$

پس بشرط مطلوبہ یہ ہے

$$(ب + ج - لا) = ۳ (ب + ج - لا) \dots\dots (۴)$$

۵۶۰۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر مساوات فا (لا) = ۰ کی اصلیں اُس کے مساوی ہوں تو مساوات فا (لا) = ۰ کی رے اصلیں اُس کے مساوی ہونگی۔ لیکن فا (لا) فا (لا) کا پہلا مشتق تفاعل ہے۔ اس لئے مساوات فا (لا) = ۰ کی رے ۲ اصلیں اُس کے مساوی ہونگی، اسی طرح سے فا (لا) کی رے ۳ اصلیں اُس کے مساوی ہونگی اور علیٰ ہذا القیاس۔

ان امور کا لحاظ کرتے ہوئے ہم مساوات فا (لا) = ۰ کی مساوی اصلیں دفعہ ۶ دے گئے قاعدہ کی نسبت زیادہ آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں۔

۵۶۱۔ اگر ۱ + ۳ ب + ۳ ج + لا = ۰، ۱ + ۲ ب + لا + ج = ۰ کی اصلیں ہیں تو ثابت کرو کہ

$$فا (لا) = \frac{فا (لا)}{۱ - لا} + \frac{فا (لا)}{لا - ب} + \frac{فا (لا)}{لا - ج} + \dots\dots + \frac{فا (لا)}{لا - ک}$$

ظاہر ہے کہ فا (لا) = (لا - ۱) (لا - ب) (لا - ج) ..... (لا - ک)



اور ایسے ہی  $\frac{فا(لا)}{لا-ب}$  ،  $\frac{فا(لا)}{لا-ج}$  ،  $\frac{فا(لا)}{لا-ع}$  کیلئے مستثنائہ جملات

پس جمع کرنے سے

$ه لا + م ف لا + ق لا = ه لا + (ج + ه ف) لا + (ج + ف ج) لا$

$+ (ج + ف ج + ه ق) لا + (ج + ف ج + ق ج) لا$

سروں کو متعادل کرنے سے

$ج + ه ف = م ف$  جس سے  $ج = ف$

$ج + ف ج = ۰$  جس سے  $ج = ف$

ج + ف ج + ه ق = ق لا جس سے  $ج = ف$  - ۳ ق

$ج + ف ج + ق ج = ۰$  جس سے  $ج = ف$  + ۲ ق

گ کی کسی اور قدر سے سکے۔ لہٰذا ہم ج کی قیمت حسب ذیل طریقہ سے معلوم کرتے ہیں۔

مساوات مدوضہ کو لا ک - ۵ سے ضرب دینے سے

$لا + ف لا + ق لا + ت لا = ۰$

لا کی پانچ باترئیب تیسریں وب، ج، د ہی رکھنے اور نتائج کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$ج + ف ج + ق ج + ت ج = ۰$

ک = ۵ رکھو، تب  $ج + ف ج + ق ج + ه ت = ۰$

جس سے  $ج = ف$  - ۵ ف + ق - ۵ ت

ک = ۶ رکھو، تب  $ج + ف ج + ق ج + ت ج = ۰$

جس سے  $ج = ف + ۶ ف + ق + ۶ ت$





|              |    |
|--------------|----|
| $1 + 2 - 3$  | ۱  |
| $3 + 3 - 4$  | ۲  |
| $2 + 2 - 2$  | ۱- |
| $2 + 2 - 2$  | ۱  |
| $5 + 5 - 10$ | ±  |

$$\dots\dots 5 + 3 - 10 + 5 + 2 + 2 + 3$$

پس خارج قسمت یہ ہے  $\frac{3}{10} + \frac{2}{15} + \frac{1}{20} + \frac{5}{30} + \frac{1}{60} + \dots\dots$

لہذا جملہ = ۱۰

### امثلہ نمبری ۳۵ (ج)

(۱) اگر ف (لا) = لا<sup>۲</sup> + ۱۰ لا + ۳۹ لا<sup>۲</sup> + ۷۶ لا + ۶۵ تو ف (لا - ۴) کی قیمت معلوم کرو۔

(۲) اگر ف (لا) = لا<sup>۲</sup> + ۱۲ لا + ۱۴ لا<sup>۲</sup> - ۹ لا + ۷ تو ف (لا + ۳) کی قیمت دریافت کرو۔

(۳) اگر ف (لا) = لا<sup>۲</sup> - ۳ لا + ۱۰ لا - ۱۹ تو ف (لا + ۱) کی قیمت معلوم کرو۔

(۴) اگر ف (لا) = لا<sup>۲</sup> + ۱۶ لا + ۲ لا<sup>۲</sup> + ۶۴ لا - ۱۲۹ تو ف (لا - ۴) کی قیمت معلوم کرو۔

(۵) اگر ف (لا) = لا<sup>۲</sup> + ب لا + ج لا + د تو ف (لا + ۵) - ف (لا - ۵) کی قیمت معلوم کرو۔

(۶) ثابت کرو کہ مساویات ۱۰ لا<sup>۲</sup> - ۷ لا + ۹ = ۰ کی ایک اصل صفر اور - ۱۰ لا<sup>۲</sup> + ۷ لا - ۹ = ۰ کی ایک اصل صفر ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ مساویات ۵ لا<sup>۲</sup> + ۳ لا + ۳۵ لا - ۷۰ = ۰ کی ایک اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اور دوسری ۲ اور ۳ کے درمیان ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ مساوات  $لا^۲ - ۱۲ لا + ۱۲ لا^۲ - ۳ = ۰$  کی ایک اصل - ۳ اور ۳ کے درمیان ہے اور دوسری ۲ اور ۳ کے درمیان -  
 ۹۔ ثابت کرو کہ مساوات  $لا^۲ + ۵ لا - ۲۰ لا^۲ - ۱۹ لا - ۲ = ۰$  کی ایک اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اور دوسری - ۳ اور - ۵ کے درمیان -  
 ذیل کی مساواتوں کی اصلیں مساوی ہیں، ان کو حل کرو:

$$۱۰۔ لا^۲ - ۹ لا + ۳ لا^۲ + ۱۲ لا - ۱۱ = ۰ \quad لا^۲ - ۹ لا + ۱۲ لا^۲ + ۱۰ لا - ۳ = ۰$$

$$۱۱۔ لا^۲ - ۱۳ لا + ۴ لا^۲ - ۱۱ لا + ۱۶ لا^۲ - ۱۰۹ = ۰$$

$$۱۲۔ لا^۲ - لا - لا^۲ + ۳ لا - ۲ لا + ۲ = ۰$$

$$۱۳۔ لا^۲ - ۸ لا + ۳ لا^۲ - ۱۸ لا + ۱۱ لا - ۲ = ۰$$

$$۱۴۔ لا^۲ - لا - لا^۲ + ۳ لا - ۴ لا + ۲ لا - ۲ + ۲ = ۰$$

$$۱۵۔ لا^۲ - لا - لا^۲ + ۳ لا - ۴ لا + ۲ لا - ۲ + ۲ = ۰$$

$$۱۶۔ لا^۲ - لا - لا^۲ + ۳ لا - ۴ لا + ۲ لا - ۲ + ۲ = ۰$$

ذیل کی مساواتوں کی اصلیں مساوی ہیں، ان کو حل کرو

$$۱۷۔ لا^۲ - ۲ لا + لا^۲ + لا - ۳ لا - ۴ لا + ۳ لا - ۹ = ۰$$

$$۱۸۔ لا^۲ - لا + لا^۲ + لا - ۱۲ لا - لا^۲ + لا - ۱۵ لا = ۰$$

$$۱۹۔ لا^۲ - لا + لا^۲ + لا - ۱۲ لا - لا^۲ + لا - ۱۵ لا = ۰$$

$$۲۰۔ لا^۲ - لا + لا^۲ + لا - ۱۲ لا - لا^۲ + لا - ۱۵ لا = ۰$$

$$۲۱۔ لا^۲ - لا + لا^۲ + لا - ۱۲ لا - لا^۲ + لا - ۱۵ لا = ۰$$

$$۲۲۔ لا^۲ - لا + لا^۲ + لا - ۱۲ لا - لا^۲ + لا - ۱۵ لا = ۰$$

$$۱۰ \text{ لا} + ۱ \text{ ب} = ۱۰ \text{ اور لا}^۲ = ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} - ۱ = ۰$$

کی ۱۱ ایک اصل ۱۲ دو اصلیں مساوی ہوں۔

(۲۳) ثابت کرو کہ مساوات

$$۱۰ \text{ لا} + ۱ \text{ ب} = ۱۰ \text{ (ن-۱) لا}^۲ + \dots + \text{لا} = ۰$$

کی اصلیں مساوی نہیں ہو سکتیں۔

(۲۴) اگر مساوات لا۔ ۱۰ لا + ۱ ب + ۱ ج = ۰ کی تین اصلیں مساوی ہوں

تہ ثابت کرو ا ب = ۱ ج = ۰

(۲۵) اگر مساوات لا + ۱ لا + ۱ ب + ۱ ج + ۱ د = ۰ کی تین اصلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ان میں سے ہر ایک  $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۸}$  کے مساوی ہے۔

(۲۶) اگر لا + ۱ ق + ۱ لا + ۱ ر + ۱ ت = ۰ کی دو اصلیں باہم مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ان میں سے ایک اصل ذیل کی مساوات درجہ دوم ۵ لا - ۱ ق + ۱ لا + ۱

+ ۲۵ ت - ۳ ق ر = ۰ کی ایک اصل کے مساوی ہوگی۔

(۲۷) مساوات لا - لا - ۱ = ۰ میں ج کی قیمت معلوم کرو۔

(۲۸) مساوات لا - لا - ۱ لا + ۱ لا + ۱ ج = ۰ میں ج اور ج کی قیمتیں معلوم کرو۔

## مساواتوں کی تبدیل یا استحالہ

۴۶۵۔ بعض اوقات کسی مساوات کے متعلق بحث زیادہ آسان ہو جاتی ہے اگر اس مساوات کو ایک ایسی مساوات میں تبدیل کر لیا جائے جسکی اصلیں اول الذکر مساوات کی اصلوں کے ساتھ کوئی خاص ربط رکھتی ہوں، اس قسم کی تبدیلیاں مخصوص کبھی مساوات یعنی مساوات درجہ سوم کے حل میں زیادہ مفید ہوتی ہیں۔

۵۶۵۔ ایک مساوات کو ایک اور ایسی مساوات میں تبدیل کرو جسکی اہلیں مفروضہ مساوات کی اہلوں کے مساوی اور مختلف علامت ہوں۔  
 فرض کرو کہ  $(لا) =$  مساوات مفروضہ ہے۔  
 لاک بجائے۔ مارکھو، تب مساوات  $(ما) =$  مساوات  
 $(لا) =$  کی ہر اہل سے پوری ہوتی ہے جبکہ اس اہل کی علامت کو بدل دیا جائے، پس مساوات مطلوبہ  $(لا) =$  ہے۔  
 اگر مساوات مفروضہ

$$فبلا + فبلا + فبلا + ..... + فبلا + فن =$$

ہو تو ظاہر ہے کہ مساوات مطلوبہ جب ذیل ہوگی جو اوپر کی مساوات میں دوسری رقم سے شروع ہو کر متبادل رقم کی علامتیں بدلنے سے حاصل ہوتی ہے۔

$$فبما - فبما + فبما - ..... + فبما - فن + (1) فن =$$

۵۶۶۔ ایک مساوات کو ایک اور ایسی مساوات میں تبدیل کرو جس کی اہلیں ان حاصل ضربوں کے مساوی ہوں جو ابتدائی مساوات کی اہلوں کو ایک خاص مقدار سے ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ  $(لا) =$  مساوات مفروضہ ہے اور قی مذکورہ بالا مقدار خاص کو تعبیر کرتا ہے،  $ما = قی لا رکھو$ ، تب  $لا = \frac{لا}{ما}$  تب مساوات مطلوبہ  $(\frac{لا}{ما}) =$  ہے،

اس تبدیل کا خاص فائدہ یہ ہے کہ اس کی مدد سے کسی مساوات کو اس کے کسری سرور سے پاک کیا جاسکتا ہے۔

مثال۔ مساوات  $لا - \frac{لا}{۲} - \frac{لا}{۳} + \frac{لا}{۴} =$  میں سے اس کے کسری سرخارج کرو۔



مثال ۲۔ اگر مساوات  $۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ = ۱$  کی اصلیں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ ہوں اور  $۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ = ۱$  کی قیمتیں معلوم کر۔

لا کے رکھنے سے تبدیل شدہ مساوات

$$۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ = ۱$$

$$۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ = ۱$$

$$۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ = ۱$$

$$۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ = ۱$$

۵۶۸۔ اگر ایک مساوات ایسی ہو کہ اس میں لا کی بجائے  $\frac{۱}{۲}$  رکھنے سے مساوات میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہو تو اس مساوات کو مساوات متکا می کہتے ہیں۔  
اگر مساوات مفروضہ

$$۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ = ۱$$

ہو تو اس میں لا کی بجائے  $\frac{۱}{۲}$  رکھنے سے یہ مساوات حسب ذیل ہو جاتی ہے

$$۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ = ۱$$

اگر یہ دونوں مساواتیں ایک ہی ہوں تو ظاہر ہے کہ

$$\frac{۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵}{۱} = \frac{۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵}{۱}$$

$$\frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱}$$

سب سے آخری نتیجہ کی رو سے فن = ۱ ، اس طرح سے ہیں دو قسم کی مشکافی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں -  
(۱) فن = ۱ تو

فن = فن۱ ، فن۲ = فن۳ ، فن۴ = فن۵ ، .....  
یعنی شروع اور آخر کی طرف سے مساوی افضل رتبوں کے مساوی ہوتے ہیں -  
(۲) اگر فن = ۱ تو

فن۱ = فن۲ ، فن۳ = فن۴ ، فن۵ = فن۶ ، .....  
پس اگر مساوات ۲ مابعد کی ہو تو فن۱ = فن۲ یا فن۳ = .....  
اس صورت میں اول اور آخر سے مساوی افضل رتبیں بلحاظ مقدار مساوی اور بلحاظ علامت مختلف ہوتی ہیں اور اگر مساوات جنت درجہ کی ہو تو وسطیٰ تمام غائب ہوتی ہے -

۵۶۹ - فرض کر دے کہ فنا (لا) = مشکافی مساوات ہے -  
اگر فنا (لا) = قسم اول کی ہو اور طاق درجہ کی ہو تو اس کی ایک اصل - ۱ ہوگی یعنی فنا (لا) ، لا + ۱ پر تقسیم ہو جائے گا - تقسیم کرنے سے اگر خارج قسمت فہ (لا) ہو تو فہ (لا) = قسم اول اور درجہ جنت کی مشکافی مساوات ہو -  
اگر فنا (لا) = قسم دوم کی مساوات ہو اور اس کا درجہ طاق ہو تو اس کی ایک اصل + ۱ ہوگی ، اس صورت میں فنا (لا) ، لا - ۱ پر پورا تقسیم ہو جائے گا - اور حسب سابق فہ (لا) = قسم اول اور درجہ جنت کی ایک مشکافی مساوات ہوگی -

اگر فنا (لا) = قسم دوم اور درجہ جنت کی کوئی مساوات مشکافی ہو تو اس کی ایک اصل + ۱ اور کو دوسری اصل - ۱ ہوگی ، اس صورت میں فنا (لا) ، لا - ۱ پر تقسیم ہو جائے گا اور حسب سابق فہ (لا) = قسم اول اور درجہ جنت



ایک مساوات متکافی ہے۔

لہذا ہر ایک مساوات متکافی، جنت درجہ کی ہوتی ہے اور اس کی آخری رقم مثبت ہوتی ہے اور یہ اس شکل میں لائی جاسکتی ہے پس اس شکل کو متکافی مساواتوں کی معیاری شکل سمجھنا چاہیے۔

۷۵۔ مسیاری شکل کی کوئی مساوات متکافی نصف ابعاد پر مساوات کی  
شکل میں تبدیل کی جاسکتی ہے۔  
فرض کرو کہ مساوات

اولاً ب' لا<sup>٢</sup> ج' لا<sup>٢</sup> ..... ك' و' ..... ج' لا<sup>١</sup> ب' و' ا' .

ہے، الا پر تقسیم کرنے اور انہیں کو تربیت دینے سے

$$= 5 + \dots + \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{1-y} + \frac{1-z}{y}\right) - \left(\frac{1}{y} + z\right)\left(\frac{1}{1-y} + z\right) = \frac{1}{1-y} + \frac{1+z}{y} \quad \text{b}$$

پس لا +  $\frac{1}{r}$  کی بجائے ی لکھنے اور ف کو بالتوا ۱، ۲، ۳، ... قیمتیں دینے سے

$$2-5 = \frac{1}{25} + 9$$

$$y_3 - y_1 = y - (2 - y)y = \frac{1}{3y} + y^2$$

$$r + \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = (r - \frac{1}{r}) - (\frac{1}{r} - \frac{1}{r}) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

اور علیٰ ذہ القیاس، اور بالعموم لایۃ  $\frac{1}{10}$ ، ی میں م ابعاد کا جملہ ہے۔

پس مساوات ہی میں م اعباد کی ہے۔

۱۷۵۔ ایک ایسی مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں ایک مفروضہ مساوات کی اصلوں کے مربعوں کے مساوی ہوں۔

فرض کرو کہ فنا (لا) = . مساوات مفروضہ ہے، ما = لا<sup>۲</sup>  
 یعنی لا = ما<sup>۲</sup> رکھیں مساوات مطلوبہ فنا (ما<sup>۲</sup>) =  
 مثال - ایک مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں مساوات

$$لا^۲ + فم لا^۲ + فم لا + فم = .$$

کی اصلوں کے مربعوں کے برابر ہوں -  
 لا = ما<sup>۲</sup> رکھنے اور تبادلاً رقوم کرنے سے

$$(ما + فم) ما^۲ = (فم + ما + فم)$$

جس سے (ما<sup>۲</sup> + ۲ فم ما + فم<sup>۲</sup>) = ما<sup>۲</sup> + ۲ فم فم + ما + فم<sup>۲</sup>  
 یعنی ما<sup>۲</sup> + (۲ فم - فم<sup>۲</sup>) ما + (فم<sup>۲</sup> - ۲ فم فم) = فم<sup>۲</sup> = .  
 مثال ۲. دفعہ ۵۳۹ کے حل سے مقابلہ کرو۔

۵۴۲ - ایک مساوات کو ایک اور ایسی مساوات میں تبدیل کرو جسکی اصلیں مفروضہ  
 مساوات کی اصلوں سے بقدر ایک خاص مقدار کے بڑی ہوں -  
 فرض کرو کہ فنا (لا) = . مساوات مفروضہ ہے اور ھ مقدار معلومہ ہے  
 ما = لا + ھ یعنی لا = ما - ھ رکھنے سے مساوات مطلوبہ فنا (ما - ھ) = .  
 ہو جاتی ہے -

اسی طرح سے فنا (ما + ھ) = . ایک ایسی مساوات ہے جسکی اصلیں  
 مساوات فنا (لا) = . کی اصلوں سے بقدر ھ کے چھوٹی ہیں -  
 مثال - ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$۳ لا^۲ + ۳۲ لا + ۸۳ لا^۲ + ۷۶ لا + ۲۱ = .$$

کی اصلوں سے بقدر ھ کے بڑی ہیں -  
 مطلوبہ مساوات مساوات بالا میں لا کی بجائے لا - ۲ درج کرنے سے حاصل ہوگی  
 پس ہارنر کے قاعدہ میں ہم لا - ۲ کو بطور مقسوم علیہ استعمال کرتے ہیں اور حسبِ تبدیل

طریق سے حساب لگاتے ہیں

$$\begin{array}{r} ۴ \quad ۳۲ \quad ۸۳ \quad ۷۶ \quad ۲۱ \\ ۴ \quad ۲۲ \quad ۳۵ \quad ۶ \quad ۹ \\ ۴ \quad ۱۶ \quad ۳ \quad ۰ \quad ۱ \\ ۴ \quad ۸ \quad ۱۳-۱ \quad ۰ \quad ۱ \\ ۴ \quad ۰ \quad ۱ \quad ۰ \quad ۰ \end{array}$$

پس تبدیل شدہ مساوات  $۴ \text{ لا}^۱ - ۱۳ \text{ لا}^۲ + ۹ = ۰$  یا  $(۴ \text{ لا}^۱ - ۱۳ \text{ لا}^۲)(۱ - ۱) = ۰$  ہو

اس مساوات کی اصلیں  $\frac{۳}{۴} - \frac{۳}{۴} + ۱ - ۱$  ہیں، پس مساوات

مفروضہ کی اصلیں  $\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} + ۱ - ۱ = ۰$  ہیں۔

۵۷۳ - دفعہ تا قبل کی تبدیلی کا خاص فائدہ یہ ہے کہ اس کی مدد سے ایک مساوات

کی کوئی خاص رقم معدوم کی جاسکتی ہے۔

فرض کر کہ مساوات یہ مفروضہ

$$ف \text{ لا}^۱ + ف \text{ لا}^۲ + \dots + ف \text{ لا}^۱ + ف \text{ لا}^۲ + \dots = ۰$$

تب اگر  $۱ = ۱ - ۱$  ہیں نئی مساوات

$$ف(۱ + ۱) + ف(۱ + ۱) + \dots + ف(۱ + ۱) + \dots = ۰$$

حاصل ہوئی ہے اگر اس کی رقم کو  $۱$  کی نزولی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیا جائے تو یہ مساوات ہو جائی ہے:

$$ف \text{ لا}^۱ + (ن \text{ ف} + ف) \text{ لا}^۲ + \left\{ \frac{ن(ن-۱)}{۲} \text{ ف} + (ن-۱) \text{ ف} + ۱ \right\}$$

$$+ \dots + \dots + \dots = ۰$$

اگر ہم دو سری رقم کو نکالنا چاہیں تو  $n$  ف  $b$  + ف  $b$  - یعنی  $b$  - ف  $b$   
 اگر تیسری رقم کو معدوم کرنا مقصود ہو تو

$$\frac{n(n-1)}{2} + (n-1) + n + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

جو ہم میں درجہ دوم کی ایک مساوات ہے، اسی طرح سے ہم کسی اور رقم کو نکال سکتے ہیں۔

بعض اوقات حسبِ مشقِ ذیل عمل کرنا زیادہ مفید ہوتا ہے۔

مثال۔ مساوات ف لاء ق لاء د لاء س = ۔ میں سے  
جس سے ہی رقم نکال دو

فرض کرو کہ اس مسادات کی اصلیں عہدہ بہ ماجہ ہیں

یعنی عہ + ہ + جہ = - واو

تب اگر ہم ہر ایک اصل کو بقدر  $\frac{1}{n}$  کے بڑھا دیں تو تبدیل شدہ

مسادات میں اصلوں کا مائل جمع  $-\frac{Q}{T} + \frac{Q}{T}$  کے مساوی ہوگا یعنی  
دوسری رقم کا سفر ہوگا۔

پس مساوات مفروضہ میں لا کی بجائے لا۔  $\frac{ق}{۳۲}$  رکھنے سے مطلوبہ

تبدیلی حاصل ہوتی ہے۔

۵۷۔ مساوات (لا) = - سے ہم ایک ایسی مساوات بنا سکتے ہیں جسکی اصلیں مساوات مفروضہ کی اصولوں کے ساتھ کسی خاص ربط کے ذریعہ مربوط ہوں  
فرض کرو کہ مساوات مطلوبہ کی ایک اصل ماس ہے ، نیز فرض کرو کہ ربط  
فہ (لا ا ما) محیط مذکور کو تعبیر کرتا ہے ۔ تب تبدیل شدہ مساوات یا اس طرح  
حاصل ہوتی ہے کہ مساوات فہ (لا ا ما) = . کے ذریعہ لا کو ماس کے

تفاعل کے طور پر بیان کیا جائے اور پھر لا کی اس قیست کو جو ما کی رقوم میں حاصل کی گئی ہے مساوات فا (لا) = . میں درج کیا جائے یا مطلوبہ مساوات بطرح حاصل ہوگی کہ ہم لا کو مساواتوں فا (لا) = . اور فہ (لا) = . سے ساقط کر کے ما کی رقوم میں رشتہ حاصل کریں۔

مثال :- اگر مساوات  $2 + 3 + 4 = 9$  کی اصلیں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ ہوں تو ایک مساوات ہناؤ جسکی اصلیں

۱- ب ج ، ۲- ب ج ، ۳- ج ب

۵۰-

جب مساوات مفروضہ میں لا = ۱ تو تبدیل شدہ مطلوبہ مساوات میں ما = ۱۔

لیکن  $1 - \frac{1}{b \cdot c} = 1 - \frac{1}{a \cdot b \cdot c} = 1 + \frac{1}{c}$

اس لئے تبدیل شدہ مساوات

$$a = لا + \frac{لا}{ر} \quad \text{یعنی} \quad لا = \frac{را}{ر+1}$$

کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔  
پس مطلوبہ مساوات ہے۔

$$r_n = r_{n-1} + (r_{n-1})^2 + 1$$

مثال ۲۔ ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات درجہ سوم

لا٣ ق لا ر -

کی اصلوں کے فرقوں کے مربوں کے مساوی ہوں۔

فرض کرو کہ مساوات درجہ سوم کی اصلیں (ب) ج ہیں،  
تب مطلوبہ مساوات کی اصلیں (ب-ج)، (ج-ا)، (ا-ب)

ہونگی۔

$$\begin{aligned} \text{اب (ب-ج)} &= \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{بج} = \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ب}^2 - \text{ج}^2 - \frac{2\text{بج}}{2} \\ &= (\text{ب}^2 + \text{ج}^2) - (\text{ب}^2 + \text{ج}^2 + 2\text{بج}) - \frac{2\text{بج}}{2} \\ &= -2\text{بج} - \frac{2\text{بج}}{2} \end{aligned}$$

یہ سب مساوات مفروضہ میں لا = ۱ تو تبدیل شدہ مساوات میں ما = (ب-ج)²

$$\therefore \text{ما} = -2\text{بج} - \frac{2\text{بج}}{2}$$

لہذا ہمیں مساواتوں

$$\text{لا}^2 + \text{ق} + \text{ر} = ۰$$

$$\text{لا}^2 + (\text{ق} + \text{ما}) - \text{لا} - \text{ر} = ۰$$

سے لا کو ساقط کرنا چاہیئے۔

$$\text{تقریب کرنے سے (ق} + \text{ما) لا} = \text{ر} \quad \text{یا لا} = \frac{\text{ر}}{\text{ق} + \text{ما}}$$

یہ قیمت درج کر کے اختصار کر لے سے

$$\text{ما}^2 + \text{ق} + \text{ما} + \text{ق} + \text{ما} + \text{ر} + \text{ق} = ۰$$

نتیجہ صریح۔ اگر لا، ب، ج سب حقیقی ہوں تو (ب-ج)²، (ج-ا)²، (ا-ب)² سب مثبت ہونگے، اس لئے ۲ر + ۴ق + ۴ق² منفی ہوگا۔

پس اگر مساوات لا² + ق + لا + ر = ۰ کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو

$$۲ر + ۴ق + ۴ق² \text{ منفی ہوگا یعنی } \left(\frac{۲}{۳}\right) + \left(\frac{۲}{۳}\right) \text{ منفی ہوگا۔}$$

اگر ۲ر + ۴ق = ۰ تو تبدیل شدہ مساوات کی ایک اصل صفر ہوگی اس لئے

ابتدائی مساوات کی دو اصلیں مساوی ہونگی۔

اگر  $۲ + ۳ ق = ۴$  مثبت ہو تو تبدیل شدہ مساوات کی ایک اصل منفی ہوگی (دیکھو دفعہ ۵۵) اس لئے ابتدائی مساوات کی دو اصلیں خیالی ہونگی کیونکہ خیالی اصلوں کا زوج ہی تبدیل شدہ مساوات کی ایک اصل کو منفی کر سکتا ہے۔

### امثلہ نمبر ۳۵ (۷)

(۱) مساوات  $۳ لا + ۲ لا - ۱ لا = ۱$  کو ایک ایسی مساوات میں تبدیل کر دیجئے کہ سر صیح عدد ہوں اور پہلی رقم کا سر ایک ہو۔

(۲) مساوات  $۳ لا - ۵ لا + ۲ لا - ۱ لا = ۱$  کو ایک اور مساوات میں تبدیل کر دیجئے کہ پہلی رقم کا سر ایک ہو۔  
ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(۳) ۲ لا + ۳ لا - ۲ لا + ۱ لا = ۲$$

$$(۴) لا - ۱ لا + ۲ لا + ۳ لا = ۱$$

$$(۵) لا - ۵ لا + ۹ لا - ۳ لا = ۱$$

$$(۶) ۴ لا - ۲ لا + ۵ لا - ۳ لا + ۲ لا - ۱ لا = ۴$$

(۷) اگر مساوات  $۳ لا - ۲ لا + ۱ لا = ۳$  کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ

ہیں ہوں تو اس کو حل کرو۔

(۸) مساوات  $۱۱ لا + ۳ لا - ۳۶ = ۳۶$  کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہیں ان اصلوں کو دریافت کرو۔

(۹) اگر مساوات  $۱ لا + ۲ لا - ۱ لا = ۱$  کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ وسطی اصل ۳ ب کے مساوی ہے۔

(۱۰) مساوات  $۴ لا - ۲ لا + ۱ لا - ۲ لا + ۱ لا = ۱$  کو حل کرو جبکہ اس کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوں۔

ذیل کی مساواتوں میں سے دوسری رقم خارج کرو۔

$$(۱۱) \quad ۱۰ - ۳ = ۰$$

$$(۱۲) \quad ۲ - ۳ = ۰$$

$$(۱۳) \quad ۱ - ۱ = ۰$$

$$(۱۴) \quad ۱۲ - ۱۳ = ۰$$

(۱۵) مساوات ۱۲ - ۱۳ = ۰ کو ایک ایسی مساوات میں تبدیل کرو جسکی اصلیں

مساوات مفروضہ کی اصلوں سے بقدر ۳ کے بڑی ہوں۔

$$(۱۶) \quad ۱۲ - ۱۳ = ۰ \quad \text{کی اصلوں کو بقدر ۳ کے کم کرو۔}$$

(۱۷) ایک مساوات بناؤ جسکی ہر ایک اصل مساوات ۱۲ - ۱۳ = ۰ کی ایک اصل سے بقدر ۱ کے بڑی ہو۔

(۱۸) ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$۱۲ - ۱۳ = ۰$$

کی اصلوں کے مربعوں کے مساوی ہوں۔

(۱۹) ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات ۱۲ - ۱۳ = ۰ کی

اصلوں کے مکعبوں کے مساوی ہوں۔

اگر  $a$ ،  $b$ ،  $c$  مساوات  $۱۲ - ۱۳ = ۰$  کی اصلیں ہوں تو وہ مساوات

بناؤ جسکی اصلیں یہ ہوں۔

$$(۲۰) \quad \frac{۱۲}{a} - \frac{۱۳}{b} = ۰ \quad (۲۱) \quad \frac{۱۲}{a} + \frac{۱۳}{b} = ۰$$

$$(۲۲) \quad \frac{۱۲}{a} + \frac{۱۳}{b} = ۰ \quad \frac{۱۲}{a} - \frac{۱۳}{b} = ۰ \quad \frac{۱۲}{a} + \frac{۱۳}{b} = ۰$$





اور مساوات مفروضہ ہو جاتی ہے

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

اب تک ما اور می کوئی دو مقادیر ہیں جن پر صرف یہ شرط عائد کی گئی ہے کہ ان کا حاصل جمع مساوات مفروضہ کی اصلوں میں سے ایک کے مساوی ہے اگر مزید باتیں ہم یہ فرض کریں کہ یہ مساوات ۳ ما + ۲ می + ۱ ق = کو پورا کرتی ہیں تو ان کی قیمت ملل طور پر معلوم ہو سکتی ہے، اس طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$۱ + ۲ + ۳ = ۶، ۳ ما + ۲ می = ۱۱ - \frac{۱۱}{۲}$$

اسلئے ما اور می، مساوات درجہ دوم

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

کی اصلیں ہیں۔ اس مساوات کو حل کرنے اور

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵ \dots (۱)$$

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵ \dots (۲)$$

رکھنے سے ہمیں لا کی قیمت ربط لا = ما + می سے حاصل ہوتی ہے،

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

اوپر کا حل عام طور پر کاسٹن کا حل کہلاتا ہے کیونکہ اُس نے اول مرتبہ اس حل کو پیش کیا تھا۔ اس میں ٹیکسٹ میں شائع کیا تھا۔ کارڈن نے یہ حل ڈاٹسنگلیا سے حاصل کیا تھا لیکن قرائن سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات درجہ سوم کا حل پہلے پہل سی پیو فیکریو نے تقریباً ۱۵۷۰ء میں

دریافت کیا تھا۔ اس مضمون پر نہایت دلچسپ اور تاریخی بحث ہرن سائیکڈ اور پین ٹن کی کتاب نظر پر معادلات کے آخر میں درج ہے۔

۵۴۵۔ دفعہ ما قبل کی مساواتوں (۱۱) اور (۲) میں بائیں جانب جو مقادیر

ہیں ان میں سے ہر ایک مقدار کے حسب دفعہ ۱۱۰ تین جذر الکعب ہیں، پس بظاہر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ لاکھ ۹ قیمتیں ہیں مگر درحقیقت ایسا نہیں ہے چونکہ

ما ی = ی۔ اسلئے جذر الکعبوں کے دو زوج لینے چاہئیں جن میں سے ہر ایک

کا حاصل ضرب نامطمع ہو۔ لہذا اگر جذر الکعبوں کے کسی ایک زوج کی قیمتوں کو جو اس

شرط کو پورا کرے ما ی سے تعبیر کیا جائے تو اس شرط کو پورا کرنے والے باقی

جوڑے سد ما، سد ی اور سد ما، سد ی ہونگے جہاں سد اور

سد ایک کے جذر الکعب ہیں، اسلئے مساوات کی اصلیں ما + ی،

سد ما + سد ی، سد ما + سد ی ہیں۔

مثال۔ مساوات لا۔ ۱۵ = لا = ۱۲۶

ما + ی = لا رکھو تب

$$ما + ی + ۳ = (۳ ما ی - ۱۵) لا = ۱۲۶$$

$$۳ ما ی - ۱۵ = ۰ رکھو$$

$$تب ما + ی + ۳ = ۱۲۶ / نیز ما ی + ۳ = ۱۲۵$$

اسلئے ما + ی + ۳ مساوات ذیل کی اصلیں ہیں۔

$$ت - ۱۲۶ = ت + ۱۲۵ = ۰$$

$$۱ = ی + ۱۲۵ = ما ی + ۳$$

$$۱ = ی + ۵ = ما ی + ۳$$

$$پس ما + ی = ۱ + ۵ = ۶$$

$$سد ما + سد ی = \frac{۳ - ۱ + ۱ - ۳}{۶} + ۵ \times \frac{۳ - ۱ + ۱ - ۳}{۶}$$

$$= ۳ - ۲ + ۳ - ۳ = ۱$$

$$سہ ما + سہ ی = ۳ - ۲ - ۱$$

اور اصناف ۱، ۲ + ۳ - ۱ = ۳ - ۲ - ۱ ہیں۔

۵۷۸۔ اب ہم اس امر کی تشریح کر دینا چاہتے ہیں کہ وضع ۵۷۸ میں لاکھ ۹ قیمتیں کیوں حاصل ہوتی ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ما اور ی مساواتوں

$$ما + ی + ۲ = ۰ ، ما ی = - \frac{۲}{۳}$$

دوران میں دوسری مساوات کو بدل کر ما ی = -  $\frac{۲}{۳}$  بنادیا جاتا ہے

اور ظاہر ہے کہ برخلاف مساوات میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہوگی اگر ما ی = -  $\frac{۲}{۳}$  سہ

۱۔ سہ ی = ۰ پس لاکھ باقی چھ قیمتیں معاوضہ درج سوم

$$لا + سہ ی لا + ر = ۰$$

$$لا + سہ ی لا + ر = ۰$$

اور کے حل ہیں۔

۵۷۹۔ اب ہم مساوات لا + ی + لا + ر = ۰ کی اصلوں پر زیادہ تفصیل کے ساتھ بحث کرتے ہیں۔

(۱) اگر ہم  $\frac{۲}{۳}$  مثبت ہو تو ما اور ی دونوں حقیقی ہیں، فرض کر کہ

ما اور ی بالترتیب ما اور ی کے حسابی جذور الکعبوں کو تعبیر کرتے ہیں، تب مساوات مذکور کی اصلیں

$$ما + ی ، سہ ما + سہ ی ، سہ ما + سہ ی$$

ہیں۔ ان اصلوں میں سے پہلی اصل حقیقی ہے اور سہ اور سہ کی قیمتیں درج کرنے سے باقی اصلیں

$$- \frac{ما + ی}{۲} + \frac{ما - ی}{۲} ، - \frac{ما + ی}{۲} - \frac{ما - ی}{۲} ، - \frac{ما + ی}{۲} - \frac{ما - ی}{۲}$$

جمل ہوتی ہیں۔



$$رُ (جُم ط + خ جب ط) ، رُ (جُم ط + خ جب ط) + رُ (جُم ط + خ جب ط)$$

$$رُ (جُم ط + خ جب ط) + رُ (جُم ط + خ جب ط)$$

جہاں رُ کے حسابی جذر الکعب کو تعبیر کرتا ہے اور طہ وہ چھوٹے سے

چھوٹا زاویہ ہے جو مساوات مس طہ =  $\frac{ب}{ر}$  سے حاصل ہوتا ہے۔

(و-خ ب) کی تین قیمتیں نتائج بالا میں خ کی علامت کو بدلنے سے حاصل ہوتی ہیں، پس مطلوبہ اصلیں یہ ہیں۔

$$رُ جُم ط ، رُ جُم ط + رُ جُم ط + رُ جُم ط$$

### مساوات درجہ چہارم

۵۸۱۔ اب ہم محل طور پر بعض ایسے طریقوں پر بحث کرتے ہیں جو مساوات درجہ چہارم کا عام حل حاصل کرنے کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں ہم دیکھیں گے کہ ان طریقوں میں سے ہر ایک میں پہلے ہمیں ایک معاون مساوات درجہ سوم کو حل کرنا پڑتا ہے، پس ظاہر ہے کہ مساوات درجہ سوم کی مانند مساوات درجہ چہارم کا عام حل بھی کسی مفروضہ عددی مساوات کا حل فوراً لکھ لینے کے لئے موزوں نہیں۔

۵۸۲۔ مساوات درجہ چہارم کا حل، پہلے پیل کارڈن کے ایک شاگرد فینز آری نے بطریق ذیل حاصل کیا تھا۔

مساوات درجہ چہارم کو  $۲ف + ۲لا + ۲لا + ۲لا + ۲لا + ۲لا = ۰$  سے تعبیر کرو۔

مساوات کے دونوں جانب (۲لا + ۲ب) جمع کر دو جہاں مقادیر ۲لا اور ۲ب کو اس طرح منتخب کیا گیا ہے کہ مساوات بالائی دائیں جانب کا رکن پورا ہو۔

مرتب بن جاتا ہے۔ تب

$۲ + ۲$  ف  $۱ + ۲$  (ق + و)  $۲ + ۲$  (ر + و)  $۱ + ۲$  س + ب  $۱ =$  (و + ب)  $۲$   
فرض کرو کہ مساوات کی دائیں جانب کا رکن (و + ف + ک) کے مساوی  
ہے، تب سرور کا مقابلہ کرنے سے

$$۲ + ۲ ک = ۱ + ۲ ق + ۱ ف + ۲ ر + ۱ و$$

$$۲ ک = ۱ س + ۲ ب$$

ان مساواتوں میں سے ۱ اور ۲ کو ساکت کرنے سے

$$(۲ ک - ۱ ر) = (۲ ک + ۱ ف - ۱ ق) (۲ ک - ۱ س)$$

یا  $۲ ک - ۱ ق + ۲ (۲ ر - ۱ س) - ۲ ک - ۱ س + ۱ ق = ۱ ر - ۱ س$   
اس مساوات درجہ سوم سے ک کی ایک حقیقی قیمت ضرور نکل سکتی ہے (دیکھو  
صفحہ ۴۵۴) اس طرح سے ۱ اور ۲ معلوم ہو جاتے ہیں۔ نیز

$$(۱ + ۲ ف + ۱ ک) = (۱ + ۲ و + ۱ ب)$$

$$\therefore ۱ + ۲ ف + ۱ ک = ۱ + ۲ و + ۱ ب$$

اور لا کی قیمتیں درجہ دوم کی دو مساواتوں

$$۱ + ۲ (ف - ۱) + ۱ (ک - ۱) = ۰$$

$$۱ + ۲ (ف + ۱) + ۱ (ک + ۱) = ۰$$

$$\text{مثال} - \text{مساوات } ۱ - ۲ - ۲ - ۵ + ۱۰ - ۱ - ۳ = ۰$$

کو حل کرو۔

مساوات کے دونوں طرف ۱ + ۲ و + ۱ ب + ۱ س + ۱ ک بیج کر دو اور فرض کرو کہ

لا<sup>۲</sup> - ۲ لا + ۱ (۵ - لا<sup>۲</sup>) + ۲ (۵ + لا) + ۲ (۵ - لا<sup>۲</sup>) - لا + ۲ (۵ - لا<sup>۲</sup>)  
تب سرور کو مساوی کرنے سے

$$۲ - ۲ لا + ۱ (۵ - لا^۲) + ۲ (۵ + لا) + ۲ (۵ - لا^۲) - لا + ۲ (۵ - لا^۲)$$

$$۲ - ۲ لا + ۱ (۵ - لا^۲) + ۲ (۵ + لا) + ۲ (۵ - لا^۲) - لا + ۲ (۵ - لا^۲)$$

$$۲ - ۲ لا + ۱ (۵ - لا^۲) + ۲ (۵ + لا) + ۲ (۵ - لا^۲) - لا + ۲ (۵ - لا^۲)$$

آدائش سے معلوم ہوتا ہے کہ ک = ۱، اس لئے ۲ = ۱، ۲ = ۱، ۲ = ۱،  
۲ = ۱

لیکن مفروضہ کی رو سے یہ نتیجہ نکلنا ہے کہ

$$(لا - لا + ک) = (۱ + لا + ب)$$

ک، ۱ اور ب کی قیمتیں درج کرنے سے ہیں دو مساواتیں

$$(لا - لا + ۱) = ۱ - لا + ۲$$

ماہل ہوتی ہیں، یعنی لا - لا + ۱ = ۱ - لا + ۲ اور لا - لا + ۲ = ۱ - لا + ۲

$$۱ - لا + ۲ = ۱ - لا + ۲$$

۵۸۳ - ذیل کامل ڈیجیٹائز نے ۱۳۷۳ء میں شائع کیا تھا۔  
فرض کرو کہ مساوات درجہ چہارم کا اختصار کر کے اس کو ذیل کی شکل

$$لا^۲ + ق لا + ر لا + س = ۰$$

میں لایا گیا ہے۔ اب فرض کرو کہ

$$لا^۲ + ق لا + ر لا + س = (لا + ک)(لا + ل)$$



تب سروں کو مساوی کرنے سے

$$ل + م - ک = ق، ک (م - ل) = ر، ل م = س$$

ان مساواتوں میں سے پہلی دو سے حاصل ہوتا ہے

$$م = ک + ق + ح، ل = ک + ق - ح$$

پس تیسری مساوات میں درج کرنے سے

$$(ک + ق + ک + ر) (ک + ق - ک - ر) = م س ک$$

$$یا ک + ق + ک + (ق - م س) ک - ر = ۰$$

یہ مساوات ک میں درجہ سوم کی مساوات سے جسکی ایک اصل حقیقی اور مثبت ہے (دیکھو دفعہ ۵۵۳) پس جب ک کی قیمت معلوم ہو تو اس سے ل اور م کی قیمتیں نکل سکتی ہیں اور مساوات درجہ چہارم کا حل درجہ دوم کی دو مساواتوں

$$لا + ک لا + ل = ۰$$

$$لا - ک لا + م = ۰$$

کو حل کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال - مساوات لا - ۲ لا + ۸ لا - ۳ = ۰ کو حل کرو

$$فرض کرو کہ لا - ۲ لا + ۸ لا - ۳ = ۰ (لا + ک لا + ل) (لا - ک لا + م)$$

تب سروں کو مساوی کرنے سے

$$ل + م - ک = ۲، ک (م - ل) = ۸، ل م = ۳$$

ان سے حاصل ہوتا ہے (ک - ۲ ک + ۸) (ک - ۲ ک - ۸) = ۳

$$یا ک - ۲ ک + ۸ ک - ۱۶ = ۳$$

یہ مساوات صریحاً پوری ہوتی ہے۔ جبکہ ک' = ۴ = ۰ یعنی ک = ۲، ک کی طرف ایک قیمت پر طور کرنا کافی ہوگا، ک = ۲ رکھنے سے

$$م + ل = ۲، م - ل = ۴، مینی ل = ۱، م = ۳$$

$$پس لا' = ۲ + لا + لا' = ۳ - لا + لا' = (لا' - لا + ۱) (لا' - لا + ۳)$$

$$اس لئے لا' - لا + لا' = ۱ اور لا' - لا + لا' = ۳$$

پس اہلیں - ۱ + لا' اور ۳ + لا' ہیں

۵۸۔ چوتھے درجہ سے اعلیٰ درجہ کی مساواتوں کا عام جبر یہ حل اب تک دریافت نہیں ہوا اور ایسبل کا یہ دعویٰ کہ ایسا حل معلوم کرنا ناممکن ہے ماہران ریاضی کے نزدیک عام طور پر مقبول ہے، لیکن اگر کسی مساوات کے سر عددی ہوں تو تقریبی قیمت معلوم کرنے کے لئے ہارسنس کا طریقہ استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اس کی توجہ سے کسی حقیقی اصل کی تقریبی قیمت معلوم ہو سکتی ہے، اس مضمون پر مفصل بحث مساواتوں کے نظریہ کی کتابوں میں ہو سکتی ہے۔ ۵۸۵۔ اب ہم چند متفرق مساواتوں پر بحث کر کے اس باب کو ختم کرنا چاہتے ہیں۔

مثال ۱۔ مساواتوں  $لا + ما + ی + ۱ = ۰$

$$۱ + لا + ب + ما + ج + ی + ۱ = ۰$$

$$۱ + لا + ب + ما + ج + ی + ۱ = ۰$$

$$۱ + لا + ب + ما + ج + ی + ۱ = ۰$$

کو حل کرو۔

نیچے سے شروع ہو کر ان مساواتوں کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳۸، ۵۳۹، ۵۴۰، ۵۴۱، ۵۴۲، ۵۴۳، ۵۴۴، ۵۴۵، ۵۴۶، ۵۴۷، ۵۴۸، ۵۴۹، ۵۵۰، ۵۵۱، ۵۵۲، ۵۵۳، ۵۵۴، ۵۵۵، ۵۵۶، ۵۵۷، ۵۵۸، ۵۵۹، ۵۶۰، ۵۶۱، ۵۶۲، ۵۶۳، ۵۶۴، ۵۶۵، ۵۶۶، ۵۶۷، ۵۶۸، ۵۶۹، ۵۷۰، ۵۷۱، ۵۷۲، ۵۷۳، ۵۷۴، ۵۷۵، ۵۷۶، ۵۷۷، ۵۷۸، ۵۷۹، ۵۸۰، ۵۸۱، ۵۸۲، ۵۸۳، ۵۸۴، ۵۸۵، ۵۸۶، ۵۸۷، ۵۸۸، ۵۸۹، ۵۹۰، ۵۹۱، ۵۹۲، ۵۹۳، ۵۹۴، ۵۹۵، ۵۹۶، ۵۹۷، ۵۹۸، ۵۹۹، ۶۰۰، ۶۰۱، ۶۰۲، ۶۰۳، ۶۰۴، ۶۰۵، ۶۰۶، ۶۰۷، ۶۰۸، ۶۰۹، ۶۱۰، ۶۱۱، ۶۱۲، ۶۱۳، ۶۱۴، ۶۱۵، ۶۱۶، ۶۱۷، ۶۱۸، ۶۱۹، ۶۲۰، ۶۲۱، ۶۲۲، ۶۲۳، ۶۲۴، ۶۲۵، ۶۲۶، ۶۲۷، ۶۲۸، ۶۲۹، ۶۳۰، ۶۳۱، ۶۳۲، ۶۳۳، ۶۳۴، ۶۳۵، ۶۳۶، ۶۳۷، ۶۳۸، ۶۳۹، ۶۴۰، ۶۴۱، ۶۴۲، ۶۴۳، ۶۴۴، ۶۴۵، ۶۴۶، ۶۴۷، ۶۴۸، ۶۴۹، ۶۵۰، ۶۵۱، ۶۵۲، ۶۵۳، ۶۵۴، ۶۵۵، ۶۵۶، ۶۵۷، ۶۵۸، ۶۵۹، ۶۶۰، ۶۶۱، ۶۶۲، ۶۶۳، ۶۶۴، ۶۶۵، ۶۶۶، ۶۶۷، ۶۶۸، ۶۶۹، ۶۷۰، ۶۷۱، ۶۷۲، ۶۷۳، ۶۷۴، ۶۷۵، ۶۷۶، ۶۷۷، ۶۷۸، ۶۷۹، ۶۸۰، ۶۸۱، ۶۸۲، ۶۸۳، ۶۸۴، ۶۸۵، ۶۸۶، ۶۸۷، ۶۸۸، ۶۸۹، ۶۹۰، ۶۹۱، ۶۹۲، ۶۹۳، ۶۹۴، ۶۹۵، ۶۹۶، ۶۹۷، ۶۹۸، ۶۹۹، ۷۰۰، ۷۰۱، ۷۰۲، ۷۰۳، ۷۰۴، ۷۰۵، ۷۰۶، ۷۰۷، ۷۰۸، ۷۰۹، ۷۱۰، ۷۱۱، ۷۱۲، ۷۱۳، ۷۱۴، ۷۱۵، ۷۱۶، ۷۱۷، ۷۱۸، ۷۱۹، ۷۲۰، ۷۲۱، ۷۲۲، ۷۲۳، ۷۲۴، ۷۲۵، ۷۲۶، ۷۲۷، ۷۲۸، ۷۲۹، ۷۳۰، ۷۳۱، ۷۳۲، ۷۳۳، ۷۳۴، ۷۳۵، ۷۳۶، ۷۳۷، ۷۳۸، ۷۳۹، ۷۴۰، ۷۴۱، ۷۴۲، ۷۴۳، ۷۴۴، ۷۴۵، ۷۴۶، ۷۴۷، ۷۴۸، ۷۴۹، ۷۵۰، ۷۵۱، ۷۵۲، ۷۵۳، ۷۵۴، ۷۵۵، ۷۵۶، ۷۵۷، ۷۵۸، ۷۵۹، ۷۶۰، ۷۶۱، ۷۶۲، ۷۶۳، ۷۶۴، ۷۶۵، ۷۶۶، ۷۶۷، ۷۶۸، ۷۶۹، ۷۷۰، ۷۷۱، ۷۷۲، ۷۷۳، ۷۷۴، ۷۷۵، ۷۷۶، ۷۷۷، ۷۷۸، ۷۷۹، ۷۸۰، ۷۸۱، ۷۸۲، ۷۸۳، ۷۸۴، ۷۸۵، ۷۸۶، ۷۸۷، ۷۸۸، ۷۸۹، ۷۹۰، ۷۹۱، ۷۹۲، ۷۹۳، ۷۹۴، ۷۹۵، ۷۹۶، ۷۹۷، ۷۹۸، ۷۹۹، ۸۰۰، ۸۰۱، ۸۰۲، ۸۰۳، ۸۰۴، ۸۰۵، ۸۰۶، ۸۰۷، ۸۰۸، ۸۰۹، ۸۱۰، ۸۱۱، ۸۱۲، ۸۱۳، ۸۱۴، ۸۱۵، ۸۱۶، ۸۱۷، ۸۱۸، ۸۱۹، ۸۲۰، ۸۲۱، ۸۲۲، ۸۲۳، ۸۲۴، ۸۲۵، ۸۲۶، ۸۲۷، ۸۲۸، ۸۲۹، ۸۳۰، ۸۳۱، ۸۳۲، ۸۳۳، ۸۳۴، ۸۳۵، ۸۳۶، ۸۳۷، ۸۳۸، ۸۳۹، ۸۴۰، ۸۴۱، ۸۴۲، ۸۴۳، ۸۴۴، ۸۴۵، ۸۴۶، ۸۴۷، ۸۴۸، ۸۴۹، ۸۵۰، ۸۵۱، ۸۵۲، ۸۵۳، ۸۵۴، ۸۵۵، ۸۵۶، ۸۵۷، ۸۵۸، ۸۵۹، ۸۶۰، ۸۶۱، ۸۶۲، ۸۶۳، ۸۶۴، ۸۶۵، ۸۶۶، ۸۶۷، ۸۶۸، ۸۶۹، ۸۷۰، ۸۷۱، ۸۷۲، ۸۷۳، ۸۷۴، ۸۷۵، ۸۷۶، ۸۷۷، ۸۷۸، ۸۷۹، ۸۸۰، ۸۸۱، ۸۸۲، ۸۸۳، ۸۸۴، ۸۸۵، ۸۸۶، ۸۸۷، ۸۸۸، ۸۸۹، ۸۹۰، ۸۹۱، ۸۹۲، ۸۹۳، ۸۹۴، ۸۹۵، ۸۹۶، ۸۹۷، ۸۹۸، ۸۹۹، ۹۰۰، ۹۰۱، ۹۰۲، ۹۰۳، ۹۰۴، ۹۰۵، ۹۰۶، ۹۰۷، ۹۰۸، ۹۰۹، ۹۱۰، ۹۱۱، ۹۱۲، ۹۱۳، ۹۱۴، ۹۱۵، ۹۱۶، ۹۱۷، ۹۱۸، ۹۱۹، ۹۲۰، ۹۲۱، ۹۲۲، ۹۲۳، ۹۲۴، ۹۲۵، ۹۲۶، ۹۲۷، ۹۲۸، ۹۲۹، ۹۳۰، ۹۳۱، ۹۳۲، ۹۳۳، ۹۳۴، ۹۳۵، ۹۳۶، ۹۳۷، ۹۳۸، ۹۳۹، ۹۴۰، ۹۴۱، ۹۴۲، ۹۴۳، ۹۴۴، ۹۴۵، ۹۴۶، ۹۴۷، ۹۴۸، ۹۴۹، ۹۵۰، ۹۵۱، ۹۵۲، ۹۵۳، ۹۵۴، ۹۵۵، ۹۵۶، ۹۵۷، ۹۵۸، ۹۵۹، ۹۶۰، ۹۶۱، ۹۶۲، ۹۶۳، ۹۶۴، ۹۶۵، ۹۶۶، ۹۶۷، ۹۶۸، ۹۶۹، ۹۷۰، ۹۷۱، ۹۷۲، ۹۷۳، ۹۷۴، ۹۷۵، ۹۷۶، ۹۷۷، ۹۷۸، ۹۷۹، ۹۸۰، ۹۸۱، ۹۸۲، ۹۸۳، ۹۸۴، ۹۸۵، ۹۸۶، ۹۸۷، ۹۸۸، ۹۸۹، ۹۹۰، ۹۹۱، ۹۹۲، ۹۹۳، ۹۹۴، ۹۹۵، ۹۹۶، ۹۹۷، ۹۹۸، ۹۹۹، ۱۰۰۰، ۱۰۰۱، ۱۰۰۲، ۱۰۰۳، ۱۰۰۴، ۱۰۰۵، ۱۰۰۶، ۱۰۰۷، ۱۰۰۸، ۱۰۰۹، ۱۰۱۰، ۱۰۱۱، ۱۰۱۲، ۱۰۱۳، ۱۰۱۴، ۱۰۱۵، ۱۰۱۶، ۱۰۱۷، ۱۰۱۸، ۱۰۱۹، ۱۰۲۰، ۱۰۲۱، ۱۰۲۲، ۱۰۲۳، ۱۰۲۴، ۱۰۲۵، ۱۰۲۶، ۱۰۲۷، ۱۰۲۸، ۱۰۲۹، ۱۰۳۰، ۱۰۳۱، ۱۰۳۲، ۱۰۳۳، ۱۰۳۴، ۱۰۳۵، ۱۰۳۶، ۱۰۳۷، ۱۰۳۸، ۱۰۳۹، ۱۰۴۰، ۱۰۴۱، ۱۰۴۲، ۱۰۴۳، ۱۰۴۴، ۱۰۴۵، ۱۰۴۶، ۱۰۴۷، ۱۰۴۸، ۱۰۴۹، ۱۰۵۰، ۱۰۵۱، ۱۰۵۲، ۱۰۵۳، ۱۰۵۴، ۱۰۵۵، ۱۰۵۶، ۱۰۵۷، ۱۰۵۸، ۱۰۵۹، ۱۰۶۰، ۱۰۶۱، ۱۰۶۲، ۱۰۶۳، ۱۰۶۴، ۱۰۶۵، ۱۰۶۶، ۱۰۶۷، ۱۰۶۸، ۱۰۶۹، ۱۰۷۰، ۱۰۷۱، ۱۰۷۲، ۱۰۷۳، ۱۰۷۴، ۱۰۷۵، ۱۰۷۶، ۱۰۷۷، ۱۰۷۸، ۱۰۷۹، ۱۰۸۰، ۱۰۸۱، ۱۰۸۲، ۱۰۸۳، ۱۰۸۴، ۱۰۸۵، ۱۰۸۶، ۱۰۸۷، ۱۰۸۸، ۱۰۸۹، ۱۰۹۰، ۱۰۹۱، ۱۰۹۲، ۱۰۹۳، ۱۰۹۴، ۱۰۹۵، ۱۰۹۶، ۱۰۹۷، ۱۰۹۸، ۱۰۹۹، ۱۱۰۰، ۱۱۰۱، ۱۱۰۲، ۱۱۰۳، ۱۱۰۴، ۱۱۰۵، ۱۱۰۶، ۱۱۰۷، ۱۱۰۸، ۱۱۰۹، ۱۱۱۰، ۱۱۱۱، ۱۱۱۲، ۱۱۱۳، ۱۱۱۴، ۱۱۱۵، ۱۱۱۶، ۱۱۱۷، ۱۱۱۸، ۱۱۱۹، ۱۱۲۰، ۱۱۲۱، ۱۱۲۲، ۱۱۲۳، ۱۱۲۴، ۱۱۲۵، ۱۱۲۶، ۱۱۲۷، ۱۱۲۸، ۱۱۲۹، ۱۱۳۰، ۱۱۳۱، ۱۱۳۲، ۱۱۳۳، ۱۱۳۴، ۱۱۳۵، ۱۱۳۶، ۱۱۳۷، ۱۱۳۸، ۱۱۳۹، ۱۱۴۰، ۱۱۴۱، ۱۱۴۲، ۱۱۴۳، ۱۱۴۴، ۱۱۴۵، ۱۱۴۶، ۱۱۴۷، ۱۱۴۸، ۱۱۴۹، ۱۱۵۰، ۱۱۵۱، ۱۱۵۲، ۱۱۵۳، ۱۱۵۴، ۱۱۵۵، ۱۱۵۶، ۱۱۵۷، ۱۱۵۸، ۱۱۵۹، ۱۱۶۰، ۱۱۶۱، ۱۱۶۲، ۱۱۶۳، ۱۱۶۴، ۱۱۶۵، ۱۱۶۶، ۱۱۶۷، ۱۱۶۸، ۱۱۶۹، ۱۱۷۰، ۱۱۷۱، ۱۱۷۲، ۱۱۷۳، ۱۱۷۴، ۱۱۷۵، ۱۱۷۶، ۱۱۷۷، ۱۱۷۸، ۱۱۷۹، ۱۱۸۰، ۱۱۸۱، ۱۱۸۲، ۱۱۸۳، ۱۱۸۴، ۱۱۸۵، ۱۱۸۶، ۱۱۸۷، ۱۱۸۸، ۱۱۸۹، ۱۱۹۰، ۱۱۹۱، ۱۱۹۲، ۱۱۹۳، ۱۱۹۴، ۱۱۹۵، ۱۱۹۶، ۱۱۹۷، ۱۱۹۸، ۱۱۹۹، ۱۲۰۰، ۱۲۰۱، ۱۲۰۲، ۱۲۰۳، ۱۲۰۴، ۱۲۰۵، ۱۲۰۶، ۱۲۰۷، ۱۲۰۸، ۱۲۰۹، ۱۲۱۰، ۱۲۱۱، ۱۲۱۲، ۱۲۱۳، ۱۲۱۴، ۱۲۱۵، ۱۲۱۶، ۱۲۱۷، ۱۲۱۸، ۱۲۱۹، ۱۲۲۰، ۱۲۲۱، ۱۲۲۲، ۱۲۲۳، ۱۲۲۴، ۱۲۲۵، ۱۲۲۶، ۱۲۲۷، ۱۲۲۸، ۱۲۲۹، ۱۲۳۰، ۱۲۳۱، ۱۲۳۲، ۱۲۳۳، ۱۲۳۴، ۱۲۳۵، ۱۲۳۶، ۱۲۳۷، ۱۲۳۸، ۱۲۳۹، ۱۲۴۰، ۱۲۴۱، ۱۲۴۲، ۱۲۴۳، ۱۲۴۴، ۱۲۴۵، ۱۲۴۶، ۱۲۴۷، ۱۲۴۸، ۱۲۴۹، ۱۲۵۰، ۱۲۵۱، ۱۲۵۲، ۱۲۵۳، ۱۲۵۴، ۱۲۵۵، ۱۲۵۶، ۱۲۵۷، ۱۲۵۸، ۱۲۵۹، ۱۲۶۰، ۱۲۶۱، ۱۲۶۲، ۱۲۶۳، ۱۲۶۴، ۱۲۶۵، ۱۲۶۶، ۱۲۶۷، ۱۲۶۸، ۱۲۶۹، ۱۲۷۰، ۱۲۷۱، ۱۲۷۲، ۱۲۷۳، ۱۲۷۴، ۱۲۷۵، ۱۲۷۶، ۱۲۷۷، ۱۲۷۸، ۱۲۷۹، ۱۲۸۰، ۱۲۸۱، ۱۲۸۲، ۱۲۸۳، ۱۲۸۴، ۱۲۸۵، ۱۲۸۶، ۱۲۸۷، ۱۲۸۸، ۱۲۸۹، ۱۲۹۰، ۱۲۹۱، ۱۲۹۲، ۱۲۹۳، ۱۲۹۴، ۱۲۹۵، ۱۲۹۶، ۱۲۹۷، ۱۲۹۸، ۱۲۹۹، ۱۳۰۰، ۱۳۰۱، ۱۳۰۲، ۱۳۰۳، ۱۳۰۴، ۱۳۰۵، ۱۳۰۶، ۱۳۰۷، ۱۳۰۸، ۱۳۰۹، ۱۳۱۰، ۱۳۱۱، ۱۳۱۲، ۱۳۱۳، ۱۳۱۴، ۱۳۱۵، ۱۳۱۶، ۱۳۱۷، ۱۳۱۸، ۱۳۱۹، ۱۳۲۰، ۱۳۲۱، ۱۳۲۲، ۱۳۲۳، ۱۳۲۴، ۱۳۲۵، ۱۳۲۶، ۱۳۲۷، ۱۳۲۸، ۱۳۲۹، ۱۳۳۰، ۱۳۳۱، ۱۳۳۲، ۱۳۳۳، ۱۳۳۴، ۱۳۳۵، ۱۳۳۶، ۱۳۳۷، ۱۳۳۸، ۱۳۳۹، ۱۳۴۰، ۱۳۴۱، ۱۳۴۲، ۱۳۴۳، ۱۳۴۴، ۱۳۴۵، ۱۳۴۶، ۱۳۴۷، ۱۳۴۸، ۱۳۴۹، ۱۳۵۰، ۱۳۵۱، ۱۳۵۲، ۱۳۵۳، ۱

لا (ا + ف + ا + ق + ا + ر) = ک

اور ب، ج، د مساوات

ت + ا + ف + ا + ق + ت + ر = ۰

کی اصلیں ہیں۔

لہذا ا + ف + ا + ق + ا + ر = (ا - ب) (ا - ج) (ا - د)

پس (ا - ب) (ا - ج) (ا - د) لا = ک

اس سے لا کی قیمت معلوم ہوتی ہے اور تشاکل سے ما، ی اور و کی قیمتیں بھی لکھی جاسکتی ہیں۔

نتیجہ صریح - اگر مساواتیں یہ ہوں :-

لا + ا + ی + و = ا

ا + لا + ب + ج + ی + د = گ

ا + لا + ب + ا + ج + ی + د = ک<sup>۱</sup>

ا + لا + ب + ا + ج + ی + د = ک<sup>۲</sup>

حسب سابق عمل کرنے سے

لا (ا + ف + ا + ق + ا + ر) = ک<sup>۱</sup> + ک<sup>۲</sup> + ق + ک + ر

۱ (ا - ب) (ا - ج) (ا - د) لا = (ک - ب) (ک - ج) (ک - د)

اس طرح سے لا کی قیمت معلوم ہو گئی اور ما، ی اور و کی قیمتیں تشاکل سے لکھی جاسکتی ہیں۔

آپ کی مساواتوں کا حل نامعلوم سروں کے استعمال کرنے سے آسانی سے حاصل ہو جاتا ہے۔

مثال ۲ - ثابت کرو کہ مساوات

(۱-۱) (۱-۱) (ب-۱) (ج-۱) - (۱-۱) (گ-۱) (ب-۱) (ج-۱) + (۱-۱) (ف-۱) (گ-۱) = ۰  
 کی اسلیں سب حقیقی ہیں۔  
 مساوات مفروضہ سے

(۱-۱) (۱-۱) (ب-۱) (ج-۱) - (۱-۱) (گ-۱) (ب-۱) (ج-۱) + (۱-۱) (ف-۱) (گ-۱) = ۰  
 - (۱-۱) (ف-۱) (گ-۱) = ۰

فرض کرنا کہ ق مساوات درجہ دوم

(۱-۱) (ب-۱) (ج-۱) - (۱-۱) (ف-۱) = ۰

کی اسلیں ہیں، نیز فرض کرنا کہ ق سے کم نہیں ہے۔ اس مساوات کو حل کر لے سے

$$۱-۱ = ۱-۱ + ۱-۱ (ب-۱) (ج-۱) + ۱-۱ (ف-۱) (گ-۱) \dots (۱)$$

اور نیز ہم کی قیمت ب سے ج سے بڑی ہے، پس ف بڑا ہے ب یا ج سے اور  
 ق چھوٹا ہے ب یا ج سے۔

مساوات مفروضہ میں لا کی بجائے بالترتیب قیمتیں

$$+ \infty, ۱-۱, ۱-۱, ۱-۱, ۱-۱$$

درج کر لے سے نتائج اذیل

$$+ \infty, ۱-۱ (گ-۱) (ب-۱) (ج-۱) + ۱-۱ (گ-۱) (ب-۱) (ج-۱) + ۱-۱ (ف-۱) (گ-۱) (ج-۱) = ۰$$

رہا ہے کہ یہ کیونکہ (ب-۱) (ج-۱) = (ب-۱) (ج-۱) (ج-۱) (ج-۱)

نہایت کی بین قیمتیں ہیں جن میں سے ایک ف سے بڑی ہے دوسری  
 اور ق کے درمیان ہے اور دوسری ق سے کم ہے۔

اگر ف = ق تو (۱-۱) سے (ب-۱) (ج-۱) = (ب-۱) (ج-۱) = ۰، اس لئے

ب = ج اور ف = ۰، اس صورت میں مساوات مفروضہ یہ ہو جاتی ہے۔

$$(۱-۱) (ب-۱) (ج-۱) - (۱-۱) (گ-۱) (ب-۱) (ج-۱) + ۱-۱ = ۰$$

پس سب اصلیں حقیقی ہیں۔

اگر ن مساوات کی ایک اصل ہو تو تحقیقاً بالاناکام رہی ہے کیونکہ اس سے ثابت ہوا  
ظاہر ہوتا ہے کہ  $ق$  اور  $و$  کے درمیان صرف ایک اصل ہے اور وہ  $ق$  ہے۔ لیکن  
چونکہ حسب سابق  $ق$  سے کم بھی ایک حقیقی اصل ہے اس لئے تیسری اصل کو لازماً حقیقی ہونا  
چاہیے۔ اسی وجہ سے اگر ن مساوات مفروضہ کی اصل ہو تو یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ تمام  
اصلیں حقیقی ہیں۔

یہ مساوات جس پر یہاں بحث کی گئی ہے بہت اہمیت رکھتی ہے۔ ہندو تصحیحات میں  
یہ بار بار آتی ہے اور میزکیمی کے نام سے موسوم ہوتی ہے۔

۵۸۶۔ علی ریاضی کی اکثر مثالوں میں مساواتوں کا نظام ذیل بکثرت استعمال  
ہوتا ہے۔

مثال۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$۱ = \frac{لا}{ا + ل} + \frac{ما}{ب + ل} + \frac{می}{ج + ل}$$

$$۱ = \frac{لا}{ا + م} + \frac{ما}{ب + م} + \frac{می}{ج + م}$$

$$۱ = \frac{لا}{ا + ن} + \frac{ما}{ب + ن} + \frac{می}{ج + ن}$$

طر میں ذیل کی مساوات پر غور کرو۔

$$\frac{(لا - طه)(ما - طه)(می - طه)}{(ا + طه)(ب + طه)(ج + طه)} = ۱ = \frac{لا}{ا + طه} + \frac{ما}{ب + طه} + \frac{می}{ج + طه}$$

اور فی الحال لا، ما، می کو معلوم مقدار میں تصور کرو۔

جب اس مساوات کو کسروں سے پاک کیا جائے تو یہ طر میں درجہ  
دوم کی مساوات ہوتی ہے اور معادلات معلومہ کی وجہ سے طر کی تین  
قیمتوں طر = ل، طر = م، طر = ن سے پوری ہوتی ہے۔ پس یہ  
ایک مساوات متماثلہ ہے۔ (دیکھو دفعہ ۳۱۰)۔



$$۱۳- لا^۱-۳ لا^۲-۶ لا^۳-۲ = ۱۴- لا^۱-۲ لا^۲-۱۰ لا^۳+۳ =$$

$$۱۵-۲ لا^۱-۲۰ لا^۲+۳۳ لا^۳-۲۰ لا^۴+۲ =$$

$$۱۶- لا^۱-۶ لا^۲-۱۱ لا^۳+۱۴ لا^۴+۶ لا^۵+۱ =$$

$$۱۷- لا^۱-۲ لا^۲+۹ لا^۳+۱۲ لا^۴-۸۰ لا^۵-۱۹۲ =$$

$$۱۸- ق اور ر کا باہمی ربط دریافت کرو کہ مساوات لا^۱+ق لا^۲+ر =$$

ذیل کی شکل لا^۱ = (لا^۱+لا^۲+ب) میں رکھی جاسکے۔

$$اس سے مساوات ۸ لا^۱-۳۶ لا^۲+۲۷ = کو حل کرو۔$$

$$۱۹- اگر لا^۱+۳ لا^۲+۳ ق لا^۳+لا^۴+۲ ف لا^۵+ق میں ایک اجز$$

ضروری مشترک ہو تو ثابت کرو کہ

$$۲ (ف^۱-ق) (ق^۱-ف) (ق^۱-ف) (ق^۱-ف) =$$

اگر ان میں دو اجزائے ضروری مشترک ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ف^۱-ق = ق اور ق^۱-ف = ر =$$

$$۲۰- اگر مساوات لا^۱+۳ لا^۲+۳ ب لا^۳+ج لا^۴+د = کی دو اصلیں مساوی$$

ہوں تو ثابت کرو کہ ان میں سے ہر ایک  $\frac{ب-ج}{(ب-ج)}$  کے مساوی ہے۔

$$۲۱- ثابت کرو کہ مساوات لا^۱+ف لا^۲+ق لا^۳+م لا^۴+س = کو بطور ایک$$

مساوات درجہ دوم کے حل کیا جاسکتا ہے اگر  $ف^۱ = س$

$$۲۲- مساوات لا^۱-۱۸ لا^۲+۱۶ لا^۳+۲۸ لا^۴-۳۲ لا^۵+۸ = کی ایک اصل$$

۲-۱۶ ہے، مساوات کو حل کرو،











۳۳۔ ایک آدمی اور اُس کے لواحقین ایک ہفتہ میں ۲۰ ذیل روٹیاں صرف کرتے ہیں، اگر اس کی آمدنی ۵ فیصد بڑھ جائے اور روٹی کی قیمت میں  $\frac{1}{2}$  فیصد اضافہ ہو جائے تو اُسے چھ پچیس فی ہفتہ فائدہ ہوتا ہے، لیکن اگر آمدنی کی شرح  $\frac{1}{2}$  فیصدی کم ہو جائے، ضروری روٹی کی قیمت ۱۰ فیصدی گر جائے تو اُسے فی ہفتہ  $\frac{1}{2}$  اپنی نقصان ہوتا ہے۔ اُس کی ہفتہ واری مزدوری اور روٹی کی قیمت دریافت کرو۔

۲۵۔ تیار عدد سلسلہ جسامید میں ہیں ان کا حاصل جمع ۴۸ ہے، سرور کے عددوں کے حاصل ضرب کو وسطی عددوں کے حاصل ضرب کے ساتھ نسبت ۳۵:۲۷ ہے، ان عددوں کو معلوم کرو۔  
۶۶۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(۱) \quad (ا + ب)(ج - لا) + (ج - لا)(ا - ب) = ۰$$

$$(۲) \quad \frac{(ا - لا)(ا - ب)}{لا - ا - ب} = \frac{(ج - لا)(ج - لا)}{د - ج - لا} \quad \text{(ریاضی ٹرائی پاس)}$$

$$۲۷۔ \text{اگر } لا - لا + لا + لا + لا + لا = ۰ \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$(ا + ب + ج + لا)(ا + ب - ج - لا) = ۴(ب + ج + ا + لا)$$

$$\text{اور اگر } لا - لا + لا + لا = ۰ \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$(ا + ب + ج)^2 = ۲۷ لا ب ج$$

۲۸۔ ایک ریل کے روانہ ہونے کے ایک گھنٹہ بعد اُس کو کوئی حادثہ پیش آتا ہے جسکی وجہ سے وہ ایک گھنٹہ تک ٹرک جاتی ہے اور بعد ازیں اپنی پہلی رفتار کی پہل رفتار کے ساتھ چلتی ہے اور منزل مقصود پر وقت معینہ سے ۳ گھنٹے پہنچتی ہے۔ اگر حادثہ ۵۰ میل اور آگے چل کمیشن آتا تو بقدر  $\frac{1}{2}$  گھنٹے کے یہ جلدی پہنچ جاتی۔ مسافت کا طول دریافت کرو۔





$$(۲) \quad ۱ + ی - لا = ۱ + لا - ما - ی = ۱ \quad \text{کو حل کر دو۔}$$

[اگر آپس کالج یکسٹورڈ]

۴۳۔ اگر لا، ما، ی سلسلہ موسیقی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوک} (لا + ی) + \text{لوک} (لا - ما - ی) = ۲ \text{ لوک} (لا - ی)$$

$$۴۵۔ \text{ثابت کرو کہ} \quad \frac{۱}{۲} + \left(\frac{۱}{۳}\right) \frac{۳ \times ۲}{۳ \times ۲} + \left(\frac{۱}{۴}\right) \frac{۳ \times ۲}{۳ \times ۲} + \dots = \frac{۱}{۲} \quad \text{[ایسٹ کالج یکسٹورڈ]}$$

$$۴۶۔ \text{اگر} \quad \frac{۳ + لا + ما}{۳ - ب} = \frac{۳ + ی + ما}{۳ - ج} = \frac{۳ + ی + لا}{۳ - ج} \quad \text{تو ثابت کرو کہ}$$

$$۵ (لا + ما + ی) (ج + ب) = (۳ - ب) (۳ - ج) (۳ - لا + ما + ی)$$

[اگر آپس کالج یکسٹورڈ]

۴۷۔ ۱۶ حروف صحیح اور ۵ حروف علت سے ۴۰ حروف وائے کتنے الفاظ بن سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک کے بیچ میں دو مختلف حروف علت ہوں اور دونوں سروں پر ایک ہی یا مختلف حروف صحیح ہوں۔

۴۸۔ کسی مسئلہ پر ۶۰۰ اشخاص نے رائے دی اور مسئلہ مسترد ہو گیا۔ انہی اشخاص نے اسی مسئلہ پر از سر نو رائے دی اور جتنی کثرت رائے سے پہلے یہ مسئلہ مسترد ہوا تھا اب اس سے اگنی رایوں کی کثرت سے یہ مسئلہ منظور ہو گیا۔ بعد کی کثرت کی نسبت ابتدائی کثرت کے ساتھ ۸ : ۷ ہے۔ بتاؤ کہ کتنے اشخاص نے اپنی رائے بدل لی۔

[ایسٹ جون کالج یکسٹورڈ]

$$۴۹۔ \text{ثابت کرو کہ}$$

$$\text{لوک} \frac{(۱ + لا)^{۲-۱}}{(۱ - لا)^{۲-۱}} = لا + \frac{لا^۲}{۳ \times ۲} + \frac{لا^۳}{۵ \times ۴} + \dots$$

[ایسٹ جون کالج یکسٹورڈ]

۵۰۔ آدمیوں کی ایک جماعت کو تین قطاروں کے ایک مجموعہ مربع کی شکل میں کھڑا کیا گیا اور یہ دیکھا گیا کہ اگر ۲۵ آدمی زیادہ ہوتے تو ان کو ایک ایسے نموس مربع کی شکل میں کھڑا کیا جاسکتا تھا جس کے ہر ایک ضلع میں آدمیوں کی تعداد مجموعہ مربع کے ہر ایک ضلع میں آدمیوں کی تعداد کے جذر سے بقدر ۲۲ کے زیادہ ہوتی۔ آدمیوں کی تعداد معلوم کرو۔

۵۱۔ مساوات ذیل کو حل کرو۔

$$(1) : \text{ما} (1 + 1) \text{ما} + 2 \text{ما} (1 - 1) = 3 \text{ما} (1 - 1) \text{ما}$$

$$(2) (1 - 1) \text{ما} (1 - 1) \text{ما} (1 - 1) \text{ما} = (1 - 1) \text{ما} (1 - 1) \text{ما} (1 - 1) \text{ما}$$

$$52 - \text{ثابت کرو کہ } 1 + \frac{2}{4} + \frac{5 \times 2}{12 \times 4} + \frac{8 \times 5 \times 2}{18 \times 12 \times 4} + \dots = 1$$

(سڈنی کالج، کیمبرج)

$$53 - \text{ما} (5 - 1) \text{ما} - \text{ما} (5 - 1) \text{ما} = 1$$

(کونینز کالج، کیمبرج)

۵۴۔ دو برتن ہیں جن میں سے ایک میں اگلیں شراب ہے اور دوسرے میں بگلیں پانی ہر ایک برتن میں سے جگلیں نکال کر دوسرے برتن میں منتقل کر دئے گئے ہیں۔ یہی عمل بارہا کیا گیا ہے، اگر ج (ا + ب) = ا ب تو ثابت کرو کہ پہلے عمل کے بعد ہر ایک برتن میں شراب کی مقدار وہی رہے گی۔

۵۵۔ م اور ن کا اوسط حسابی اور ا اور ب کا اوسط ہندسی دونوں

$$\frac{م + ا + ب}{3} \text{ کے مساوی ہیں، م اور ن کو ا اور ب کی رقوم میں}$$

دریافت کرو۔

۵۶۔ اگر (ا + ب) ایسے ہوں کہ ا ن کا حاصل جمع مستقل ہو اور اگر (ی + لا)

(۲ + لا) ایسے ہوں جیسے م ای تو ثابت کرو کہ (۲ + ما) (ی + لا)

..... ہے جیسے م ای۔ (ای مینول کالج، کیمبرج)



۵۷۔ ثابت کرو کہ اگر  $n$  بڑا ہو  $3$  سے تو

$$2 \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n = 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n = 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$$

(اگر  $n$  بیست کا کچھ بڑا ہو)

۵۸۔ معادلات سے  $n$  کی طرف اشارہ کرو۔

$$(1) \quad 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

$$(2) \quad 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

۵۹۔ ثابت کرو کہ اگر  $n$  بڑا ہو  $3$  سے تو  $n$  کی طرف اشارہ کرو۔

دو باہم مساوی ہونگی۔

۶۰۔ ایک قوم میں کل شخصوں کی تعداد  $n$  ہے، ان میں سے  $a$  فیصد لکھ پڑھ سکتے ہیں،  $b$  فیصد مردوں میں سے  $b$  فیصد اور عورتوں میں سے  $c$  فیصد لکھ پڑھ سکتے ہیں، بتاؤ کہ اس قوم میں کتنے مرد اور کتنی عورتیں ہیں۔

$$61 - \text{اگر } a = \left( \frac{1}{b} \right) \text{ تو ثابت کرو کہ } \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\left( \frac{1}{b} \right) = \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

(لندن یونیورسٹی)

۶۲۔ ثابت کرو کہ  $(1 - a + a^2 - a^3 + \dots) = \frac{1}{1 - a}$  کی تفصیل میں لکھا ہوا ہے۔

$$63 - \text{سادات } \frac{1}{1 - a} + \frac{1}{1 - b} = \frac{1}{1 - a} + \frac{1}{1 - b}$$

(لندن یونیورسٹی)

۶۴۔  $n$  رقموں کا (۱) سلسلہ حسابیہ (۲) سلسلہ موسیقیہ معلوم کرو۔ جن میں سے





۸۔ ثابت کرو کہ اگر  $n$  بالترتیب  $m, m+1, m+2$  کی شکل کا ہو تو  $\frac{m+1}{m+2} - \frac{m}{m+1}$  کی تفصیل میں  $n$  کا سر بالترتیب  $(1-\frac{1}{m+2}), (1-\frac{1}{m+1}), (1-\frac{1}{m})$  ہوگا۔

۹۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(1) \quad \frac{1}{a} = \frac{b}{c} = \frac{y}{x+y+z}$$

$$(2) \quad 3 = y + x + z = \frac{y}{a} + \frac{x}{b} + \frac{z}{c} = \frac{y}{a} + \frac{x}{b} + \frac{z}{c}$$

(یونیورسٹی کالج - کنستورڈ)

۱۰۔ اگر سلسلہ  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  سلسلہ حسابیہ ہو تو  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  کے مساوی ہے اور اگر یہ سلسلہ موسیقیہ ہو تو یہ  $3, 4, 5, 6$  کے مساوی ہے اور  $b$  کو مثبت صحیح عدد مان کر ان کی نسبتیں دریافت کرو۔

۱۱۔ اگر  $a, b, c$  ثابت کرو کہ  $a, b, c$  کی کوئی حقیقی قیمت مساوات مذکور کو پورا نہ کرے گی سوائے اس صورت کے جبکہ  $a > b > c$ ۔

۱۲۔ اگر  $(1+a)(1+b)(1+c)$  اور پھوٹا ہو  $a, b, c$  سے تو  $a, b, c$  کی صحیح عددی قیمت دریافت کرو۔

۱۳۔ اگر ان صحیح عددوں کی تعداد جن کے لوکارٹوں کا مینر  $f$  ہو  $F$  اور ان صحیح عددوں کی تعداد جن کے منکافینوں کے لوکارٹوں کا مینر  $f$  ہو  $F$  ہو تو ثابت کرو کہ

$$F - f = 1$$

۸۴۔ کتنے طریقوں سے ۲۰ شلنگ ۵ آدمیوں میں اس طرح تقسیم ہو سکتے ہیں کہ کسی آدمی کو ۳ شلنگ سے کم نہ ملیں۔  
 ۸۵۔ ایک شخص کی یہ خواہش ہے کہ اُس کی دونوں تاباں لڑکیوں کو سن بونچ پر پہنچنے پر مساوی رقم ملیں۔ اس غرض کے لئے اُس نے یہ وصیت کی کہ بڑی لڑکی کو ایک رقم کا جو اُس نے اپنی وفات کے وقت ۸۸ پیم فیصدی والے اسٹاک میں جمع کی اُمس کمال سود ملے اور چھوٹی لڑکی کو اس رقم کا کل سود ملے جو پہلی رقم سے بعد ۳۵۰۰ پونڈ کم ہے اور ۶۳ پر ۳ فیصدی فی سال والے اسٹاک میں اُسی وقت جمع کی گئی ہے اگر ان لڑکیوں کی عمریں ۱۸ کے باپ کی وفات کے وقت بالترتیب ۱۶ اور ۱۴ سال کی ہوں تو بتاؤ کہ دونوں صورتوں میں کتنی رقم جمع کی گئی ہے اور ہر ایک لڑکی کو کتنی رقم ملے گی۔

۸۶۔ ۷ کے پیمانہ میں ایک عدد تین ہندسوں پر مشتمل ہے، اگر اسی عدد کو ۹ کے پیمانہ میں لکھا جائے تو اس کے عدد بلحاظ ترتیب الٹ جاتے ہیں، بتاؤ کہ وہ کونسا عدد ہے۔  
 ۸۷۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی م رقموں کا حاصل جمع بعد کی ن رقموں کے حاصل جمع کے مساوی ہو اور نیز بعد کی ف رقموں کے حاصل جمع کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ

$$(م + ن) \left( \frac{۱}{م} - \frac{۱}{ن} \right) = (م + ف) \left( \frac{۱}{م} - \frac{۱}{ف} \right)$$

(سینٹ جانز کالج - کمبرج)

۸۸۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{(۱-۱)} + \frac{۱}{(۱-۱)} + \frac{۱}{(۱-۱)} = \frac{۱}{(۱-۱)} + \frac{۱}{(۱-۱)} + \frac{۱}{(۱-۱)}$$

(آر۔ ایم۔ ۱۰ ویلیج)

۸۹۔ اگر م منفی یا مثبت ہو اور ایک سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ  $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots$

(ایمینیول کالج - کمبرج)

$$+ (۲ - ۱) < ۱ + ۲$$





$$1 + 5\lambda + 4\lambda^2 + 3\lambda^3 + \dots$$

۱.۱۔ اگر 'ا' ب 'ج' سلسلہ موسیقی میں ہوں تو

$$(1) \quad 2 < \frac{b + c}{b - c} + \frac{b + 1}{b - 1} \quad (1)$$

$$(2) \quad b^2(1 - c) = 2 \{ c^2(b - 1) + (1 - c)(b - c) \}$$

[پیمبرک کالج، کبیرج]

۱.۲۔ اگر 'ا' ب 'ج' تمام متغیر حقیقی ہوں اور لا<sup>۲</sup> = ۳ ب<sup>۲</sup> لا + ۲ ج<sup>۲</sup> پورا تقسیم ہو جائے لا۔ اور نیز لا۔ ب پر تو ثابت کرو کہ ۱ = ب = ج یا لا<sup>۲</sup> = ۲ ب<sup>۲</sup> (میس کالج - آکسفورڈ)

۱.۳۔ ثابت کرو کہ تین متغیر طاق عددوں کے مربعوں کے حاصل جمع میں جب اکا اضافہ کر دیا جائے تو مجموعہ ۱۲ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے لیکن ۲۲ پر تقسیم نہیں ہوتا۔

۱.۴۔ ثابت کرو کہ اگر ۱ منفی ہو تو لا<sup>۲</sup> + ۲ ب لا + ج کی بڑی سے بڑی قیمت اور اگر ۱ مثبت ہو تو چھوٹی سے چھوٹی قیمت  $\frac{b + c}{b - c}$  ہوگی۔

اگر لا<sup>۲</sup> + ما<sup>۲</sup> + ی<sup>۲</sup> + ما<sup>۲</sup> + ی<sup>۲</sup> لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> ما<sup>۲</sup> = ۲ لا ما (لا + ما + ی) اور لا، ما، ی سب حقیقی ہوں تو ثابت کرو کہ لا = ما = ی (سینٹ ہائز کالج، کیمبرج)

۱.۵۔ ثابت کرو کہ  $\frac{1 - \lambda^2}{\lambda}$  کی تفصیل یہ ہے

$$\dots + \frac{\lambda^9}{2} \times \frac{4 \times 5 \times 3 \times 1}{8 \times 6 \times 4 \times 2} + \frac{\lambda^3}{4} \times \frac{3 \times 1}{2 \times 2} + \frac{\lambda}{2}$$

۱.۶۔ اگر ۱، ۲ مساواتوں

$$\lambda^2 + f\lambda + q = 0, \quad \lambda^2 + f\lambda + n + q = 0.$$



کی اصلیں ہوں جہاں ن کوئی جفت صحیح عدد ہے تو ثابت کرو کہ  
 $\frac{ع}{ب} = \frac{ج}{د}$  مساوات لا<sup>ن</sup> + ۱ + (لا + ۱)<sup>ن</sup> = ۰ کی اصلیں ہیں۔

[پہرک کا ج - کمبرج]

$$۱۰۷ - لا متناہی سوسر سلسل + \frac{ب}{+۱} + \frac{ب}{+۱} + \frac{ب}{+۱} + \dots$$

$$اور ج + \frac{د}{+ج} + \frac{د}{+ج} + \frac{د}{+ج} + \dots$$

کے مربوں کا فرق معلوم کرو۔

[کرائسٹ کا ج - کمبرج]

۱۰۸۔ ایک خاص رقم چند آدمیوں میں تقسیم کی گئی ہے، دوسرے آدمی کو پہلے آدمی سے ایک شلنگ زیادہ ملتا ہے، تیسرے آدمی کو دوسرے سے ۲ شلنگ زیادہ ملے اور آخری آدمی کو ۳ پونڈ ۷ شلنگ تو آدمیوں کی تعداد اور رقم کی مقدار معلوم کرو۔  
 ۱۰۹۔ معادلات ذیل کو حل کرو۔

$$(۱) \frac{۲}{۱} = \frac{لا + ۱}{ب} + \frac{ی}{ج} = \frac{ی + لا}{ج + ۱} + \frac{۱}{ب} = \frac{ی + ۱}{ب + ج} + \frac{لا}{۱}$$

$$(۲) \frac{۳}{۱} = \frac{لا + ۱}{ب} + \frac{۱}{ج} = \frac{لا + ۱}{ب} + \frac{۱}{ج} = \frac{لا + ۱}{ب} + \frac{۱}{ج} = \frac{لا + ۱}{ب} + \frac{۱}{ج}$$

۱۱۰۔ اگر لا اور ب مثبت اور غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(ن - ۱) < (ن - ۱) (ب - ۱) \frac{۱-۵}{۲}$$

[سینٹ کیتھرین کا ج - کمبرج]

۱۱۱۔ ۴۹۳ کو کسر مسلسل کی شکل میں لاؤ اور اس سے لا اور ما کی وہ چھوٹی

سے چھوٹی قیمتیں معلوم کرو جو مساوات ۳۹۶ لا - ۳۶۳ = ۱۲ کو پورا کریں۔  
۱۱۲ - ب اور ج ملکہ ایک کام کو جتنے دن میں ختم کرتے ہیں اس سے م گئے  
وقت میں ڈا کیلا اسی کام کو کر سکتا ہے، لا اور ج ملکہ اسی کام کو جتنے دنوں  
میں ختم کر سکتے ہیں ب کیلا اس سے ن گئے وقت میں اُسے کر سکتا ہے، اسی طرح سے  
لا اور ب ل کر اس کام کو جتنے دنوں میں ختم کر سکتے ہیں اس سے ف گئے وقت  
میں ج کیلا اس کام کو ختم کر لیتا ہے۔ ثابت کر دو کہ لا ب اور ج کو اس کام  
کے جدا گانہ ختم کرنے میں جتنے دن لگتے ہیں وہ اس تناسب م + ن + ۱ : ۱ +

$$ف + ۱ میں ہیں۔$$

$$نیز ثابت کر دو کہ \frac{م}{۱+م} + \frac{ن}{۱+ن} + \frac{ف}{۱+ف} = ۲$$

[آر ایم، اے۔ ویرج]

۱۱۳ - ایک آبی شفا خانہ کے اخراجات کا کچھ حصہ مستقل ہے اور کچھ حصہ اس کے  
مقیموں کی تعداد پر موقوف ہے، ہر ایک مقیم ۶۵ پونڈ سالانہ ادا کرتا ہے اگر مقیموں  
کی تعداد ۵۰ ہو تو سالانہ فائدہ ۹ پونڈ فی کس ہوتا ہے، لیکن اگر تعداد ۶۰ ہو تو  
فائدہ ۱۰۵ پونڈ ۱۳ شلنگ ۴ پنس فی کس ہوتا ہے مگر مقیموں کی تعداد ۸۰ ہو تو ہتاؤ  
کہ فی کس کتنا فائدہ ہوگا۔

۱۱۴ - اگر لا = ۲ لا - ما اور لا بڑا ہو ا سے تو ثابت کر دو کہ

$$م (لا' + \frac{لا'}{۵} + \frac{لا'}{۵} + \dots) = م' + \frac{ما'}{۲} + \frac{ما'}{۲} + \dots$$

[پیشروں - کیمرج]

۱۱۵ - اگر  $\frac{لا}{۱-۲} = \frac{ما}{۱-۲} = \frac{۱}{ب}$  اور لا = ج' تو ثابت کر دو کہ

جب لا اور ج غیر مساوی ہوں تو

$$(۱-ج') - ب'ج' = - اور لا' + ج' - ب' = -$$





۱۲۷۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$(1) \quad 9 + 12\sqrt{2} = 9 + 12\sqrt{2} \quad \therefore \quad 12\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \quad \therefore \quad 12\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

$$(2) \quad (12\sqrt{2})^2 = (12\sqrt{2})^2 \quad \therefore \quad 144 \times 2 = 144 \times 2 \quad \therefore \quad 288 = 288$$

۱۲۸۔ ذیل کے جملات کی انتہائی قیمتیں معلوم کرو۔

$$(1) \quad 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 24\sqrt{2} \quad \therefore \quad 24\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$$

$$(2) \quad \frac{12\sqrt{2} - 12\sqrt{2}}{12\sqrt{2} - 12\sqrt{2}} = \frac{0}{0} \quad \therefore \quad \frac{0}{0} = \frac{0}{0}$$

(لنڈن یونیورسٹی)

۱۲۹۔ دو عددوں کا حاصل ضرب ۱۹۲ ہے اور ان عددوں کے جو عا د اعظم اور ذوا اصغاف اقل ہیں ان کے اوسط حسابیہ اور اوسط موسیقیہ کا خارج قسمت  $\frac{25}{8}$  ہے۔  
 یہ تین عددوں کو معلوم کرو۔

(آر ایم اے - دو بج)

۱۳۰۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$\begin{cases} 12\sqrt{2} = 12\sqrt{2} - 12\sqrt{2} - 12\sqrt{2} \\ 12\sqrt{2} = 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} \\ 12\sqrt{2} = 12\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} \\ 12\sqrt{2} = 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 12\sqrt{2} \end{cases}$$

۱۳۱۔ ثابت کرو کہ لائناری تک ذیل کے سلسلہ

$$\frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} - \frac{1}{6 \times 7} + \dots$$

(ریاضی ثنائی پاس)

$$= \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} - \frac{1}{6 \times 7} + \dots$$

۱۳۱۔ تین ہندسوں کا ایک عدد اس قسم کا ہے کہ ہندسوں کی ترتیب الٹ دینے سے اس عدد کی قیمت دوگنی ہو جاتی ہے، ثابت کرو پہلے اور آخری ہندسہ سے جو عدد بنتا ہے اس پر بھی یہی امر صادق آئیگا۔ نیز ثابت کرو کہ ایسا عدد نقد کے ہر تین پیناں میں سے صرف ایک میں حاصل ہو سکتا ہے۔

(بعضی ثنائی پاس)

۱۳۲۔  $\frac{10^3 - 1}{9} = \frac{10^2 - 1}{9} + \frac{10 - 1}{9}$  اور  $10^3 - 1 = 999$  کے ماحول ضرب میں  $10^2 - 1$  اور  $10 - 1$  کے سر معلوم کرو۔

۱۳۳۔ ایک حریار بازار کے سامنے زمین کا ایک ٹکڑا خریدنا چاہتا ہے مگر اس کی شکل کو ایک ایسا سنہیل ہونا چاہیے کہ اس کی پیشانی کے طول کا تین گنا اور اس کی گہرائی کا دو گنا ۹۹ گر کے مساوی ہو، بتاؤ کہ وہ زیادہ سے زیادہ کتنے مربع گز زمین لے سکتا ہے۔

۱۳۴۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} & (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\ & (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\ & (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + n) \end{aligned}$$

۱۳۵۔ ج کی ایسی قیمتیں معلوم کرو کہ ہر دو جملات

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

۱۳۶۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(1) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \quad , \quad 3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$(2) \quad \frac{2}{\sqrt{2-3\sqrt{2}}} = \sqrt{2-3\sqrt{2}} + \sqrt{2-3\sqrt{2}} + \sqrt{2-3\sqrt{2}}$$

۱۳۸۔ ایک کسان نے ۱۰ بیٹریں کسی خاص قیمت پر فروخت کیں اور ۵ اور بیٹریں فی بیٹری ۵ خٹنگ کم پر فروخت کیں۔ دونوں قیمتیں پونہ ۱۰۰ روپے میں، یعنی دوسو روپے سے لکھی جاسکتی ہیں۔ ایک بیٹری کی قیمت معلوم کرو۔  
۱۳۹۔ ن رقموں تک جمع کرو۔

$$(1) \quad (1-N) + (2-N) + (3-N) + \dots + (N-1) + (N-2) + (N-3) + \dots + 1$$

(۲) سلسلہ ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ..... کی رقموں کے مربع  
(۳) نمبر ۱ کی طاق رقمیں (زنتی کالج - کبیرج)  
۱۳۰۔ اگر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ مساوات  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 15$  کی اصلیں ہوں تو ثابت کرو۔

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 15 \quad (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 15$$

(سینٹ جانز کالج کبیرج)

$$131. \text{ مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے } \begin{cases} 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 15 \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 15 \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 15 \end{cases}$$

(زنتی کالج - کبیرج)

۱۳۲۔ اگر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ مساوات  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 15$  کی اصلیں ہوں تو  
۱۳۳۔ ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو:-

$$(1) \quad 1 + (1-N) + (2-N) + \dots + (N-1) + (N-2) + \dots + 1$$

$$(2) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots$$

$$(3) \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$





(آکسورڈ سوڈز)

۱۵۱۔ اگر  $a, b, c$  مساوات  $a + b + c = 0$  کی اعلیٰ  
ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو۔ جسکی اعلیٰ  $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$  ہوں۔

۱۵۲۔ ثابت کرو کہ  $(a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$

(۱)  $a^2 + b^2 + c^2 = 0$  کا رٹن کے طریقہ سے  
(۲)  $a^2 + b^2 + c^2 = 0$  جسکی اعلیٰ

۱۵۳۔ ایک شخص کی فی گھنٹہ سہم کرنے کی مقدار اس کی ایک گھنٹہ کی تنخواہ کے  
بالاتر متناسب ہے اور جتنے گھنٹے فی روز کام کرتا ہے اس کے مزدور کے  
بالعکس متناسب ہے۔ وہ ایک کام کو ۹ دن ۹ گھنٹے بحساب ایک شنبہ فی گھنٹہ کام  
کرنے کے ۶ دن میں ختم کر دیتا ہے۔ یہاں تک کہ وہ اسی کام کو ۶ گھنٹے فی روز بحساب  
اشدنگ ۶ دن میں ختم کر کے لےنے دنوں میں ختم کر لے گا۔

۱۵۵۔ اگر سلسلہ  $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1)$  کی قیمت

کا حاصل جمع  $J$  سے تعبیر ہو اور سلسلہ  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)}$  کی قیمت  $K$  سے تعبیر ہو

ص ۱۰ سے تو ثابت کرو کہ  $J = 2 + K$  (یوڈن کالج - کیمبرج)

۱۵۶۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو :-

$$(1) \quad 5 = (1-3)(1-4)(1-5)(1-6)$$

$$(2) \quad \frac{(5-3)(3+2)}{(4-3)(2+3)} \cdot \frac{1}{9} + \frac{(3-2)(1+2)}{(2-1)(2+2)} \cdot \frac{1}{5}$$

$$(3) \quad \frac{92}{585} = \frac{(4-3)(5+2)}{(8-3)(4+2)} \cdot \frac{2}{13}$$

۱۵۷۔ ایک سال کے شروع میں ایک مکان کی قیمت ۲۵۰ پونڈ ہے لیکن وقت کی بربادی کی وجہ سے ہر سال اس کی قیمت شروع سال کی قیمت کا ۱۰ فی صدی گرجاتی ہے۔ بتاؤ کہ کتنے سالوں کے بعد اس کی قیمت ۲۵ پونڈ سے کم ہو جائیگی۔ معلوم ہے لوگ ۳ = ۱۳۱۲۱۳

۱۵۸۔ ثابت کرو کہ ذیل کے لائناری سلسلے

$$..... + \frac{10 \times 6 \times 2 \times 1}{19 \times 12 \times 8 \times 3} + \frac{6 \times 2 \times 1}{12 \times 8 \times 3} + \frac{2 \times 1}{8 \times 3} + \frac{1}{3} + 1$$

$$..... + \frac{11 \times 8 \times 5 \times 2}{22 \times 18 \times 12 \times 6} + \frac{8 \times 5 \times 2}{18 \times 12 \times 6} + \frac{5 \times 2}{12 \times 6} + \frac{2}{6} + 1$$

مساوی ہیں۔

(پیشہ دوس۔ کیسبرج)

۱۵۹۔ ذیل کی مساوات متوازن کو ثابت کرو۔

$$\left\{ ..... + \frac{(a-b)(c-d)}{e \cdot f} - \frac{(a-b)(c-d)}{e \cdot f} + \frac{a}{e} - 1 \right\}$$

$$\left\{ ..... + \frac{(a+b)(c+d)}{e \cdot f} + \frac{(a+b)(c+d)}{e \cdot f} + \frac{a}{e} + 1 \right\}$$

$$..... + \frac{(a'-b')(c'-d')}{e' \cdot f'} - \frac{(a'-b')(c'-d')}{e' \cdot f'} + \frac{a'}{e'} - 1 =$$

(ٹرنٹی کالج۔ کیسبرج)

۱۶۰۔ اگر ن کوئی مثبت صبیح عدد ہو جو ایک سے بڑا ہو تو بہت کم کہ

ن - ن - ن + ن - ن - ن

۱۲۰ کا نصف ہے۔

(۱) مقدمه

۱۶۱۔ ایک کام کے کرنے کے لئے چند آدمی بلائے گئے۔ اگر وہ سب ایک ساتھ کام شروع کریں تو ۳۴ گھنٹے میں کام ختم ہو جاتا ہے، لیکن وہ ایک ساتھ شروع کرنے کی بجائے سادہ سی وقفوں کے بعد شروع کرتے ہیں حتیٰ کہ سب آدمی کام پر لگ جاتے ہیں اور بعد کام کو ختم کر دیتے ہیں، اگر ہر ایک کی مزدور ہی اس کے کام کے متناسب ہو اور پہلے آدمی کو آخری آدمی کی نسبت ۱۱ گھنٹہ مزدور ہی ملے تو بتاؤ کہ کتنے عرصے میں کام ختم ہوا۔

۱۶۲۔ ذیل کی مساداتوں کو پیش کر دیجئے

$$\frac{x}{r+x} = \frac{b}{r-y} = \frac{y}{r-y} \quad (1)$$



پیدل چلے تو ۱۲ گھنٹے میں سفر طے ہو وہ کل سفر کو پیدل ۲۲ گھنٹے میں گھوڑے پر  
 ۸ گھنٹے میں اور گاڑی پر ۱۱ گھنٹے میں طے کر سکتا ہے۔ نیز ایک  
 میل پیدل، ایک میل گھوڑے پر اور ایک میل گاڑی پر سفر کرنے میں کل نصف  
 گھنٹہ صرف ہوتا ہے اس کے سفر کرنے کی شرحیں اور ان مقامات کے درمیانی  
 فاصلے معلوم کرو۔

۱۵۱۔ ثابت کرو کہ  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots$   $n$  پر اور تقسیم ہو سکتا ہے  $n$ ۔  
 پر جہاں  $n$  کوئی مثبت صحیح عدد ہے جو ۳ سے کم نہیں ہے۔  
 ۱۵۲۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(1) \quad \sqrt{12+12} + \sqrt{12+12} + \sqrt{12+12} = 23$$

$$(2) \quad \frac{a-b}{c} = \frac{b-c}{a} = \frac{c-a}{b} = \frac{a+b+c}{a-b-c} = \frac{a-b-c}{a+b+c}$$

۱۵۳۔ اگر  $n$  مثبت غیر مساوی مقادیر  $a, b, c, \dots$  کا حاصل جمع میں

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$$

(ریاضی ثنائی پاس)

۱۵۴۔ ایک سوداگر نے کچھ مقدار کپاس کی خریدی، پھر اس کپاس کا تیل سے  
 تبادلہ کر لیا اور بعد ازاں تیل کو فروخت کر ڈالا۔ اُسے معلوم ہوا کہ کپاس کا وزن  
 ہنڈر ڈوبٹوں میں، تیل کے اُن گیلنوں کی تعداد جو فی ہنڈر ڈوبٹ کپاس کے  
 تبادلہ میں اُس کو ملی اور تیل کی قیمت فروخت فی گیلن شلنگوں میں تینوں ایک  
 ہنڈر ڈوبٹ ہندسہ میں ہیں۔ نیز اُس نے یہ محسوس کیا کہ اگر اُسے ایک ہنڈر ڈوبٹ  
 کپاس اور ملتی اور ہر ہنڈر ڈوبٹ کپاس کے تبادلہ میں ایک گیلن تیل زیادہ ملتا اور  
 ہر گیلن تیل کی قیمت فروخت ایک شلنگ زیادہ ہوتی تو اُس کو کل ۵۰۵ پونڈ  
 ۹ شلنگ زیادہ ملتے۔ لیکن اگر اُس کو ایک ہنڈر ڈوبٹ کپاس کم ملتی اور ہر ہنڈر ڈوبٹ  
 کپاس پر ایک گیلن تیل کم ملتا اور ہر گیلن تیل پر ایک شلنگ

قیمت کم ملتی تو اسے ۴۸۳ پونڈ ۱۳ شلنگ کم ملتے۔ بناؤ کہ اسے فی الحقیقت

کتنی رقم ملتی۔  
۱۷۵۔ ثابت کر دو کہ  $(ب + ج - ا - لا) (ب - ج) (ا - لا) =$

۱۶ (ب - ج) (ج - ا) (ا - لا) (ب - ج) (ا - لا) (ج - ج)

(جیسے کلج - کیمبرج)

۱۷۔ اگر  $ا + ب + ج$  مساوات  $لا + ف + لا + ر =$  کی اصلیں ہوں تو وہ

مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں  $\frac{ج + ب}{ج} = \frac{ج + ب}{ب} = \frac{ج + ب}{ا} =$  ہوں۔  
(آر، ایم، اے - وولج)

۱۷۔ اگر  $ا + ب$  کی شکل کے اجزائے ضربی کی کسی تعداد کو باہم ضرب دیا جائے  
تو ثابت کر دو کہ حاصل ضرب دومربعوں کے عامل جمع کی شکل میں بیان ہو سکتا ہے

اگر یہ معلوم ہو کہ  $(ا + ب) (ج + د) (ع + ف) (گ + ہ) = ل + م$

تو ل اور م کی قیمت  $ا، ب، ج، د، ع، ف، گ، ہ$  کی رقوم میں معلوم کرو۔  
(لنڈن یونیورسٹی)

۱۷۸۔ مساواتوں  $لا + ا = ۶۱$ ،  $لا - ا = ۴۱$  کو حل کرو۔

(آر، ایم، اے - وولج)

۱۷۹۔ ایک آدمی ایک امتحان میں شریک ہوتا ہے جس میں ۴ پرچے ہیں اور ہر  
پرچے کے زیادہ سے زیادہ نشان ۴ ہیں۔ ثابت کر دو کہ کل ۲۴ نشان حاصل  
کرنے کے مختلف طریقوں کی تعداد  $\frac{۱}{۲} (۴ + ۱) (۲ + ۱) (۲ + ۱) (۲ + ۱) =$  ہے۔

(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۸۰۔ اگر  $ا + ب + ج$  مساوات  $لا + ف + لا + ا =$  کی اصلیں ہوں اور  $ج +$

۱۔ مساوات  $لا + ق + لا + ا =$  کی اصلیں ہوں تو ثابت کر دو کہ  $(ج - ج)$   
(ب - ج) (ج + ل) (ا + ل) = ق - ف

(آر، ایم، اے - وولج)

۱۸۱۔ ثابت کرو کہ اگر  $(۱ + لا)$  کی تفصیل میں لا کا سر ام ہو تو خود ن کی کچھ

ہی قیمت ہو۔  $۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots + (۱۰ - ۱) - ۱ + ۱ - ۱ + \dots$

$$= \frac{(ن - ۱)(ن - ۲) \dots (ن - م + ۱)(ن - ۱) - ۱}{۱ - ۱}$$

(نیوٹن کا لچ اکسفورڈ)

۱۸۲۔ ایک عدد تین مفرد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے مساوی ہے، ان اجزا ضربی کے مربعوں کا حاصل جمع ۳۳۳ ہے۔ (بشمول ایک) ۵۶۰ عدد ایسے ہیں جو اس عدد سے کم ہیں اور بنیاد اس کے مفرد ہیں، جن عددوں پر یہ عدد تقسیم ہو سکتا ہے (بشمول اور خود عدد مذکور) ان کی تعداد ۱۰۵۶۰ ہے۔ اس عدد کو معلوم کرو۔ (کارپس کا لچ اکیسبرج)

۱۸۳۔ ایک مساوات ایسی بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$لا^۳ - لا^۲ + با + لا + ج = ۰$$

کی اصلوں میں سے دو دو کے حاصل ضرب کے مساوی ہوں۔

نیز مساوات  $۲ لا^۲ + لا + ۲ = ۱۲ لا^۳ + ۱۲ لا$  کو مکمل طور پر حل کرو۔

(آر، ایم۔ اے۔ دو لچ)

۱۸۴۔ ثابت کرو کہ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

$$ن^۳ - ن(ن - ۲) + \frac{ن(ن - ۱)(ن - ۲)}{۲} - \dots - (ن - ۳) = ۰$$

۱۸۵۔ اگر  $(۱۳ + ۶۱۶۱۲)$   $۱۰ + ۲ = ۶$  اور اگر ع کے کسری حصہ کو ک سے تعبیر کیا

جائے تو ع ک  $۱۰ + ۲ = ۲۰$

۱۸۶۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱)  $لا + ما + می = ۲$ ،  $لا + ما + می = ۰$ ،  $لا + ما + می = ۱$

(۲)  $لا - (۱ - می) = ۲$ ،  $ما - (می - لا) = ۱$ ،  $با - (۱ - لا) = ج$

(کراچی کالج - کیمبرج)

۱۸۷۔ انگلستان کے ایک عام انتخاب میں جدت پسندوں کی تعداد انگریزی قدامت پسندوں کی تعداد سے ۱۵ زیادہ تھی اور قدامت پسندوں کی کل تعداد انگریزی جدت پسندوں کی تعداد کے دو گنے سے بقدر ۵ زیادہ تھی۔ اسکاٹ لینڈ کے قدامت پسندوں کی تعداد ویلز کے جدت پسندوں کی تعداد کے مساوی تھی، اسکاٹ لینڈ کے جدت پسندوں کی کثرت ویلز کے قدامت پسندوں کی تعداد سے دو گنی تھی اور اول الذکر کی نسبت آئر لینڈ کی جدت پسند کثرت کے ساتھ ۳:۲ تھی۔ انگریزی قدامت پسندوں کی کثرت آئر لینڈ کے کل ممبروں کی تعداد سے بقدر ۱۰ زیادہ تھی۔ کل ممبروں کی تعداد ۶۵۲ تھی جن میں سے ۶۰ اسکاٹ لینڈ نے بھیجے۔ انگلستان، اسکاٹ لینڈ، آئر لینڈ اور ویلز میں سے ہر ایک کی ہر پارٹی کے ممبروں کی تعداد معلوم کرو۔

۱۸۸۔ ثابت کرو کہ  $(ج - ب) + (ب - ج) + (ج - ب) = ۰$

$= (ج - ب) + (ج - ب) + (ب - ج) + (ج - ب) + (ب - ج) + (ج - ب) = ۰$

|                      |   |     |     |   |
|----------------------|---|-----|-----|---|
| $(ج - ب) =$          | ۱ | ۲   | ۳   | ۴ |
|                      | ۱ | ۱+۲ | ۱+۲ | ۱ |
|                      | ۱ | ۲+۱ | ۱+۲ | ۱ |
| [بال کالج - آکسفورڈ] | ۱ | ۳   | ۳   | ۱ |

۱۸۹۔ ثابت کرو کہ

$$۱۹۰۔ اگر \frac{1}{ا} + \frac{1}{ب} + \frac{1}{ج} = \frac{1}{د} \text{ تو}$$

ثابت کرو کہ  $ا، ب، ج$  سلسلہ موسیقی میں ہونگے سوائے اس صورت کے کہ

تشریحی خانہ کیمبرج

$$ب = ا + ج$$

۱۹۱۔ معادلات ذیل کو حل کرو۔

$$(۱) لا^۲ - ۱۳ لا + ۱۵ = ۰ \text{ یہ معلوم ہے کہ ایک اصل دوسری}$$



اصل سے بقدر ۲ کے زیادہ ہے۔

(۲) لا - ۴ لا + ۸ لا + ۴ = ۰ معلوم ہے کہ ایک اصل : + ۲ - ۱ - ۳ = ۰  
(آر، ایم، اے دو لچ)

۱۹۲ — دو عدد ۱ اور ۲ معلوم ہیں، ان سے دو اور عدد ۱ اور ۲ روابط

۳ = ۱ + ۲ اور ۳ = ۱ + ۲ کے ذریعے بنائے گئے ہیں ۱ اور ۲  
۱ سے اسی طرح دو اور عدد ۱ بنائے گئے ہیں اور علیٰ هذا القیاس ۱ اور ۲ کی قیمتیں ۱ اور ۲ کی رقوم میں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر ن لا تنہا ہی ہو تو  
۱ = ۲

۱۹۳ — اگر لا + ما + ی + ہ = ۰ تو ثابت کرو کہ

۱ (لا + ہ) + ۲ (ما + ی) + ۳ (ہ - لا) + ۴ (ہ - ما) = ۰

+ ۵ (ہ + ی) + ۶ (ی - لا) + ۷ (لا - ما) + ۸ (ما - ی) = ۰

(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۹۴ — اگر ۱ + ۲ = ۳ کی قیمت میں حروف ۱، ۲، ۳ کے کسی ایک

زوج کے حروف کو باہم بدل دینے سے کوئی فرق نہ آئے تو کسی اور زوج کے  
حروف کو باہم بدلنے سے ابھی اس میں کوئی فرق نہ آئے گا۔ نیز اس کی قیمت صفر  
ہو جائے گی اگر ۱ + ۲ = ۳ (۱، ۲، ۳) (ریاضی ٹرائی پاس)

۱۹۵ — دو مقامات ۱ اور ۲ کے درمیان ریل گاڑی کی چار سٹرکیں ہیں۔

دو ریل گاڑیاں ۱ سے ۲ کی طرف ۶ بجے اور ۶ بجکر ۵ منٹ پہر روانہ ہوتی

ہیں اور دو گاڑیاں ۲ سے ۱ کی طرف بالترتیب ۶ بجکر ۵ منٹ اور ۸

بجے روانہ ہوتی ہیں۔ اگر یہ چاروں ریل گاڑیاں (جبکہ ان کو نقطے تصور

کیا جائے) ایک ہی وقت میں ایک دوسرے کے پاس سے گزریں اور

ان کی رفتاریں بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴ میل فی گھنٹہ ہوں تو ثابت کرو کہ



(پیراؤس - کیمبرج)

۲۰۱۔ ایک شہر کے بازار شطرنج کے نقشہ کی شکل میں بنائے گئے ہیں۔ ہم ان کے کایم شمالاً جنوباً ہے اور ن کا مشرقاً غرباً۔ ایک آدمی شمال مغربی کونہ سے جنوب مشرقی کونہ تک چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ طے کر کے جانا چاہتا ہے، جتنا کہ وہ کتنے مختلف راستوں سے جاسکتا ہے۔

$$۲۰۲۔ مسادات \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots = ۲ \text{ کو حل کرو۔}$$

۲۰۳۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots$  میں آخری  $n$  رقموں کے حاصل جمع اور پہلی  $n$  رقموں کے حاصل جمع کے فرق اور آخری رقم اور پہلی رقم کے فرق کی نسبت  $۱:۲$  ہے۔

۲۰۴۔ ذیل کے سلسلوں کے  $n$  ویں بستق معلوم کرو۔

$$(۱) \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

$$(۲) \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

۲۰۵۔ ثابت کرو کہ  $(۱-۱)^۲ + (۱-۱)^۲ + (۱-۱)^۲ + \dots + (۱-۱)^۲ = ۰$

$$= (۱-۱)^۲ + (۱-۱)^۲ + (۱-۱)^۲ + \dots + (۱-۱)^۲$$

$$+ (۱-۱)^۲ + (۱-۱)^۲ + (۱-۱)^۲ + \dots + (۱-۱)^۲$$

۲۰۶۔ اگر  $a, b, c$  مسادات  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  کی اعلیٰ ہوں تو

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \text{ کی قیمت } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \text{ کی قیمت}$$

کی رقم میں معلوم کرو۔

۲۰۷۔ انگلستان میں ہر ۴۶ آدمیوں میں سے ایک آدمی سالانہ مرتا ہے اور ہر ۳۳ آدمیوں پر ایک آدمی سالانہ پیدا ہوتا ہے، اگر ترک وطن کا سلسلہ بند ہو جائے تو بتاؤ اسی شرح سے کتنے عرصہ میں آبادی دوگنی ہو جائے گی معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۰۰۰۰۰۰ ، لوک ۱۵۳۱ = ۲۹۷۵۲۴۱۸

$$\text{لوک } ۱۵۱۸ = ۳۵۱۸۱۲۷۱۸$$

۲۰۸۔ اگر  $(۱ + لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ + لا^۹ + لا^{۱۰} + لا^{۱۱} + لا^{۱۲} + لا^{۱۳} + لا^{۱۴} + لا^{۱۵} + لا^{۱۶} + لا^{۱۷} + لا^{۱۸} + لا^{۱۹} + لا^{۲۰} + لا^{۲۱} + لا^{۲۲} + لا^{۲۳} + لا^{۲۴} + لا^{۲۵} + لا^{۲۶} + لا^{۲۷} + لا^{۲۸} + لا^{۲۹} + لا^{۳۰} + لا^{۳۱} + لا^{۳۲} + لا^{۳۳} + لا^{۳۴} + لا^{۳۵} + لا^{۳۶} + لا^{۳۷} + لا^{۳۸} + لا^{۳۹} + لا^{۴۰} + لا^{۴۱} + لا^{۴۲} + لا^{۴۳} + لا^{۴۴} + لا^{۴۵} + لا^{۴۶} + لا^{۴۷} + لا^{۴۸} + لا^{۴۹} + لا^{۵۰} + لا^{۵۱} + لا^{۵۲} + لا^{۵۳} + لا^{۵۴} + لا^{۵۵} + لا^{۵۶} + لا^{۵۷} + لا^{۵۸} + لا^{۵۹} + لا^{۶۰} + لا^{۶۱} + لا^{۶۲} + لا^{۶۳} + لا^{۶۴} + لا^{۶۵} + لا^{۶۶} + لا^{۶۷} + لا^{۶۸} + لا^{۶۹} + لا^{۷۰} + لا^{۷۱} + لا^{۷۲} + لا^{۷۳} + لا^{۷۴} + لا^{۷۵} + لا^{۷۶} + لا^{۷۷} + لا^{۷۸} + لا^{۷۹} + لا^{۸۰} + لا^{۸۱} + لا^{۸۲} + لا^{۸۳} + لا^{۸۴} + لا^{۸۵} + لا^{۸۶} + لا^{۸۷} + لا^{۸۸} + لا^{۸۹} + لا^{۹۰} + لا^{۹۱} + لا^{۹۲} + لا^{۹۳} + لا^{۹۴} + لا^{۹۵} + لا^{۹۶} + لا^{۹۷} + لا^{۹۸} + لا^{۹۹} + لا^{۱۰۰})$

$$= \frac{1 - (لا)^{۱۰۱}}{1 - لا} - \frac{(1 - لا)^{۱۰۱}}{1 - لا} = 1$$

رہبر طیکہ ۳ کا ضعف نہ ہو موثر الذکر صورت میں اس کی کیا قیمت ہوگی۔

(سینٹ جرنیکال کیمبرج)

۲۰۹۔ ایک جامعہ میں پول، ترک، یونانی، جرمن اور اٹلی کے لوگ شامل ہیں۔ پول، جرمنوں کی ایک تہائی سے بقدر ایک کے کم ہیں اور اٹلی والوں کی تعداد کے نصف سے تین کم ہیں۔ ترک اور جرمن، یونانیوں اور اٹلی والوں سے ۳ زیادہ ہیں۔ جرمن اور یونانی کل جامعہ کے نصف سے ایک کم ہیں۔ اٹلی والے اور یونانی کل جامعہ کے ۲ کے مساوی ہیں۔ ہر قوم کے لوگوں کی تعداد معلوم کرو

۲۱۰۔ ایک سلسلہ کی  $n$  ویں رقم  $(۱ + n)$  -  $n$  -  $(۲ + n)$  -  $n$  -  $(۳ + n)$  -  $n$  -  $(۴ + n)$  -  $n$  -  $(۵ + n)$  -  $n$  -  $(۶ + n)$  -  $n$  -  $(۷ + n)$  -  $n$  -  $(۸ + n)$  -  $n$  -  $(۹ + n)$  -  $n$  -  $(۱۰ + n)$  -  $n$  -  $(۱۱ + n)$  -  $n$  -  $(۱۲ + n)$  -  $n$  -  $(۱۳ + n)$  -  $n$  -  $(۱۴ + n)$  -  $n$  -  $(۱۵ + n)$  -  $n$  -  $(۱۶ + n)$  -  $n$  -  $(۱۷ + n)$  -  $n$  -  $(۱۸ + n)$  -  $n$  -  $(۱۹ + n)$  -  $n$  -  $(۲۰ + n)$  -  $n$  -  $(۲۱ + n)$  -  $n$  -  $(۲۲ + n)$  -  $n$  -  $(۲۳ + n)$  -  $n$  -  $(۲۴ + n)$  -  $n$  -  $(۲۵ + n)$  -  $n$  -  $(۲۶ + n)$  -  $n$  -  $(۲۷ + n)$  -  $n$  -  $(۲۸ + n)$  -  $n$  -  $(۲۹ + n)$  -  $n$  -  $(۳۰ + n)$  -  $n$  -  $(۳۱ + n)$  -  $n$  -  $(۳۲ + n)$  -  $n$  -  $(۳۳ + n)$  -  $n$  -  $(۳۴ + n)$  -  $n$  -  $(۳۵ + n)$  -  $n$  -  $(۳۶ + n)$  -  $n$  -  $(۳۷ + n)$  -  $n$  -  $(۳۸ + n)$  -  $n$  -  $(۳۹ + n)$  -  $n$  -  $(۴۰ + n)$  -  $n$  -  $(۴۱ + n)$  -  $n$  -  $(۴۲ + n)$  -  $n$  -  $(۴۳ + n)$  -  $n$  -  $(۴۴ + n)$  -  $n$  -  $(۴۵ + n)$  -  $n$  -  $(۴۶ + n)$  -  $n$  -  $(۴۷ + n)$  -  $n$  -  $(۴۸ + n)$  -  $n$  -  $(۴۹ + n)$  -  $n$  -  $(۵۰ + n)$  -  $n$  -  $(۵۱ + n)$  -  $n$  -  $(۵۲ + n)$  -  $n$  -  $(۵۳ + n)$  -  $n$  -  $(۵۴ + n)$  -  $n$  -  $(۵۵ + n)$  -  $n$  -  $(۵۶ + n)$  -  $n$  -  $(۵۷ + n)$  -  $n$  -  $(۵۸ + n)$  -  $n$  -  $(۵۹ + n)$  -  $n$  -  $(۶۰ + n)$  -  $n$  -  $(۶۱ + n)$  -  $n$  -  $(۶۲ + n)$  -  $n$  -  $(۶۳ + n)$  -  $n$  -  $(۶۴ + n)$  -  $n$  -  $(۶۵ + n)$  -  $n$  -  $(۶۶ + n)$  -  $n$  -  $(۶۷ + n)$  -  $n$  -  $(۶۸ + n)$  -  $n$  -  $(۶۹ + n)$  -  $n$  -  $(۷۰ + n)$  -  $n$  -  $(۷۱ + n)$  -  $n$  -  $(۷۲ + n)$  -  $n$  -  $(۷۳ + n)$  -  $n$  -  $(۷۴ + n)$  -  $n$  -  $(۷۵ + n)$  -  $n$  -  $(۷۶ + n)$  -  $n$  -  $(۷۷ + n)$  -  $n$  -  $(۷۸ + n)$  -  $n$  -  $(۷۹ + n)$  -  $n$  -  $(۸۰ + n)$  -  $n$  -  $(۸۱ + n)$  -  $n$  -  $(۸۲ + n)$  -  $n$  -  $(۸۳ + n)$  -  $n$  -  $(۸۴ + n)$  -  $n$  -  $(۸۵ + n)$  -  $n$  -  $(۸۶ + n)$  -  $n$  -  $(۸۷ + n)$  -  $n$  -  $(۸۸ + n)$  -  $n$  -  $(۸۹ + n)$  -  $n$  -  $(۹۰ + n)$  -  $n$  -  $(۹۱ + n)$  -  $n$  -  $(۹۲ + n)$  -  $n$  -  $(۹۳ + n)$  -  $n$  -  $(۹۴ + n)$  -  $n$  -  $(۹۵ + n)$  -  $n$  -  $(۹۶ + n)$  -  $n$  -  $(۹۷ + n)$  -  $n$  -  $(۹۸ + n)$  -  $n$  -  $(۹۹ + n)$  -  $n$  -  $(۱۰۰ + n)$  -  $n$  -  $(۱۰۱ + n)$  -  $n$  -  $(۱۰۲ + n)$  -  $n$  -  $(۱۰۳ + n)$  -  $n$  -  $(۱۰۴ + n)$  -  $n$  -  $(۱۰۵ + n)$  -  $n$  -  $(۱۰۶ + n)$  -  $n$  -  $(۱۰۷ + n)$  -  $n$  -  $(۱۰۸ + n)$  -  $n$  -  $(۱۰۹ + n)$  -  $n$  -  $(۱۱۰ + n)$  -  $n$  -  $(۱۱۱ + n)$  -  $n$  -  $(۱۱۲ + n)$  -  $n$  -  $(۱۱۳ + n)$  -  $n$  -  $(۱۱۴ + n)$  -  $n$  -  $(۱۱۵ + n)$  -  $n$  -  $(۱۱۶ + n)$  -  $n$  -  $(۱۱۷ + n)$  -  $n$  -  $(۱۱۸ + n)$  -  $n$  -  $(۱۱۹ + n)$  -  $n$  -  $(۱۲۰ + n)$  -  $n$  -  $(۱۲۱ + n)$  -  $n$  -  $(۱۲۲ + n)$  -  $n$  -  $(۱۲۳ + n)$  -  $n$  -  $(۱۲۴ + n)$  -  $n$  -  $(۱۲۵ + n)$  -  $n$  -  $(۱۲۶ + n)$  -  $n$  -  $(۱۲۷ + n)$  -  $n$  -  $(۱۲۸ + n)$  -  $n$  -  $(۱۲۹ + n)$  -  $n$  -  $(۱۳۰ + n)$  -  $n$  -  $(۱۳۱ + n)$  -  $n$  -  $(۱۳۲ + n)$  -  $n$  -  $(۱۳۳ + n)$  -  $n$  -  $(۱۳۴ + n)$  -  $n$  -  $(۱۳۵ + n)$  -  $n$  -  $(۱۳۶ + n)$  -  $n$  -  $(۱۳۷ + n)$  -  $n$  -  $(۱۳۸ + n)$  -  $n$  -  $(۱۳۹ + n)$  -  $n$  -  $(۱۴۰ + n)$  -  $n$  -  $(۱۴۱ + n)$  -  $n$  -  $(۱۴۲ + n)$  -  $n$  -  $(۱۴۳ + n)$  -  $n$  -  $(۱۴۴ + n)$  -  $n$  -  $(۱۴۵ + n)$  -  $n$  -  $(۱۴۶ + n)$  -  $n$  -  $(۱۴۷ + n)$  -  $n$  -  $(۱۴۸ + n)$  -  $n$  -  $(۱۴۹ + n)$  -  $n$  -  $(۱۵۰ + n)$  -  $n$  -  $(۱۵۱ + n)$  -  $n$  -  $(۱۵۲ + n)$  -  $n$  -  $(۱۵۳ + n)$  -  $n$  -  $(۱۵۴ + n)$  -  $n$  -  $(۱۵۵ + n)$  -  $n$  -  $(۱۵۶ + n)$  -  $n$  -  $(۱۵۷ + n)$  -  $n$  -  $(۱۵۸ + n)$  -  $n$  -  $(۱۵۹ + n)$  -  $n$  -  $(۱۶۰ + n)$  -  $n$  -  $(۱۶۱ + n)$  -  $n$  -  $(۱۶۲ + n)$  -  $n$  -  $(۱۶۳ + n)$  -  $n$  -  $(۱۶۴ + n)$  -  $n$  -  $(۱۶۵ + n)$  -  $n$  -  $(۱۶۶ + n)$  -  $n$  -  $(۱۶۷ + n)$  -  $n$  -  $(۱۶۸ + n)$  -  $n$  -  $(۱۶۹ + n)$  -  $n$  -  $(۱۷۰ + n)$  -  $n$  -  $(۱۷۱ + n)$  -  $n$  -  $(۱۷۲ + n)$  -  $n$  -  $(۱۷۳ + n)$  -  $n$  -  $(۱۷۴ + n)$  -  $n$  -  $(۱۷۵ + n)$  -  $n$  -  $(۱۷۶ + n)$  -  $n$  -  $(۱۷۷ + n)$  -  $n$  -  $(۱۷۸ + n)$  -  $n$  -  $(۱۷۹ + n)$  -  $n$  -  $(۱۸۰ + n)$  -  $n$  -  $(۱۸۱ + n)$  -  $n$  -  $(۱۸۲ + n)$  -  $n$  -  $(۱۸۳ + n)$  -  $n$  -  $(۱۸۴ + n)$  -  $n$  -  $(۱۸۵ + n)$  -  $n$  -  $(۱۸۶ + n)$  -  $n$  -  $(۱۸۷ + n)$  -  $n$  -  $(۱۸۸ + n)$  -  $n$  -  $(۱۸۹ + n)$  -  $n$  -  $(۱۹۰ + n)$  -  $n$  -  $(۱۹۱ + n)$  -  $n$  -  $(۱۹۲ + n)$  -  $n$  -  $(۱۹۳ + n)$  -  $n$  -  $(۱۹۴ + n)$  -  $n$  -  $(۱۹۵ + n)$  -  $n$  -  $(۱۹۶ + n)$  -  $n$  -  $(۱۹۷ + n)$  -  $n$  -  $(۱۹۸ + n)$  -  $n$  -  $(۱۹۹ + n)$  -  $n$  -  $(۲۰۰ + n)$  -  $n$  -  $(۲۰۱ + n)$  -  $n$  -  $(۲۰۲ + n)$  -  $n$  -  $(۲۰۳ + n)$  -  $n$  -  $(۲۰۴ + n)$  -  $n$  -  $(۲۰۵ + n)$  -  $n$  -  $(۲۰۶ + n)$  -  $n$  -  $(۲۰۷ + n)$  -  $n$  -  $(۲۰۸ + n)$  -  $n$  -  $(۲۰۹ + n)$  -  $n$  -  $(۲۱۰ + n)$  -  $n$  -  $(۲۱۱ + n)$  -  $n$  -  $(۲۱۲ + n)$  -  $n$  -  $(۲۱۳ + n)$  -  $n$  -  $(۲۱۴ + n)$  -  $n$  -  $(۲۱۵ + n)$  -  $n$  -  $(۲۱۶ + n)$  -  $n$  -  $(۲۱۷ + n)$  -  $n$  -  $(۲۱۸ + n)$  -  $n$  -  $(۲۱۹ + n)$  -  $n$  -  $(۲۲۰ + n)$  -  $n$  -  $(۲۲۱ + n)$  -  $n$  -  $(۲۲۲ + n)$  -  $n$  -  $(۲۲۳ + n)$  -  $n$  -  $(۲۲۴ + n)$  -  $n$  -  $(۲۲۵ + n)$  -  $n$  -  $(۲۲۶ + n)$  -  $n$  -  $(۲۲۷ + n)$  -  $n$  -  $(۲۲۸ + n)$  -  $n$  -  $(۲۲۹ + n)$  -  $n$  -  $(۲۳۰ + n)$  -  $n$  -  $(۲۳۱ + n)$  -  $n$  -  $(۲۳۲ + n)$  -  $n$  -  $(۲۳۳ + n)$  -  $n$  -  $(۲۳۴ + n)$  -  $n$  -  $(۲۳۵ + n)$  -  $n$  -  $(۲۳۶ + n)$  -  $n$  -  $(۲۳۷ + n)$  -  $n$  -  $(۲۳۸ + n)$  -  $n$  -  $(۲۳۹ + n)$  -  $n$  -  $(۲۴۰ + n)$  -  $n$  -  $(۲۴۱ + n)$  -  $n$  -  $(۲۴۲ + n)$  -  $n$  -  $(۲۴۳ + n)$  -  $n$  -  $(۲۴۴ + n)$  -  $n$  -  $(۲۴۵ + n)$  -  $n$  -  $(۲۴۶ + n)$  -  $n$  -  $(۲۴۷ + n)$  -  $n$  -  $(۲۴۸ + n)$  -  $n$  -  $(۲۴۹ + n)$  -  $n$  -  $(۲۵۰ + n)$  -  $n$  -  $(۲۵۱ + n)$  -  $n$  -  $(۲۵۲ + n)$  -  $n$  -  $(۲۵۳ + n)$  -  $n$  -  $(۲۵۴ + n)$  -  $n$  -  $(۲۵۵ + n)$  -  $n$  -  $(۲۵۶ + n)$  -  $n$  -  $(۲۵۷ + n)$  -  $n$  -  $(۲۵۸ + n)$  -  $n$  -  $(۲۵۹ + n)$  -  $n$  -  $(۲۶۰ + n)$  -  $n$  -  $(۲۶۱ + n)$  -  $n$  -  $(۲۶۲ + n)$  -  $n$  -  $(۲۶۳ + n)$  -  $n$  -  $(۲۶۴ + n)$  -  $n$  -  $(۲۶۵ + n)$  -  $n$  -  $(۲۶۶ + n)$  -  $n$  -  $(۲۶۷ + n)$  -  $n$  -  $(۲۶۸ + n)$  -  $n$  -  $(۲۶۹ + n)$  -  $n$  -  $(۲۷۰ + n)$  -  $n$  -  $(۲۷۱ + n)$  -  $n$  -  $(۲۷۲ + n)$  -  $n$  -  $(۲۷۳ + n)$  -  $n$  -  $(۲۷۴ + n)$  -  $n$  -  $(۲۷۵ + n)$  -  $n$  -  $(۲۷۶ + n)$  -  $n$  -  $(۲۷۷ + n)$  -  $n$  -  $(۲۷۸ + n)$  -  $n$  -  $(۲۷۹ + n)$  -  $n$  -  $(۲۸۰ + n)$  -  $n$  -  $(۲۸۱ + n)$  -  $n$  -  $(۲۸۲ + n)$  -  $n$  -  $(۲۸۳ + n)$  -  $n$  -  $(۲۸۴ + n)$  -  $n$  -  $(۲۸۵ + n)$  -  $n$  -  $(۲۸۶ + n)$  -  $n$  -  $(۲۸۷ + n)$  -  $n$  -  $(۲۸۸ + n)$  -  $n$  -  $(۲۸۹ + n)$  -  $n$  -  $(۲۹۰ + n)$  -  $n$  -  $(۲۹۱ + n)$  -  $n$  -  $(۲۹۲ + n)$  -  $n$  -  $(۲۹۳ + n)$  -  $n$  -  $(۲۹۴ + n)$  -  $n$  -  $(۲۹۵ + n)$  -  $n$  -  $(۲۹۶ + n)$  -  $n$  -  $(۲۹۷ + n)$  -  $n$  -  $(۲۹۸ + n)$  -  $n$  -  $(۲۹۹ + n)$  -  $n$  -  $(۳۰۰ + n)$  -  $n$  -  $(۳۰۱ + n)$  -  $n$  -  $(۳۰۲ + n)$  -  $n$  -  $(۳۰۳ + n)$  -  $n$  -  $(۳۰۴ + n)$  -  $n$  -  $(۳۰۵ + n)$  -  $n$  -  $(۳۰۶ + n)$  -  $n$  -  $(۳۰۷ + n)$  -  $n$  -  $(۳۰۸ + n)$  -  $n$  -  $(۳۰۹ + n)$  -  $n$  -  $(۳۱۰ + n)$  -  $n$  -  $(۳۱۱ + n)$  -  $n$  -  $(۳۱۲ + n)$  -  $n$  -  $(۳۱۳ + n)$  -  $n$  -  $(۳۱۴ + n)$  -  $n$  -  $(۳۱۵ + n)$  -  $n$  -  $(۳۱۶ + n)$  -  $n$  -  $(۳۱۷ + n)$  -  $n$  -  $(۳۱۸ + n)$  -  $n$  -  $(۳۱۹ + n)$  -  $n$  -  $(۳۲۰ + n)$  -  $n$  -  $(۳۲۱ + n)$  -  $n$  -  $(۳۲۲ + n)$  -  $n$  -  $(۳۲۳ + n)$  -  $n$  -  $(۳۲۴ + n)$  -  $n$  -  $(۳۲۵ + n)$  -  $n$  -  $(۳۲۶ + n)$  -  $n$  -  $(۳۲۷ + n)$  -  $n$  -  $(۳۲۸ + n)$  -  $n$  -  $(۳۲۹ + n)$  -  $n$  -  $(۳۳۰ + n)$  -  $n$  -  $(۳۳۱ + n)$  -  $n$  -  $(۳۳۲ + n)$  -  $n$  -  $(۳۳۳ + n)$  -  $n$  -  $(۳۳۴ + n)$  -  $n$  -  $(۳۳۵ + n)$  -  $n$  -  $(۳۳۶ + n)$  -  $n$  -  $(۳۳۷ + n)$  -  $n$  -  $(۳۳۸ + n)$  -  $n$  -  $(۳۳۹ + n)$  -  $n$  -  $(۳۴۰ + n)$  -  $n$  -  $(۳۴۱ + n)$  -  $n$  -  $(۳۴۲ + n)$  -  $n$  -  $(۳۴۳ + n)$  -  $n$  -  $(۳۴۴ + n)$  -  $n$  -  $(۳۴۵ + n)$  -  $n$  -  $(۳۴۶ + n)$  -  $n$  -  $(۳۴۷ + n)$  -  $n$  -  $(۳۴۸ + n)$  -  $n$  -  $(۳۴۹ + n)$  -  $n$  -  $(۳۵۰ + n)$  -  $n$  -  $(۳۵۱ + n)$  -  $n$  -  $(۳۵۲ + n)$  -  $n$  -  $(۳۵۳ + n)$  -  $n$  -  $(۳۵۴ + n)$  -  $n$  -  $(۳۵۵ + n)$  -  $n$  -  $(۳۵۶ + n)$  -  $n$  -  $(۳۵۷ + n)$  -  $n$  -  $(۳۵۸ + n)$  -  $n$  -  $(۳۵۹ + n)$  -  $n$  -  $(۳۶۰ + n)$  -  $n$  -  $(۳۶۱ + n)$  -  $n$  -  $(۳۶۲ + n)$  -  $n$  -  $(۳۶۳ + n)$  -  $n$  -  $(۳۶۴ + n)$  -  $n$  -  $(۳۶۵ + n)$  -  $n$  -  $(۳۶۶ + n)$  -  $n$  -  $(۳۶۷ + n)$  -  $n$  -  $(۳۶۸ + n)$  -  $n$  -  $(۳۶۹ + n)$  -  $n$  -  $(۳۷۰ + n)$  -  $n$  -  $(۳۷۱ + n)$  -  $n$  -  $(۳۷۲ + n)$  -  $n$  -  $(۳۷۳ + n)$  -  $n$  -  $(۳۷۴ + n)$  -  $n$  -  $(۳۷۵ + n)$  -  $n$  -  $(۳۷۶ + n)$  -  $n$  -  $(۳۷۷ + n)$  -  $n$  -  $(۳۷۸ + n)$  -  $n$  -  $(۳۷۹ + n)$  -  $n$  -  $(۳۸۰ + n)$  -  $n$  -  $(۳۸۱ + n)$  -  $n$  -  $(۳۸۲ + n)$  -  $n$  -  $(۳۸۳ + n)$  -  $n$  -  $(۳۸۴ + n)$  -  $n$  -  $(۳۸۵ + n)$  -  $n$  -  $(۳۸۶ + n)$  -  $n$  -  $(۳۸۷ + n)$  -  $n$  -  $(۳۸۸ + n)$  -  $n$  -  $(۳۸۹ + n)$  -  $n$  -  $(۳۹۰ + n)$  -  $n$  -  $(۳۹۱ + n)$  -  $n$  -  $(۳۹۲ + n)$  -  $n$  -  $(۳۹۳ + n)$  -  $n$  -  $(۳۹۴ + n)$  -  $n$  -  $(۳۹۵ + n)$  -  $n$  -  $(۳۹۶ + n)$  -  $n$  -  $(۳۹۷ + n)$  -  $n$  -  $(۳۹۸ + n)$  -  $n$  -  $(۳۹۹ + n)$  -  $n$  -  $(۴۰۰ + n)$  -  $n$  -  $(۴۰۱ + n)$  -  $n$  -  $(۴۰۲ + n)$  -  $n$  -  $(۴۰۳ + n)$  -  $n$  -  $(۴۰۴ + n)$  -  $n$  -  $(۴۰۵ + n)$  -  $n$  -  $(۴۰۶ + n)$  -  $n$  -  $(۴۰۷ + n)$  -  $n$  -  $(۴۰۸ + n)$  -  $n$  -  $(۴۰۹ + n)$  -  $n$  -  $(۴۱۰ + n)$  -  $n$  -  $(۴۱۱ + n)$  -  $n$  -  $(۴۱۲ + n)$  -  $n$  -  $(۴۱۳ + n)$  -  $n$  -  $(۴۱۴ + n)$  -  $n$  -  $(۴۱۵ + n)$  -  $n$  -  $(۴۱۶ + n)$  -  $n$  -  $(۴۱۷ + n)$  -  $n$  -  $(۴۱۸ + n)$  -  $n$  -  $(۴۱۹ + n)$  -  $n$  -  $(۴۲۰ + n)$  -  $n$  -  $(۴۲۱ + n)$  -  $n$  -  $(۴۲۲ + n)$  -  $n$  -  $(۴۲۳ + n)$  -  $n$  -  $(۴۲۴ + n)$  -  $n$  -  $(۴۲۵ + n)$  -  $n$  -  $(۴۲۶ + n)$  -  $n$  -  $(۴۲۷ + n)$  -  $n$  -  $(۴۲۸ + n)$  -  $n$  -  $(۴۲۹ + n)$  -  $n$  -  $(۴۳۰ + n)$  -  $n$  -  $(۴۳۱ + n)$  -  $n$  -  $(۴۳۲ + n)$  -  $n$  -  $(۴۳۳ + n)$  -  $n$  -  $(۴۳۴ + n)$  -  $n$  -  $(۴۳۵ + n)$  -  $n$  -  $(۴۳۶ + n)$  -  $n$  -  $(۴۳۷ + n)$  -  $n$  -  $(۴۳۸ + n)$  -  $n$  -  $(۴۳۹ + n)$  -  $n$  -  $(۴۴۰ + n)$  -  $n$  -  $(۴۴۱ + n)$  -  $n$  -  $(۴۴۲ + n)$  -  $n$  -  $(۴۴۳ + n)$  -  $n$  -  $(۴۴۴ + n)$  -  $n$  -  $(۴۴۵ + n)$  -  $n$  -  $(۴۴۶ + n)$  -  $n$  -  $(۴۴۷ + n)$  -  $n$  -  $(۴۴۸ + n)$  -  $n$  -  $(۴۴۹ + n)$  -  $n$  -  $(۴۵۰ + n)$  -  $n$  -  $(۴۵۱ + n)$  -  $n$  -  $(۴۵۲ + n)$  -  $n$  -  $(۴۵۳ + n)$  -  $n$  -  $(۴۵۴ + n)$  -  $n$  -  $(۴۵۵ + n)$  -  $n$  -  $(۴۵۶ + n)$  -  $n$  -  $(۴۵۷ + n)$  -  $n$  -  $(۴۵۸ + n)$  -  $n$  -  $(۴۵۹ + n)$  -  $n$  -  $(۴۶۰ + n)$  -  $n$  -  $(۴۶۱ + n)$  -  $n$  -  $(۴۶۲ + n)$  -  $n$  -  $(۴۶۳ + n)$  -  $n$  -  $(۴۶۴ + n)$  -  $n$  -  $(۴۶۵ + n)$  -  $n$  -  $(۴۶۶ + n)$  -  $n$  -  $(۴۶۷ + n)$  -  $n$  -  $(۴۶۸ + n)$  -  $n$  -  $(۴۶۹ + n)$  -  $n$  -  $(۴۷۰ + n)$  -  $n$  -  $(۴۷۱ + n)$  -  $n$  -  $(۴۷۲ + n)$  -  $n$  -  $(۴۷۳ + n)$  -  $n$  -  $(۴۷۴ + n)$  -  $n$  -  $(۴۷۵ + n)$  -  $n$  -  $(۴۷۶ + n)$  -  $n$  -  $(۴۷۷ + n)$  -  $n$  -  $(۴۷۸ + n)$  -  $n$  -  $(۴۷۹ + n)$  -  $n$  -  $(۴۸۰ + n)$  -  $n$  -  $(۴۸۱ + n)$  -  $n$  -  $(۴۸۲ + n)$  -  $n$  -  $(۴۸۳ + n)$  -  $n$  -  $(۴۸۴ + n)$  -  $n$  -  $(۴۸۵ + n)$  -  $n$  -  $(۴۸۶ + n)$  -  $n$  -  $(۴۸۷ + n)$  -  $n$  -  $(۴۸۸ + n)$  -  $n$  -  $(۴۸۹ + n)$  -  $n$  -  $(۴۹۰ + n)$  -  $n$  -  $(۴۹۱ + n)$  -  $n$  -  $(۴۹۲ + n)$  -  $n$  -  $(۴۹۳ + n)$  -  $n$  -  $(۴۹۴ + n)$  -  $n$  -  $(۴۹۵ + n)$  -  $n$  -  $(۴۹۶ + n)$  -  $n$  -  $(۴۹۷ + n)$  -  $n$  -  $(۴۹۸ + n)$  -  $n$  -  $(۴۹۹ + n)$  -  $n$  - <



۲۱۳۔ نمبر حاصل کر سکتا ہے۔ بتاؤ کہ وہ کتنے مختلف طریقوں سے، نشانوں میں ۳۰ نمبر حاصل کر سکتا ہے۔  
(پہرے کا کالج - کیمبرج)

۲۱۸۔ ثابت کرو کہ جملہ لا۔ ب لا۔ ج لا۔ د لا۔ ع ایک کامل مربع اور ایک کامل مکعب کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا اگر

$$\frac{۱۳}{۵} = \frac{۲۹}{۵} = \frac{۴۵}{۵} = \frac{۲۵}{۵}$$

۲۱۹۔ ایک مثالی میں ۶ سیاہ گیند ہیں اور باقی سفید گیند ہیں جن کی تعداد چھ سے کم ہے۔ تین گیند یکے بعد دیگرے نکالے گئے ہیں اور واپس نہیں رکھے گئے، یہ گیند سب کے سب سفید ہیں، ثابت کرو کہ اس کے بعد سیاہ گیند نکلنے کا فریضہ  $\frac{۶۶۶}{۹۰۹}$  ہے۔  
(جیسس کالج - کیمبرج)

۲۲۰۔ ثابت کرو کہ پہلے ن صحیح عددوں کے مربعوں میں سے دو دو کے

حاصل ضربوں کا مجموعہ  $\frac{۱}{۳۶}$  ن (ن-۱) (ن-۲) (ن-۳) (ن-۴) (ن-۵) (ن-۶) ہے۔

(جیسس کالج - کیمبرج)

$$۲۲۱۔ اگر \frac{۲(ب-ج)}{لا-۱} + \frac{۲(ج-د)}{لا-ب} + \frac{۲(د-۱)}{لا-ج} = ۰$$

کی اسلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$۲(ب-ج) \pm ۲(ج-د) \pm ۲(د-۱) = ۰$$

۲۲۲۔ ثابت کرو کہ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

$$ن = \frac{۱-۵}{۱} \times \frac{۲-۵}{۲} + \frac{(۳-ن)(۴-ن)}{۲} + \frac{۵-۵}{۲}$$

$$- \frac{(۴-ن)(۵-ن)(۶-ن)}{۳} + \dots$$

(کلئیر کالج - کیمبرج)

۲۲۳۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

$$(۱) لا + ۲ مای = ما + ۲ می لا = ی + ۲ لا م + ۳ = ۷۹$$

$$(۲) لا + ما + ی = ا + ب + ج$$

$$۳ = \frac{ی}{ج} + \frac{ا}{ی} + \frac{لا}{ا}$$

$$لا + ب + ما + ج ی = ب ج + ج ا + ا ب$$

(ایک انٹسٹ کا پیکسیرج)

۲۲۳۔ ایک خط مستقیم پر ۴ نقطے ہیں، ان نقطوں میں سے ہر ایک نقطہ کو ایک سرے خط مستقیم پر کے ۴ نقطوں میں سے ہر ایک نقطہ کے ساتھ وصل کر دیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ان نقاط مذکورہ کے علاوہ خطوط حاصل ایک دوسرے کو ۱۴ م ن (م-۱) (ن-۱) نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔ (بہنی ٹرائی پاس)

۲۲۵۔ اگر یہ معلوم ہو کہ  $ما = لا + لا + لا + لا$  تو اس شکل

$$ما + ا + ما + ب + ما + ج + ما + د + ما + ..... = ۱$$

میں پھیلاؤ اور ثابت کرو کہ  $۱ - د = ۳ - ا + ب + ج + ۲ ب = ۳ - ا$

(پیلل کالج - آکسفورڈ)

۲۲۶۔ ایک شخص نے تین مسادی رقیں گھوڑے، گائے اور بکریاں خریدنے میں صرف کیں، ایک گھوڑے کی قیمت ایک گائے کی قیمت سے ایک پونڈ زیادہ ہے اور ایک بکری کی قیمت سے دو پونڈ زیادہ ہے اس نے کل ۷۷ جانور خریدے۔ گایوں کی تعداد گھوڑوں کی تعداد سے اتنی زیادہ ہے جتنی کہ ۹ پونڈ میں بکریاں خریدی جاسکتی تھیں۔ بتاؤ کہ ہر ایک قسم کے کتنے جانور خریدے گئے۔

۲۲۷۔ لوگ ۲ کو لا متناہی کسر مسلسل

$$\frac{۱}{+۱} \quad \frac{۱}{+۱} \quad \frac{۲}{+۱} \quad \frac{۳}{+۱} \quad \frac{ن}{+۱} \quad \frac{۱}{+۱} \quad \frac{۲}{+۱} \quad \frac{۳}{+۱} \quad \frac{ن}{+۱} \quad \frac{۱}{+۱} \quad \frac{۲}{+۱} \quad \frac{۳}{+۱} \quad \frac{ن}{+۱} \quad \frac{۱}{+۱} \quad \frac{۲}{+۱} \quad \frac{۳}{+۱} \quad \frac{ن}{+۱}$$

(آئیلر)

کی شکل میں بیان کرو۔

۲۲۸۔ ایک امتحان میں ۶ پرچے دئے گئے اور ہر ایک کے زیادہ سے

زیادہ نشانات ۱۰۰ مقرر کئے گئے، ثابت کرو کہ جن مختلف طریقوں سے ایک طالب علم کل نشانات کا ۲۰ فیصدی حاصل کر سکتا ہے ان کی تعداد

$$= \left\{ \frac{22}{38} \times 15 + \frac{122}{139} \times 4 - \frac{225}{220} \right\} \frac{1}{5}$$

(کسٹورڈ موڈز)

$$229 \text{ --- سلسلہ } \frac{5}{11} \times \frac{4 \times 5 \times 3 \times 1}{8 \times 4 \times 2 \times 2} + \frac{3}{4} \times \frac{3 \times 1}{2 \times 2} + \frac{5}{2} \\ + \dots + \frac{5}{13} \times \frac{11 \times 9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1}{12 \times 10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2}$$

کے استنتاج کی جانچ کرو۔

۲۳۰ --- سلسلہ متوالی ۱ + ۶ + ۳۰ + ۲۸۸ + ..... کا پیمانہ ربط کیا رقم اور ن رتوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

نیز ثابت کرو کہ اگر ایک ایسا سلسلہ بنایا جائے جسکی رتوں کا مجموعہ سلسلہ بالا کی رتوں کے حاصل جمع کے مساوی ہو تو مؤخر الذکر سلسلہ کی ن رتوں کا حاصل جمع

$$\frac{2}{3} (1 - 2^n) + \frac{2}{3} (1 - 2^n) - \frac{2}{3} (1 - 2^n) \text{ (کینس کا لچ - کیمبرج)}$$

۲۳۱ --- یہ معلوم ہے کہ کسی خاص مقام پر دو پہر کے وقت ہر تین دلوں میں سے بالواسطہ دو دن سورج بادلوں کی وجہ سے غائب رہتا ہے، بتاؤ کہ کسی مخصوص ایام مستقبل میں سے کم از کم چار دن دو پہر کے وقت سورج کے چھنے کا کیا امکان ہے۔ (کوئینز کالج - کیمبرج)

۲۳۲ --- ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$\begin{cases} \text{ا} + (\text{ب} - \text{ی}) = \text{ا} \\ \text{ا} + (\text{ی} - \text{لا}) = \text{ب} \\ \text{ی} + (\text{لا} - \text{ا}) = \text{ج} \end{cases}$$

(ایمنول کالج - کیمبرج)



۲۳۳۔ ذیل کی مساواتوں میں سے لا، ا، ی کو ساکت کرو۔

$$\frac{\text{لا} - \text{لاا} - \text{لائی}}{\text{ا}} = \frac{\text{ا} - \text{ای} - \text{لاا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ی} - \text{لائی} - \text{ای}}{\text{ج}}$$

اور لا + ب + ج = ی۔ (یا یعنی ثنائی پاس)

۲۳۴۔ اگر مساوات لا<sup>۱</sup> + ف لا<sup>۲</sup> + ق لا<sup>۳</sup> + ر = ک دو اصلیں مساوی اور مختلف علامت ہوں تو ثابت کرو کہ ف = ر (کوئینز کالج - کیمبرج)

۲۳۵۔ سلاسل ذیل کو جمع کرو:

$$(1) 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$(2) \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{4}{2 \times 3 \times 4} + \frac{9}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{n^2}{n(n+1)(n+2)}$$

(ایہینول کالج - کیمبرج)

۲۳۶۔ اگر (۱ + لا<sup>۱</sup>) (۱ + لا<sup>۲</sup>) (۱ + لا<sup>۳</sup>) (۱ + لا<sup>۴</sup>) ..... =

$$1 + لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + \dots$$

تو ثابت کرو کہ لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + ..... = لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + ..... نیز تفصیل

کی پہلی دس رقمیں معلوم کرو۔

(کارپس کالج - کیمبرج)

۲۳۷۔ پانی کے ایک مخزن میں ا سے ب تک کوئی زد نہیں ہے لیکن ب سے ج تک زد ہے۔ ایک آدمی زد کے موافق ا سے ج تک ۳ گھنٹوں میں کشتی بجا سکتا ہے اور ج سے ا تک زد کے خلاف ۳ گھنٹے میں، اگر تمام راستہ میں وہی زد ہوتی جو ب سے ج تک ہے تو اس کو زد کے موافق جانے میں ۲ گھنٹے لگتے، بتاؤ کہ موخر الذکر حالات میں اس کو واپسی میں کتنا



(کریسٹکائیج - کیرج)

۲۴۴۔ چار اعداد ایسے معلوم کرو کہ پہلے تیسرے اور چوتھے کا حاصل جمع دوسرے سے بقدر ۸ کے بڑا ہو۔ پہلے اور دوسرے کے مربعوں کا حاصل جمع تیسرے اور چوتھے کے مربعوں کے حاصل جمع سے بقدر ۹ کے بڑا ہو، پہلے اور دوسرے کے حاصل ضرب اور تیسرے اور چوتھے کے حاصل ضرب کا مجموعہ ۴۰ ہو، دوسرے کے عدد کا گھٹا دوسرے تیسرے سے اور چوتھے سے عددوں کے مربعوں کے حاصل جمع کے مساوی ہو۔

۲۴۵۔ اس کے متوالی مسائل کے لیے یہ ہے۔

۱۔ ۲۔ ۳۔ ۴۔ ۵۔ ۶۔ ۷۔ ۸۔ ۹۔ ۱۰۔ ۱۱۔ ۱۲۔ ۱۳۔ ۱۴۔ ۱۵۔ ۱۶۔ ۱۷۔ ۱۸۔ ۱۹۔ ۲۰۔ ۲۱۔ ۲۲۔ ۲۳۔ ۲۴۔ ۲۵۔ ۲۶۔ ۲۷۔ ۲۸۔ ۲۹۔ ۳۰۔ ۳۱۔ ۳۲۔ ۳۳۔ ۳۴۔ ۳۵۔ ۳۶۔ ۳۷۔ ۳۸۔ ۳۹۔ ۴۰۔ ۴۱۔ ۴۲۔ ۴۳۔ ۴۴۔ ۴۵۔ ۴۶۔ ۴۷۔ ۴۸۔ ۴۹۔ ۵۰۔ ۵۱۔ ۵۲۔ ۵۳۔ ۵۴۔ ۵۵۔ ۵۶۔ ۵۷۔ ۵۸۔ ۵۹۔ ۶۰۔ ۶۱۔ ۶۲۔ ۶۳۔ ۶۴۔ ۶۵۔ ۶۶۔ ۶۷۔ ۶۸۔ ۶۹۔ ۷۰۔ ۷۱۔ ۷۲۔ ۷۳۔ ۷۴۔ ۷۵۔ ۷۶۔ ۷۷۔ ۷۸۔ ۷۹۔ ۸۰۔ ۸۱۔ ۸۲۔ ۸۳۔ ۸۴۔ ۸۵۔ ۸۶۔ ۸۷۔ ۸۸۔ ۸۹۔ ۹۰۔ ۹۱۔ ۹۲۔ ۹۳۔ ۹۴۔ ۹۵۔ ۹۶۔ ۹۷۔ ۹۸۔ ۹۹۔ ۱۰۰۔

بہا = لا + ما + می = مستقل

۲۴۶۔ معادلات ذیل میں سے لایا، ای کو ملحوظ کرو:-

$$\begin{aligned} \frac{1}{ا} &= \frac{1}{ما} + \frac{1}{می} + \frac{1}{لا} \\ لا + ما + می &= ج \end{aligned}$$

$$لا + ما + می = د$$

(ایمپوزل - کیرج)

۲۴۷۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$لا + ما + می = ج$$

کی اصلیں تناسب میں ہیں، اس لئے لا = ۱۲، ما = ۱۳، می = ۱۴، ج = ۳۹۔

۲۴۸۔ چانداری میں ۱۲ پانچ نشانوں میں سے ۴ نشانے چاند پر ٹھیک لگا سکتا ہے۔ ب چار نشانوں میں سے تین اور ج تین نشانوں میں سے دو ٹھیک لگا سکتا ہے۔ د سب نشانوں میں سے دو نشانے لگا سکتا ہے۔ ہ اگر دو نشانے لگا سکتا ہے تو اس امر کا کیا احتمال ہے کہ ج کا نشانہ غلط ہو۔

(سینٹ پیٹرک کالج - کیرج)



$$۱۱۔ (ما + ی - لا) + (ی + لا - ما) + (لا + ما - ی) = ۲۴ - ۲۴$$

$$۲۵۳۔ \{ (ب + ج) لا + ب (ج + ا) + ج (ا + ب) ی \} - ۳ ا ب ج$$

(لا + ما + ی) (لا + ب + ا + ج ی) کے ختمی احرے ضربی لا ما ی میں معلوم کرو۔

$$۲۵۴۔ ثابت کرو کہ  $\left( \frac{لا + ما + ی}{ی + ا + لا} \right) < لا ما ی$ 

(سینٹ جونز کالج کیمبرج)$$

$$۲۵۵۔ مساوات مثلاً  $\left\{ ۱ - \frac{لا}{(لا + ا)} \right\} = \frac{۱ + لا}{لا - ۱}$  سے ثابت کرو کہ$$

$$۱ = \frac{ان + ۱ - ر}{ان - ر} \quad (۱ - ۱) \quad (۱ - ۱)$$

(یہرک کالج - کیمبرج)

۲۵۶۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$\begin{cases} (۱) لا + ب + ا + ی = ی + لا + ا + ب = ما + ی + ب + لا + ا = ۰ \\ (۲) \begin{cases} لا + ما + ی - ۱ = ۱۲ \\ لا + ما - ی - ۱ = ۴ \\ لا + ما - ی + ۱ = ۲۱۸ \\ لا + ما + ی = ۴۵ \end{cases} \end{cases}$$

۲۵۷۔ اگر  $f = ق$  تقریباً اور  $n < ۱$  تو ثابت کرو کہ

$$\left( \frac{ق}{ج} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{ق(۱ + n) + ق(۱ - n)}{ق(۱ + n) + ق(۱ - n)}$$

اگر  $f$  ۱۱ اعشاریہ سنے  $ر$  دیں مقام تک اسے مساوی ہو تو بتاؤ کہ اعشاریہ کے کون سے مقام تک یہ تقریب عام طور پر درست ہوگا۔  
(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۵۸۔ ایک خورت نے ۵۴ پونڈ وزن کی چائے اور کافی خریدی۔ اگر وہ چائے کی مقدار کا  $\frac{1}{4}$  اور کافی کی متہار کا  $\frac{1}{2}$  خریدتی تو اس کو موجودہ قیمت خرید کا  $\frac{1}{4}$  ادا کرنا پڑتا۔ اگر اس نے اتنی چائے خریدی ہوتی ہستی کہ کافی خریدی ہے اور اتنی کافی خریدی ہوتی ہستی کہ چائے خریدی ہے تو اس کو ہشٹنگ زیادہ دینے پڑتے۔ چائے کافی کی نسبت زیادہ قیمتی ہے اور ۶ پونڈ کافی کی قیمت ۲ پونڈ چائے کی قیمت سے بقدر ۵ شٹنگ کے زیادہ ہے۔ چائے اور کافی کی قیمتیں معلوم کیے۔

۲۵۹۔ اگر پہلے ن طبی اعداد میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کو ج سے تقسیم کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{100}{101} = \frac{100}{101} \times \frac{101}{100} = 1$$

کنٹیس کا ج۔ یکمبرج ( )

۲۶۰۔ اگر 
$$\frac{f + 2q + ab + r}{f + 2q + ab + r} = \frac{f + 2q + ab + r}{f + 2q + ab + r}$$

تو ثابت کرو کہ "ف"، "ق"، "ا"، "ب"، "ر" کو باہم بدل دینے سے تعادلات کی قیمت میں کوئی فرق نہیں آتا۔  
۲۶۱۔ اگر  $a + b + c = 0$  تو ثابت کرو کہ

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

(۱)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca)$

کنٹیس کا ج۔ یکمبرج ( )

۲۶۲۔ اگر  $a, b, c$  مساوات  $a^2 + b^2 + c^2 = 0$  کی اصلیں ہوں تو سرور کی رقم میں جملہ  $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$  کی قیمت

(لنڈن یونیورسٹی)

معلوم کرو۔

۲۶۳۔ ایک شخص نے کچھ فیل مرغ کچھ راج ہنس اور کچھ بطخیں خریدیں اور ہر ایک جانور کے لئے اتنے ہی شلنگ ادا کئے جتنے کہ اُس قسم کے پرندوں کی تعداد ہے۔ اُس نے کل ۲۳ پرندے خریدے اور اپونڈ ۱۱ شلنگ ادا کئے۔ بتاؤ کہ اُس نے ہر قسم کے کتنے پرندے خریدے۔

۲۶۴۔ ثابت کرو کہ مساوات (۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۸) (۹) (۱۰) مساوات ذیل کے متبادل ہے۔

$$(۱) \quad ۱ - ۱ = ۰ \quad (۲) \quad ۱ - ۱ = ۰ \quad (۳) \quad ۱ - ۱ = ۰$$

۲۶۵۔ ثابت کرو کہ جبرج

$$۲۶۵۔ \quad ۱ - ۱ = ۰ \quad (۲) \quad ۱ - ۱ = ۰ \quad (۳) \quad ۱ - ۱ = ۰$$

سے ۲ اصلیں باہم مساوی ہوں تو یا مقادیر ۱ اور ۲ میں سے کوئی ایک مقادیر ج اور د میں سے ایک مقدار کے مساوی ہے یا  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$  نیز ثابت کرو کہ اس صورت میں اصلیں ۱۔ ۲۔ ۳۔ ۴۔ ۵۔ ۶۔ ۷۔ ۸۔ ۹۔ ۱۰۔

$$۲۶۶۔ \quad ۱ - ۱ = ۰ \quad (۲) \quad ۱ - ۱ = ۰ \quad (۳) \quad ۱ - ۱ = ۰$$

۲۶۶۔ مساوات ذیل کو حل کرو :

$$(۱) \quad ۱ - ۱ = ۰ \quad (۲) \quad ۱ - ۱ = ۰ \quad (۳) \quad ۱ - ۱ = ۰$$

$$(۲) \quad ۱ - ۱ = ۰ \quad (۳) \quad ۱ - ۱ = ۰ \quad (۴) \quad ۱ - ۱ = ۰$$

$$۲۶۷۔ \quad ۱ - ۱ = ۰ \quad (۲) \quad ۱ - ۱ = ۰ \quad (۳) \quad ۱ - ۱ = ۰$$

(پبلک امتحان آکسفورڈ)

۲۶۷۔ جملہ ذیل کو غلط کر دو





ثابت کرو کہ ان کل لفظوں کی تعداد جو ن حروف صحیح اور حروف غلط  
۵۵۵ سے بن سکتے ہیں  $\frac{۳+۱}{۲+۱}$  ہے جیکہ ہر لفظ میں (۱+۳) حروف ہیں  
اور کوئی حرف ایک لفظ میں گزر نہ آئے۔

کیس کا لچ - یکمبہرت (۱)

۲۷۲ - اگر لا + ما = می جہاں لا، ما، می اعداد صحیح ہیں تو

ثابت کرو کہ ۲ لا = ر (ل + ل ک - ک) = ۱۲ = ر (ک + ل ک - ل)

۲ ی = ر (ل + ک)

ر، ل، ک اعداد صحیح کو تعبیر کرتے ہیں۔

کیس کا لچ - یکمبہرت (۱)

۲۷۳ - سلسلہ  $\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۳} + \frac{۳}{۴} + \dots$  لاتنا ہی کو جمع کرو۔

۲۷۴ - سلسلہ ذیل کو جمع کرو  $\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۲}{۲ \times ۳} + \frac{۳}{۳ \times ۴} + \dots$  لاتنا ہی

$$(۲) \frac{۱}{۱+۱} + \frac{۲}{(۱+۱)(۲+۱)} + \dots + \frac{۱}{(۱+۱)(۲+۱) \dots (۱+۱)}$$

۲۷۵ - معادلات ذیل کو حل کرو۔

$$(۱) ۱۲ + (۱-۲)(۱+۳)(۱+۴) = ۳ + ۲ لا ما ی$$

$$= ۸۰ + (۱+۴)(۱-۳)(۱+۲)$$

$$(۲) ۳ لا = ۲ لا + ۱ لا = ۳ لا + ۲ لا = ۴ لا = ۱۰ لا$$

|                   |       |         |         |       |
|-------------------|-------|---------|---------|-------|
| ۲۷۶ - ثابت کرو کہ | و + ل | و ب     | و ج     | و د   |
|                   | و ب   | و ب + ل | و ب ج   | و ب د |
|                   | و ج   | و ج ب   | و ج + ل | و ج د |
|                   | و د   | و د ب   | و د ج   | و د د |

۳۔ پر تقسیم ہو سکتا ہے دوسرا جزو ضربی معلوم کرو۔

(کار پس کا بج کیمرج)

۲۷۷ - اگر 'ا'، 'ب'، 'ج' ... مساوات

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

کی اصلیں ہوں تو  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  کا حاصل جمع معلوم کرو کہ اور نیز ثابت کرو کہ

$$\frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{4} + \frac{3^2}{9} + \frac{4^2}{16} + \dots + \frac{n^2}{n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(سینٹ جونز کالج کیمرج)

۲۷۸ -  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$  کی تفصیل سے یا کسی اور طرح سے ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

جہاں 'ن' کوئی صحیح عدد ہے اور سلسلہ پہلی رقم پر جو معدوم ہو جائے ختم ہو جاتا ہے۔

(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۷۹ - دو شکاری 'ا' اور 'ب' شکار کھیلنے گئے اور ۱۰ پرندے مار کر لائے دونوں

نے جتنے نشانے مارے ان کے مربوں کا حاصل جمع ۲۸۸۰ ہے، دونوں

کے نشانوں کا حاصل ضرب دونوں کے پرندوں کے حاصل ضرب کا ۸۸ گنا ہے۔

اگر 'ب' اتنے نشانے مارتا جتنے 'ا' نے مارے اور 'ا' اتنے مارتا جتنے 'ب' نے

مارے ہیں تو 'ب'، 'ا' کی نسبت ۵ زیادہ پرندے مارتا۔ بتاؤ کہ ہر ایک نے کتنے





$$1 = \frac{لا}{و-ب} + \dots + \frac{لا}{و-ب} + \frac{لا}{و-ب}$$

$$1 = \frac{لا}{و-ب} + \dots + \frac{لا}{و-ب} + \frac{لا}{و-ب}$$

$$1 = \frac{لا}{و-ب} + \dots + \frac{لا}{و-ب} + \frac{لا}{و-ب} \quad (\text{لاؤن یویدرشی})$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} ۲۹۰ - \text{ثابت کرو کہ} & \text{ما-ی} & \text{ی-لا} & \text{لا-ما} \\ \hline & \text{ی-لا} & \text{ما-ی} & \text{لا-ما} \\ \hline & \text{ی-لا} & \text{ما-ی} & \text{لا-ما} \end{array}$$

جہاں  $ر = لا + ما + ی$  اور  $و = ما + ی + لا + لا$

(رٹنی کلج یکمہرج)

۲۹۱۔ ایک کام کو ۱۰ ماہ ۱۰ ج نے مل کر ختم کیا پہلے ۱۰ اکیلا کام کرتا رہا کچھ دنوں کے بعد ب شامل ہوا اور پھر چھ دنوں کے بعد ۱۰ اور ب کے ساتھ ج بھی آکر شامل ہو گیا۔ جتنے دن اب اور ج نے جدا گانہ کام کیا ہے اگر ان میں سے ہر ایک اس سے دس گنے دن کام کرتا تو دونوں کو کچھ ختم کر سکتے تھے، اگر وہ اپنے ایام کار کی تعداد سے ۲ دن کام کرتا اور ج اپنے ایام کار کی تعداد کے ۴ گنا دن کام کرتا تو دونوں اس کام کو ختم کر سکتے تھے، یا اگر ۱۰ اور اب بنیر ج کی مدد کے ۴۰ دن کام کرتے تو بھی کام ختم ہو سکتا تھا یا اگر تینوں ملکر اتنے دن کام کرتے جتنے دن ب نے کیا ہے تو بھی کام ختم ہو جاتا۔ ب کے شامل ہونے سے پہلے جتنے دن کام ہوتا رہا اور ج کے شامل ہونے سے پہلے جتنے دن کام ہوتا رہا ہے انکی نسبت ۳ : ۵ : ۱۰ ہے۔

بتاؤ کہ ہر ایک آدمی نے کتنے دن کام کیا۔

۲۹۲۔ ثابت کرو کہ اگر متاویز



(آکسفورڈ موڈز)

۲۹۷۔ اگر  $لا = (۱۲ - ۱) = ۱۱$ ،  $ا = (۱۲ - ۱) = ۱۱$ ،  $ی = (۱۲ - ۱) = ۱۱$ ،  $س = (۱۲ - ۱) = ۱۱$ ،  $ب = (۱۲ - ۱) = ۱۱$ ،  
تو ثابت کرو کہ  $لا = ا = ی = س$  باہم تعلق اس صورت کے جبکہ  $ب = ۲$  اور اگر بشرط  
پوری ہو تو مساواتیں غیر تابع نہیں رہتیں۔

(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۹۸۔ ثابت کرو کہ اگر  $ا، ب، ج$  مثبت اور غیر مساوی ہوں تو مساواتیں

$لا + ا + ی = ی + ا + ب + لا + ی = ا + ی + لا + ج =$   
سے  $لا، ا، ی$  کی حقیقی قیمتوں کے تین مختلف جٹ حاصل ہوتے ہیں اور  $لا، ا$   
میں سے ہر ایک کی تین قیمتوں کے حاصل ضربوں کی نسبت  $ب (ب - ج)$ ؛  
(ج - ا) ہے۔  
آکسفورڈ موڈز

۲۹۹۔ اگر  $ا = لا - ب - ج$ ،  $د = ب + ج + ا$

$ب = ب - ج - لا$ ،  $ع = ج + لا + ا$

$ج = ج - ج - لا$ ،  $ف = ا + ب + لا$

تو ثابت کرو کہ  $ا + ب + ج = د + ع + ف$ ۔

$(ا + ب + ج) = (ا + ب + ج) (لا + ا + ی)$

(پبلک امتحان آکسفورڈ)

۳۰۰۔ ایک طالب علم ایک پرانے دستی نسخہ کو پڑھنا چاہتا ہے، اسی قسم کے  
گزشتہ تجربوں سے اسے معلوم ہے کہ وہ روزانہ جتنے الفاظ پڑھ سکتا ہے انکی  
تعداد گھنٹوں میں اس کے روزانہ کام اور میلوں میں اس کی روزانہ سیر  
کے حاصل ضرب کے متناسب ہے، بنا بریں وہ روزانہ کام میں بحساب  
ایک گھنٹہ فی روز اور روزانہ ورزش میں بحساب ایک میل فی روز کا اضافہ کرنا

م شروع کرتا ہے اور پہلے دن اپنی معمولی محنت اور ورزش سے شروع کرتا ہے۔ اس نے  
 دیکھا کہ نسخہ میں کل ۲۳۲۰۰۰ الفاظ ہیں، پہلے دن اُس نے ۱۲۰۰۰ الفاظ  
 پڑھے اور آخری دن ۶۲۰۰۰ نیز نصف وقت کے آخر تک اس نے کل ۶۲۰۰۰  
 لفظ پڑھے اُس کی روزانہ ورزش اور کام کی معمولی مقداریں دریافت کرو۔

یہ مآ



## جواباً ۲ -

### جبر و مقابلہ حصہ دوم

اشکل نمبری ۱۸ (ا) (صفحات ۷۸)

- |                               |                             |
|-------------------------------|-----------------------------|
| ۱ - ۱۱۴۶ پونڈ ۱۴ شلنگ ۱۰ پینس | ۲ - ۷۲۰ پونڈ                |
| ۳ - ۲۴۵ سال                   | ۴ - ۶۶۸ پونڈ ۷ شلنگ ۱۰ پینس |
| ۵ - ۹۵۶ سال                   | ۸ - ۴۹۶ پونڈ ۹ شلنگ ۳ پینس  |
| ۹ - ۷ سال کے کچھ کم           | ۱۰ - ۱۱۹ پونڈ ۸ شلنگ ۳ پینس |

اشکل نمبری ۱۸ (ب) (صفحات ۱۴ تا ۱۷)

- |                               |                             |
|-------------------------------|-----------------------------|
| ۱ - ۶ فی صدی                  | ۲ - ۳۱۳۷ پونڈ ۲ شلنگ ۲ پینس |
| ۳ - ۱۱۰ پونڈ                  | ۴ - ۳ فی صدی                |
| ۶ - ۱۲۷۵ پونڈ                 | ۵ - ۲۸ سال                  |
| ۸ - ۶۷۵۵ پونڈ ۱۳ شلنگ         | ۶ - ۹۲۶ پونڈ ۲ شلنگ         |
| ۱۰ - ۳ ۱/۵ فی صدی             | ۹ - ۱۸۳ پونڈ ۸ شلنگ         |
| ۱۲ - ۱۳۰۸ پونڈ ۱۲ شلنگ ۳ پینس | ۱۱ - ۶۱۶ پونڈ ۹ شلنگ ۱ پینس |
|                               | ۱۵ - ۲۲۰۰ پونڈ              |



- ۸۔ لا > استحق ؛ لا < ایلا = اتسع  
 ۹۔ تسع جب تک ق < ۲ نہ ہو۔ ۱۰۔ لا > ایلا = استحق ؛ لا < اتسع  
 ۱۱۔ اگر لا > استحق ؛ لا < ایلا = اتسع۔ ۱۲۔ نتیجہ مثال (۱۱) کے مطابق ہے۔  
 ۱۳۔ تسع جب تک ق < ۱ نہ ہو۔ ۱۴۔ لا > ایلا = استحق ؛ لا < اتسع  
 ۱۵۔ مستحق ۱۶۔ تسع ۱۷۔ تسع (۱) مستحق  
 ۱۸۔ ۱۱ تسع (۲) مستحق۔

### امثلہ نمبری ۲۱ (ب) (صفحات ۸۲ تا ۸۳)

- ۱۔ لا > ایلا = استحق ؛ لا < اتسع  
 ۲۔ نتیجہ مثال (۱) کے مطابق ہے۔ ۳۔ نتیجہ مثال (۱) کے مطابق ہے۔  
 ۴۔ لا >  $\frac{1}{2}$  یا لا =  $\frac{1}{2}$  مستحق ؛ لا <  $\frac{1}{2}$  تسع  
 ۵۔ لا > مستحق ؛ لا < نو یا لا = نو تسع  
 ۶۔ لا > استحق ؛ لا < ایلا = اتسع۔ ۷۔ تسع  
 ۸۔ لا >  $\frac{1}{2}$  مستحق ؛ لا <  $\frac{1}{2}$  یا لا =  $\frac{1}{2}$  تسع  
 ۹۔ لا > استحق ؛ لا < اتسع۔ اگر لا = ۱ اور اگر ج۔ ۷۔ ۷۔  
 مثبت ہو تو مستحق۔ اور اگر ج۔ ۷۔ ۷۔ منفی یا صفر ہو تو تسع۔  
 ۱۰۔ لا > استحق ؛ لا < ایلا = اتسع۔ یہ نتائج ق کی تمام قیمتوں  
 پر صادق آتے ہیں خواہ مثبت ہو یا منفی۔  
 ۱۱۔ لا > منفی یا صفر مستحق ؛ لا < مثبت تسع۔

### امثلہ نمبری ۲۲ (ا) (صفحات ۹۱ تا ۹۲)

$$۱۔ \frac{1}{2} ن (۴ ن - ۱) - ۲ - \frac{1}{2} ن (۱ + ن) (۱ + ن) (۲ + ن) (۲ + ن)$$

$$۳- \frac{1}{n} (1+n) (2+n) (3+n) \dots (n-1) = 0$$

$$۵- \frac{1}{n} (1+n) (2+n) (3+n) \dots (n-1) = 0$$

$$۶- \frac{1}{n} (1+n) (2+n) (3+n) \dots (n-1) = 0$$

$$۸- \frac{1}{n} (1+n) (2+n) (3+n) \dots (n-1) = 0$$

$$۱۳- \frac{1}{n} (1+n) (2+n) (3+n) \dots (n-1) = 0$$

اشکال نمبری ۲۲ (ب) (صفحات ۹۹ تا ۹۸)

$$۱- 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$۳- \frac{1}{n} (1+n) (2+n) (3+n) \dots (n-1) = 0$$

$$۵- 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$۶- 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$۹- \text{آیندہ کی قسم } ۱ + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$۱۱- (1-1)(2-1)(3-1) \dots (n-1) = 0$$

اشکال نمبری ۲۳ (صفحات ۱۰۸ - ۱۱۰)

$$۱- \frac{1}{n} (1+n) (2+n) (3+n) \dots (n-1) = 0$$

$$۲- \frac{1}{n} (1+n) (2+n) (3+n) \dots (n-1) = 0$$

$$۳- \frac{1}{n} (1+n) (2+n) (3+n) \dots (n-1) = 0$$

$$5 - 1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{(1-y)5} - \frac{1}{(2+y)5}$$

$$6 - \frac{1}{1-y} - \frac{1}{2+y} - \frac{3}{2(2+y)}$$

$$7 - \frac{1}{2-y} + \frac{1}{(1+y)14} - \frac{11}{2(1+y)3} - \frac{16}{(3-y)14}$$

$$8 - \frac{1}{3-y} - \frac{3}{5-y} - \frac{15}{5+y} - \frac{2+y}{1+y}$$

$$9 - \frac{3}{1-y} + \frac{1}{(1-y)} + \frac{4}{(1-y)} - \frac{5}{2(1-y)}$$

$$10 - \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y} + \frac{2}{(1+y)} - \frac{3}{(1+y)}$$

$$11 - \frac{1}{(y+1)3} - \frac{2}{(y+1)3} - \frac{1}{(y+1)3} - \frac{1}{(y+1)3}$$

$$12 - \frac{1}{(y+1)3} - \frac{11}{(y-1)3} - \frac{1}{(y+1)3} - \frac{1}{(y-1)3}$$

$$13 - \frac{1}{(y+1)3} - \frac{1}{(y+1)3} + \frac{1}{(y+1)3} - \frac{1}{(y+1)3}$$

$$14 - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}$$

$$15 - \frac{1}{(y-1)3} + \frac{1}{(y-1)3} - \frac{1}{(y+1)3} - \frac{1}{(y+1)3}$$

$$16 - \frac{1}{(y-1)3} + \frac{1}{(y-1)3} - \frac{1}{(y+1)3} - \frac{1}{(y+1)3}$$

$$17 - \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(y+1)} - \frac{3}{(y+1)}$$

$$18 - \frac{1}{(y+1)3} + \frac{1}{(y+1)3} - \frac{1}{(y+1)3} - \frac{1}{(y+1)3}$$

$$۲۰- \frac{۲}{\gamma-۱} + \frac{۳}{\gamma(\gamma-۱)} - \frac{۲}{\gamma(\gamma-۱)} (۱+\gamma) \gamma$$

$$۲۱- \left\{ \frac{\text{ج}^{۲۰}}{(\text{ج}-\text{ب})(\text{ج}-\text{ب})} + \frac{\text{ب}^{۲۰}}{(\text{ب}-\text{ا})(\text{ب}-\text{ا})} + \frac{\text{ا}^{۲۰}}{(\text{ا}-\text{ج})(\text{ا}-\text{ج})} \right\} \gamma$$

$$۲۲- \left\{ \frac{۹+۱۵}{۲\gamma} - ۳ + \gamma \right\} \gamma \frac{۲}{\gamma-۱} + \frac{۱}{\gamma(\gamma-۱)} + \frac{۲}{\gamma-۲} - \frac{۵}{\gamma(\gamma-۲)}$$

$$۲۳- (۱) \frac{۱}{\gamma(\gamma-۱)} \left\{ \frac{۱}{\gamma+۱} - \frac{۱}{\gamma+۱} \right\}$$

$$(۲) \frac{۱}{\gamma(\gamma-۱)} \left\{ \frac{۱}{\gamma+۱} + \frac{۱}{\gamma+۱} - \frac{۱}{\gamma+۱} - \frac{۱}{\gamma+۱} \right\}$$

$$۲۴- \frac{۱}{\gamma(\gamma-۱)(\gamma-۱)} ۲۵- \left\{ \frac{۱}{\gamma(\gamma-۱)} - \frac{\gamma}{\gamma-۱} - \frac{\gamma}{\gamma-۱} - \frac{\gamma}{\gamma-۱} \right\} \frac{۱}{\gamma(\gamma-۱)}$$

اشکال نمبری ۲۴- (صفحات ۱۱۹ تا ۱۲۱)

$$۱- \frac{۱}{\gamma(\gamma-۱)} (۱+\gamma) \gamma \frac{\gamma+۲}{\gamma(\gamma-۱)} - ۲ \left\{ \frac{\gamma+۲}{\gamma(\gamma-۱)} + ۱ \right\} \gamma$$

$$۳- \frac{\gamma^۳-۲}{\gamma(\gamma+۱)} (۲+۱) \gamma \frac{\gamma^۳-۲}{\gamma(\gamma+۱)} - ۴ \left\{ \frac{\gamma^۳-۲}{\gamma(\gamma+۱)} + \frac{۱}{\gamma} \right\} \gamma$$

$$۵- \frac{\gamma^۱۱+\gamma-۲}{\gamma(\gamma-۱)(\gamma-۱)} (۱+\gamma+۳) \gamma \frac{\gamma^۱۱+\gamma-۲}{\gamma(\gamma-۱)(\gamma-۱)} - ۶ \frac{\gamma^۱۱+\gamma-۲}{\gamma(\gamma-۱)(\gamma-۱)}$$

$$۷- (\gamma^۱-۱) \gamma \frac{\gamma^۱-۱}{\gamma-۱} - (\gamma^۲-۱) \gamma \frac{\gamma^۲-۱}{\gamma-۱} - (\gamma^۳-۱) \gamma \frac{\gamma^۳-۱}{\gamma-۱}$$

$$۸- (\gamma^۱-۱) \gamma \frac{\gamma^۱-۱}{\gamma-۱} + (\gamma^۲-۱) \gamma \frac{\gamma^۲-۱}{\gamma-۱} + (\gamma^۳-۱) \gamma \frac{\gamma^۳-۱}{\gamma-۱}$$

$$۹- (\gamma^۱-۱) \gamma \frac{\gamma^۱-۱}{\gamma-۱} + (\gamma^۲-۱) \gamma \frac{\gamma^۲-۱}{\gamma-۱} + (\gamma^۳-۱) \gamma \frac{\gamma^۳-۱}{\gamma-۱}$$

$$10 - \frac{8}{5} (1 - n) + \frac{2 - 5n}{5} ; \frac{4}{5} \{1 - (1 - n)\} + \frac{1}{5} (1 - 5n)$$

$$11 - 6n - 6n + 1 - 5n + 6n = 0 ; 6n - 6n - 5n + 1 - 6n + 6n = 0$$

۱۲ - س<sub>۱</sub> = س<sub>∞</sub> - 3، جہاں 3 = (n + 1) ویں رقم سے شروع کر کے لائنیاں ہی تک حاصل جمع + یہ آسانی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ دفعہ ۳۲۵ کے نتیجے سے مطابقت کرتا ہے۔

$$13 - (1 + 2n) + \frac{2}{5} (1 + 5n)$$

مثالی نمبری ۲۵ (۱) (صفحات ۱۱۹ تا ۱۳۱)

$$1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \frac{1}{36} - \frac{1}{49} + \frac{1}{64} - \frac{1}{81} + \frac{1}{100}$$

$$2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \frac{1}{17} - \frac{1}{20} + \frac{1}{23} - \frac{1}{26} + \frac{1}{29}$$

$$3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \frac{1}{18} - \frac{1}{21} + \frac{1}{24} - \frac{1}{27} + \frac{1}{30}$$

$$4 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

$$5 - 5 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

$$6 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \frac{1}{18} - \frac{1}{21} + \frac{1}{24} - \frac{1}{27} + \frac{1}{30}$$

$$7 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{16} - \frac{1}{20} + \frac{1}{24} - \frac{1}{28} + \frac{1}{32} - \frac{1}{36} + \frac{1}{40}$$

$$8 - \frac{1}{9} + \frac{1}{18} - \frac{1}{27} + \frac{1}{36} - \frac{1}{45} + \frac{1}{54} - \frac{1}{63} + \frac{1}{72} - \frac{1}{81} + \frac{1}{90}$$

$$\begin{aligned} 9- & \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{252}{222} \\ 10- & \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} = \frac{43}{208} \\ 11- & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{259}{40} \\ 13- & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{24}{192} \end{aligned}$$

$$14- \text{ن} - 1 + \frac{1}{1+\text{ن}} + \frac{1}{1+(\text{ن}-1)} + \frac{1}{1+(\text{ن}+1)} = \frac{1}{1+\text{ن}} + \frac{1}{1+(\text{ن}-1)} + \frac{1}{1+(\text{ن}+1)} - \text{ن} - 1$$

اشکل نمبری ۲۵ (ب) (صفحات ۱۴۱ تا ۱۴۲)

$$\begin{aligned} 1- & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{151}{115} \\ 2- & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{151}{115} \end{aligned}$$

اشکل نمبری ۲۶ (صفحات ۱۵۲ تا ۱۵۳)

$$1- \text{لا} = 11 + د = 100 + اور ما = 445 + د = 109$$

$$2- \text{لا} = 519 + د = 42 + اور ما = 445 - د = 42$$

$$\text{لا} = 445 + د = 391 + اور ما = 391$$



۳۔  $۳۹۳ + ۲۲۰ = ۶۱۳$  اور  $۲۲۰ + ۳۵۵ = ۵۷۵$   
 $۲۲۰ = ۶۱۳$  اور  $۳۵۵ = ۵۷۵$

۴- بار ۵- سات ۶-  $\frac{5}{2}$  ۷-  $\frac{2}{3}$

$$-\frac{1}{12} \frac{0}{\lambda} + \frac{1}{12} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} + \frac{11}{12} \frac{1}{\lambda} + \frac{3}{\lambda} \frac{0}{12} = 6$$

۸- ۶ پرند ۳ شلنگ ۹- ۷ = ۹ = ۸ = ۷ = ۶ = ۵ = ۴ = ۳ = ۲ = ۱

$$٤ = ی' ٢ = ما' ٣ = لا - ۱۱ \quad ٤ = ی' ٦ = ما' ٥ = لا - ۱۰$$

$$L = 5'9 = 6'2 = 7-12$$

۳۲۲۴۱ = ۵ ، ۵۱۸۶۱۱ = ۶ ، ۱۶۶۲۴۳ = ۷ - ۱۳

$\text{מ-ל} = \text{א'}\text{ב'}$      $\text{נ-ז} = \text{ה'ו}$      $\text{ס-ח} = \text{ד'ט}$

$$f(x) = -14x^2 + 32x - 15$$

۱۷- عشری ۲۳۸، سببی ۵۰۳، تسبی ۳۰۵

$$r'p'q'p'a'p'q = b : r'p'q'a'q'a' = j - 1a$$

۱۹۔ کسی سرے سے شروع کر کے ایک سو ساتواں اور ایک سو چوتھا نشان۔

۲۰۔ پہلی دفعہ کے علاوہ ۵۰، ۴۱، ۳۵ دفعہ بجا۔

1343 1829-22 299-22 220-21

امثلہ نمبری ۲۷ (۱) (۱) (صنعتیہ آئینہ ۱۶۰)

$$\frac{r_{\text{avg}}}{r_{\text{gr}}}: \dots \frac{1}{+r} + r - r \quad \frac{r_4}{10}: \dots \frac{1}{+r} \frac{1}{+1} + 1 - 1$$

$$\frac{99}{25} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} + 2 - 2 \quad \frac{285}{198} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} + 2 - 3$$

$$\frac{2960}{1196} : \dots \frac{1}{+4} \frac{1}{+2} + 3 - 5$$

$$\frac{119}{33} : \dots \frac{1}{+4} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} + 3 - 6$$

$$\frac{114}{31} : \dots \frac{1}{+4} \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} + 3 - 6$$

$$\frac{196}{22} : \dots \frac{1}{+8} \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} + 2 - 8$$

$$\frac{198}{25} : \dots \frac{1}{+10} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} + 5 - 10 \quad \frac{1351}{290} : \dots \frac{1}{+4} \frac{1}{+2} + 3 - 9$$

$$\frac{171}{28} : \frac{1}{+12} \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} + 4 - 11$$

$$\frac{252}{20} : \frac{1}{+22} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+5} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} + 12 - 12$$

$$\frac{12}{55} : \dots \frac{1}{+8} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} - 13$$

$$\frac{5291}{2820} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+10} \frac{1}{+1} + 1 - 15 \quad \frac{26}{260} : \dots \frac{1}{+10} \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+5} - 14$$

$$\frac{280}{251} : \dots \frac{1}{+14} \frac{1}{+1} \frac{1}{+3} \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+14} \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} - 14$$

$$\frac{1}{2(22)} \text{ اور } \frac{1}{2(191)} - 18 \quad \frac{1}{2(528)} \text{ اور } \frac{1}{2(45)} - 16$$

$$\dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} - 21 \quad \frac{1460}{233} - 20 \quad \frac{2030}{201} - 19$$

$$\dots \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} + 1 - 23 \quad \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} + 2 - 22$$

$$\frac{1}{10} - 25 \dots \frac{1}{+3} \frac{1}{+3} \frac{1}{+3} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} : \dots \frac{1}{+3} \frac{1}{+2} + 2 - 24$$

$$24 - 3 = 21 \text{ کی مثبت اصل}$$

$$26 - 3 = 23 \text{ کی مثبت اصل} \quad 28 - 2 = 26 \quad 30 - 1 = 29$$



$$۱۳-۲ لا = (۲+۵۷) + (۲-۵۷)؛ ۲ لا \times ما = (۲+۵۷) - (۲-۵۷)؛$$

جبکہ ن ایک جنت مثبت صحیح عدد ہے۔

$$۱۴-۲ لا = (۲+۱۲۷) + (۲-۱۲۷)؛ ۲ لا \times ما = (۲+۱۲۷) - (۲-۱۲۷)؛$$

جبکہ ن ایک طاق مثبت صحیح عدد ہے۔

سوالات ۱۵ تا ۱۷ اور ۱۹ اور ۲۰ کے جوابات مساوات کی دونوں طرفوں کے  
خبرِ ضربی کے طریقہ کے مطابق تغیر پذیر ہونگے۔

$$۱۵- لا = ۲ - ۲ ن؛ ما = ۲ - ۲ م$$

$$۱۶- لا = ۲ + ۲ م + ۲ ن + ۲ ن؛ ما = ۲ - ۲ ن$$

$$۱۷- لا = ۲ م + ۲ ن؛ ما = ۲ - ۲ ن$$

$$۱۸- ۵۲، ۵۳، ۱۹، ۱۶، ۱۳، ۸، ۱۱، ۴$$

$$۱۹- ۲ - ۲ ن؛ ۲ م + ۲ ن؛ ۲۰- ۲ - ۲ ن؛ ۲ م + ۲ ن$$

۲۱- دیوی دیال کی بیوی لچھی؛ مستھار داس کی کیسری؛ رام گوپال کی بسنتی

اشلہ نمبری ۲۹ (۱) (صفحات ۲۰۶ تا ۲۰۷)

$$۱- \frac{1}{n} (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$۲- \frac{1}{n} (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$۳- \frac{1}{n} (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) = \frac{56}{12}$$

$$\frac{56}{12} = (n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)$$

$$۴- \frac{n}{n} (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$۵- \frac{n}{n} (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$۶ - \frac{n}{1+n} - \frac{1}{3} - \frac{n}{1+n^2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{(3+n)(1+n)^2} - \frac{1}{12}$$

$$۹ - \frac{1}{12} - \frac{1}{(3+n)(1+n)^2} - \frac{1}{(4+n)^2} - \frac{5}{(2+n)(1+n)^2} - \frac{5}{12}$$

$$۱۱ - \frac{1}{4} - \frac{1}{2+n} + \frac{1}{(3+n)(2+n)}$$

$$۱۲ - \frac{2}{3} - \frac{1}{(2+n)(1+n)^2} + \frac{2}{2+n}$$

$$۱۳ - \frac{n}{(3+n)(2+n)(1+n)} - \frac{n}{(2+n)(1+n)(1-n)}$$

$$۱۴ - \frac{1}{n} - \frac{n}{(1-n)} - \frac{n}{(1+n)(2+n)(1+n)}$$

$$۱۶ - \frac{1}{15} - \frac{1}{(2+n)(1+n)} - \frac{(3+n^2+2n+1)}{(2+n)(1+n)} - \frac{22}{15}$$

$$۱۷ - \frac{n(1-n)(1+n)(2+n)}{(1+n)^2} - \frac{n(1+n)(2+n)}{3} - \frac{n}{1+n}$$

$$۱۹ - \frac{n(3+n)}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2+n} - \frac{1}{(2+n)(1+n)}$$

$$۲۰ - 1 + n - \frac{1}{1+n}$$

مثلاً نمبری ۲۹ (ب) (صفحات ۲۲۵ تا ۲۲۶)

$$۱ - 3n^2 + n^3 - \frac{n}{(1+n)} - \frac{2}{3} - \frac{n}{(1+n)(2+n)} - \frac{n}{(1+n)(2+n)(3+n)}$$

$$۳ - \frac{n}{(1+n)} - \frac{n}{(1+n)(2+n)} - \frac{n}{(1+n)(2+n)(3+n)}$$

$$۴ - \frac{n}{(3-n)} - \frac{n}{(1+n)(2+n)} - \frac{n}{(1+n)(2+n)(3+n)}$$

$$۵ - \frac{n}{(1+n)(2+n)(3+n)} - \frac{n}{(1+n)(2+n)(3+n)} - \frac{n}{(1+n)(2+n)(3+n)}$$





اشکال نمبری ۳۰ (ا) (صفحات ۲۵۵ تا ۲۵۲)

$$۱-۳ \quad ۲۲ \quad ۱۵ \quad ۶ \quad ۴ \quad ۳ \quad ۲ \quad ۱۶۱۴ \quad ۱۸۰ \quad ۱۸۵۹ \quad ۱۸ \quad ۶ \quad ۲۸$$

$$۶-۲۳ \quad ۳۳ \quad ۸۹۸۴$$

اشکال نمبری ۳۰ (ب) (صفحات ۲۴۱ تا ۲۴۸)

$$۳۰-۹ = ۱۳۹ + ۶۱ \text{ جہاں } ۹ \text{ ایک صحیح عدد ہے۔}$$

اشکال نمبری ۳۱ (ا) (صفحات ۲۸۶ تا ۲۸۹)

$$۲-۱ + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ۱۸ - ۱ = \text{یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ لہذا اہق}$$

اشکال نمبری ۳۲ (ا) (صفحات ۳۰۰ تا ۳۰۱)

$$۱-۱۱ \quad \frac{1}{4} \quad (۲) \quad \frac{۵}{۳۶} \quad ۲ \quad \frac{۸}{۹۹۳} \quad ۳ \quad \frac{1}{۵۶} \quad ۴ \quad \frac{۳}{۸}$$

$$۵-۲۳ \quad ۶ \quad \frac{۲}{۳۲.۴۲۵} \quad ۸ \quad ۲۲ \text{ تا } ۲۳ \quad ۹ \quad ۲۵:۳۰:۳۶$$

$$۱۰- \frac{۲۱۹۴}{۲۰۸۲۵} \quad ۱۱ \quad ۴۱۵ \text{ تا } ۹۵۲ \quad ۱۲ \quad \frac{1}{۶} \quad ۱۵ \quad \frac{۲}{۲}$$

$$۱۶- \frac{۱۱}{۲۱۶۵} \quad ۱۷ \quad \frac{(۱-۱۱)}{(۱-۱۱+۳)} \quad (۱-۱۱+۳)$$

اشکال نمبری ۳۲ (ب) (صفحات ۳۱۲ تا ۳۱۵)

$$۱- \frac{۵}{۳۶} \quad ۲ \quad \frac{۱۶}{۵۵۲۵} \quad ۳ \quad \frac{۵۲}{۲۲} \quad ۴ \quad \frac{۱۶}{۲۱} \quad ۵ \quad \frac{۸}{۱۵}$$

$$۶- \frac{۴۲}{۲۸۹} \quad ۷ \quad \frac{۲۱۹۴}{۲۰۸۲۵} \quad (۱) \quad (۲) \quad \frac{۲۸۱۶}{۲۱۶۵} \quad ۸ \quad \frac{۴۶۵۱}{۴۴۴۶}$$



$$\begin{array}{l}
 9 - \frac{209}{333} - 10 - \frac{1}{2} - 11 - \frac{91}{114} - 13 - \frac{1}{19} - 14 - \frac{13}{254} \\
 15 - \frac{1}{22} - 16 - \frac{14}{34} - \frac{12}{34} - \frac{9}{34} - 17 - \frac{22}{35} - \frac{13}{35} \\
 18 - 19 - 20 - 21 - 22 - 23 - 24 - 25 - 26 - 27 - 28 - 29 - 30 - 31 - 32 - 33 - 34 - 35 - 36 - 37 - 38 - 39 - 40 - 41 - 42 - 43 - 44 - 45 - 46 - 47 - 48 - 49 - 50 - 51 - 52 - 53 - 54 - 55 - 56 - 57 - 58 - 59 - 60 - 61 - 62 - 63 - 64 - 65 - 66 - 67 - 68 - 69 - 70 - 71 - 72 - 73 - 74 - 75 - 76 - 77 - 78 - 79 - 80 - 81 - 82 - 83 - 84 - 85 - 86 - 87 - 88 - 89 - 90 - 91 - 92 - 93 - 94 - 95 - 96 - 97 - 98 - 99 - 100
 \end{array}$$

اشکال نمبری ۳۲ (ج) (صفحات ۳۲۲ تا ۳۲۶)

$$\begin{array}{l}
 1 - \frac{2122}{3125} - 2 - \frac{5}{14} - 3 - \frac{2}{9} - 4 - \frac{2}{3} - 5 - \frac{1}{2} \\
 6 - \frac{1}{2} - 7 - \frac{1}{3} - 8 - \frac{1}{4} - 9 - \frac{1}{5} - 10 - \frac{1}{6} - 11 - \frac{1}{7} - 12 - \frac{1}{8} - 13 - \frac{1}{9} - 14 - \frac{1}{10} - 15 - \frac{1}{11} - 16 - \frac{1}{12} - 17 - \frac{1}{13} - 18 - \frac{1}{14} - 19 - \frac{1}{15} - 20 - \frac{1}{16} - 21 - \frac{1}{17} - 22 - \frac{1}{18} - 23 - \frac{1}{19} - 24 - \frac{1}{20} - 25 - \frac{1}{21} - 26 - \frac{1}{22} - 27 - \frac{1}{23} - 28 - \frac{1}{24} - 29 - \frac{1}{25} - 30 - \frac{1}{26} - 31 - \frac{1}{27} - 32 - \frac{1}{28} - 33 - \frac{1}{29} - 34 - \frac{1}{30} - 35 - \frac{1}{31} - 36 - \frac{1}{32} - 37 - \frac{1}{33} - 38 - \frac{1}{34} - 39 - \frac{1}{35} - 40 - \frac{1}{36} - 41 - \frac{1}{37} - 42 - \frac{1}{38} - 43 - \frac{1}{39} - 44 - \frac{1}{40} - 45 - \frac{1}{41} - 46 - \frac{1}{42} - 47 - \frac{1}{43} - 48 - \frac{1}{44} - 49 - \frac{1}{45} - 50 - \frac{1}{46} - 51 - \frac{1}{47} - 52 - \frac{1}{48} - 53 - \frac{1}{49} - 54 - \frac{1}{50} - 55 - \frac{1}{51} - 56 - \frac{1}{52} - 57 - \frac{1}{53} - 58 - \frac{1}{54} - 59 - \frac{1}{55} - 60 - \frac{1}{56} - 61 - \frac{1}{57} - 62 - \frac{1}{58} - 63 - \frac{1}{59} - 64 - \frac{1}{60} - 65 - \frac{1}{61} - 66 - \frac{1}{62} - 67 - \frac{1}{63} - 68 - \frac{1}{64} - 69 - \frac{1}{65} - 70 - \frac{1}{66} - 71 - \frac{1}{67} - 72 - \frac{1}{68} - 73 - \frac{1}{69} - 74 - \frac{1}{70} - 75 - \frac{1}{71} - 76 - \frac{1}{72} - 77 - \frac{1}{73} - 78 - \frac{1}{74} - 79 - \frac{1}{75} - 80 - \frac{1}{76} - 81 - \frac{1}{77} - 82 - \frac{1}{78} - 83 - \frac{1}{79} - 84 - \frac{1}{80} - 85 - \frac{1}{81} - 86 - \frac{1}{82} - 87 - \frac{1}{83} - 88 - \frac{1}{84} - 89 - \frac{1}{85} - 90 - \frac{1}{86} - 91 - \frac{1}{87} - 92 - \frac{1}{88} - 93 - \frac{1}{89} - 94 - \frac{1}{90} - 95 - \frac{1}{91} - 96 - \frac{1}{92} - 97 - \frac{1}{93} - 98 - \frac{1}{94} - 99 - \frac{1}{95} - 100 - \frac{1}{96} - 101 - \frac{1}{97} - 102 - \frac{1}{98} - 103 - \frac{1}{99} - 104 - \frac{1}{100}
 \end{array}$$

اشکال نمبری ۳۲ (د) (صفحات ۳۲۸ تا ۳۳۱)

$$\begin{array}{l}
 1 - \frac{2}{5} - 2 - \frac{1}{10} - 3 - \frac{1}{12} - 4 - \frac{1}{15} - 5 - \frac{1}{18} - 6 - \frac{1}{20} - 7 - \frac{1}{22} - 8 - \frac{1}{24} - 9 - \frac{1}{25} - 10 - \frac{1}{26} - 11 - \frac{1}{27} - 12 - \frac{1}{28} - 13 - \frac{1}{29} - 14 - \frac{1}{30} - 15 - \frac{1}{31} - 16 - \frac{1}{32} - 17 - \frac{1}{33} - 18 - \frac{1}{34} - 19 - \frac{1}{35} - 20 - \frac{1}{36} - 21 - \frac{1}{37} - 22 - \frac{1}{38} - 23 - \frac{1}{39} - 24 - \frac{1}{40} - 25 - \frac{1}{41} - 26 - \frac{1}{42} - 27 - \frac{1}{43} - 28 - \frac{1}{44} - 29 - \frac{1}{45} - 30 - \frac{1}{46} - 31 - \frac{1}{47} - 32 - \frac{1}{48} - 33 - \frac{1}{49} - 34 - \frac{1}{50} - 35 - \frac{1}{51} - 36 - \frac{1}{52} - 37 - \frac{1}{53} - 38 - \frac{1}{54} - 39 - \frac{1}{55} - 40 - \frac{1}{56} - 41 - \frac{1}{57} - 42 - \frac{1}{58} - 43 - \frac{1}{59} - 44 - \frac{1}{60} - 45 - \frac{1}{61} - 46 - \frac{1}{62} - 47 - \frac{1}{63} - 48 - \frac{1}{64} - 49 - \frac{1}{65} - 50 - \frac{1}{66} - 51 - \frac{1}{67} - 52 - \frac{1}{68} - 53 - \frac{1}{69} - 54 - \frac{1}{70} - 55 - \frac{1}{71} - 56 - \frac{1}{72} - 57 - \frac{1}{73} - 58 - \frac{1}{74} - 59 - \frac{1}{75} - 60 - \frac{1}{76} - 61 - \frac{1}{77} - 62 - \frac{1}{78} - 63 - \frac{1}{79} - 64 - \frac{1}{80} - 65 - \frac{1}{81} - 66 - \frac{1}{82} - 67 - \frac{1}{83} - 68 - \frac{1}{84} - 69 - \frac{1}{85} - 70 - \frac{1}{86} - 71 - \frac{1}{87} - 72 - \frac{1}{88} - 73 - \frac{1}{89} - 74 - \frac{1}{90} - 75 - \frac{1}{91} - 76 - \frac{1}{92} - 77 - \frac{1}{93} - 78 - \frac{1}{94} - 79 - \frac{1}{95} - 80 - \frac{1}{96} - 81 - \frac{1}{97} - 82 - \frac{1}{98} - 83 - \frac{1}{99} - 84 - \frac{1}{100}
 \end{array}$$

اشکال نمبری ۳۲ (ر) (صفحات ۳۵۰ تا ۳۵۱)

$$۱-۴ تا ۲ - \frac{۱}{۱۲۶} - ۳ - \frac{۱۲۳۹۳}{۱۲۵۰۰} - ۵ - \frac{۲۶۵}{۵۰۳}$$

$$۶-۱ : \frac{۵}{۶} : (\frac{۵}{۶}) : (\frac{۵}{۶}) : (\frac{۵}{۶}) - ۷ - \frac{۱۶}{۲۱}$$

$$۸-۶ : \text{ہر ایک } \frac{۱}{۶} \text{ کے برابر } ۹ - \frac{۱۳}{۱۸} - ۱۰ - \frac{۲۲۳}{۱۹۹۵} - ۱۱ - ۱۱ تا ۵$$

$$۱۳-۱ : \frac{۱۶۹}{۲۲۴} : \text{ب } \frac{۱۵۵}{۲۲۴} - ۱۴ - \frac{۱}{۴} - \frac{۲}{۲۱} - ۱۶ - \frac{۲۵}{۲۱۶}$$

$$۱۵-۱ : \frac{۱۲۹}{۲۴۰۱} - ۱۸ - \frac{۲۳}{۱۰۰} - \frac{۱}{۶} - ۲۰ - \text{ایک گنی} \text{ Guinea}$$

$$۲۲-۱ : \frac{۱۲۰}{۱۲۱} - ۲۳ - \frac{(۱+۲۰)}{۲} - \text{ٹلگ} - ۲۶ - ۱۵ تا ۱$$

$$۲۸-۱ : \frac{۱}{۴} - ۲۹ - \frac{۱}{۴} - ۳۰ - \frac{۱۲۶۵}{۱۲۸۶} : \frac{۵۰۸۶}{۵۱۴۴} - \text{پونڈ}$$

$$۳۱-۳ : (\frac{۱-۲}{۱}) - ۳۲ - \text{اگر ب } < \frac{۱}{۲} \text{ تو احتمال } ۱-۳ : (\frac{۱-۲}{۱}) - ۳۲$$

$$\text{اگر ب } > \frac{۱}{۲} \text{ تو احتمال } (۱-۲) - ۳۲ : ۱-۳$$

اشکال نمبری ۳۳ (ر) (صفحات ۳۵۲ تا ۳۵۱)

$$۱-۴ - ۲ - \text{صفر} - ۳ - ۱$$

$$۴-۱ : \text{ب ج} + ۲ \text{ ف گ} - ۵ - \text{ا ف} - \text{ب گ} - ۶ - \text{ج} - ۵$$

$$۵-۱ : \text{ا} + \text{ما} + \text{ی} - ۶ - \text{لا ما} - ۷ - \text{صفر} - ۸ - ۲ : \text{ب ج}$$

$$۹-۴ - \text{صفر} - ۱۰ - ۳ - ۱۱ - ۲ : \text{ب ج} - \text{ا} - \text{ب} - ۱۲ - \text{ج} = ۰$$

$$۱۳-۱ : (۱) - \text{لا} = \text{ا یا ب} (۲) - \text{لا} = ۴$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۲۰- & \text{ب} + \text{ج} & \text{ا ب} & \text{ا ج} \\ \hline & \text{ب} & \text{ج} + \text{ا} & \text{ب ج} \\ \hline & \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} + \text{ب} \\ \hline \end{array}$$

$$۲۲- \text{ل} ( \text{ل} + \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} )$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline ۲۶- \text{مقطع} & \text{ا} & \text{ا} & \text{ا} & \text{ا} & \text{ا} & \text{ا} \\ \hline & \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \hline & \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline ۲۶- & \text{ا} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} & \text{ج} & \text{ب} \\ \hline & \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} \\ \hline & \text{ب} & \text{ا} & \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} & \text{ج} \\ \hline \end{array}$$

مثلاً نمبری ۳۳ (ب) (صفحات ۳۸۴-۳۸۵)

۱- ۲- صفر؛ جمع کرو پہلی اور دوسری قطار اور تیسری اور چوتھی قطار -

$$۳- (۱+۱) (۱-۱) ۴- \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - ۲ \text{ب ج} - ۲ \text{ج ا} - ۲ \text{ا ب}$$

۵- ۶؛ پہلے ستون میں سے تیسرا ستون ۳ دفعہ تفریق کرو، دوسرے ستون میں سے تیسرا ستون ۲ دفعہ تفریق کرو، اور چوتھے میں سے تیسرا چار دفعہ تفریق کرو۔

$$۶- \text{ا ب ج د} ( ۱ + \frac{1}{ا} + \frac{1}{ب} + \frac{1}{ج} + \frac{1}{د} )$$

$$۷- ( \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} ) ( \text{ا} + \text{ب} ) ( \text{ا} + \text{ج} ) ( \text{ا} + \text{د} ) ( \text{ب} + \text{د} ) ( \text{ج} + \text{د} )$$

$$۸- ( \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} ) ( \text{ا} + \text{ب} ) ( \text{ا} + \text{ج} ) ( \text{ا} + \text{د} ) ( \text{ب} + \text{د} ) ( \text{ج} + \text{د} )$$

$$۱۲-لا = \frac{(ک-ب)(ک-ج)}{(ل-ب)(ل-ج)}؛ \text{غیر } ۱۳-لا = \frac{ک(ک-ب)(ک-ج)}{(ل-ب)(ل-ج)}$$

$$۱۴-لا = \frac{(ک-ب)(ک-ج)(ک-د)}{(ل-ب)(ل-ج)(ل-د)}؛ \text{غیر}$$

اشکال نمبری ۳۳ (ل) (صفات ۱ تا ۴۰)

$$۱-۱۲ = ۲ + ل + ب = ۲۷$$

$$۳-۲ = لا + ل + ا؛ ۵۱۱ + ۱۱$$

$$۴-۱ = ۳ = ۵ - لا + ۵ - لا + ۱۸ - لا + ۴۵ - لا؛$$

$$۱۴۱ - لا + ۲۵۶ - لا + ۹۰ - لا + ۲۳۲ - لا$$

$$۶- (ب-ج)(ج-ل)(ل-ب)(ل+ب+ج)$$

$$۷- (ب-ج)(ج-ل)(ل-ب)(ب+ج+ل)(ل+ب)$$

$$۸-۲۲ ل ب ج ۹- (ب+ج)(ج+ل)(ل+ب)$$

$$۱۰- (ب-ج)(ج-ل)(ل-ب)(ل+ب+ج+ل+ب)$$

$$۱۱-۳ ل ب ج (ب+ج)(ج+ل)(ل+ب)$$

$$۱۲-۲۰ ل ب ج (ل+ب+ج)(ج+ل+ب+ج)$$

$$۱۴-۳ (ب-ج)(ج-ل)(ل-ب)(ل-ج)$$

$$۲۸- \frac{لا}{(لا-ل)(لا-ب)(لا-ج)} - ۲۹ - ۲$$

$$۳۰ - (ق - لا) (ق - لا) = (ق + لا) (ق + لا) - ۳۱ - ۳۲ - (ب + ج + د +$$

اشکل نمبری ۳۲ (ب) (صفحات ۴۱۰ تا ۴۱۱)

$$۵ صفر ۶ - ۷ = (لا + ب + ما + رما) = ما = ب - لا - رما$$

$$۲۸ - (ر + ب + ج) (ر + ب + ج) = (ج + ب) (ج + ب)$$

اشکل نمبری ۳۲ (ج) (صفحات ۴۱۱ تا ۴۱۲)

$$۱ - لا + لا + ما + رما = ۰ - ۲ - لا + ر = ۳۰ - لا + ما = ر$$

$$۴ - ما = ر (لا - لا) = ۵ - ر - ر = ۱ - ۶ - لا + ما = ر$$

$$۷ - ب + ج + ج + ر + ر = ر + ب = ر + ج + د$$

$$۸ - ما - ر = لا = ک (لا + ر) = ۹ - ر - ر + ج + ب = ۰$$

$$۱۰ - ر - ر + ب - ب + ر + ج = ۰$$

$$۱۱ - ۱ = \frac{۲}{د+۱} + \frac{ج}{ج+۱} + \frac{ب}{ب+۱} + \frac{ر}{ر+۱}$$

$$۱۲ - ۵ + ر + ب = ۶ + ج = ۱۳ - ر + ب = ۱ + ج$$

$$۱۴ - ر + ب + ج + ر + ب = ۱۵ - (ر + ب) - (ر + ب) = ۲ + ج$$

$$۱۶ - ر + ب + ج + ج + ر + ب = ۱۶ - ر + ب = (۴ - ر - ب - ج)$$

$$۱۸ - ر - ر + ر + ب + ج + ر + ب = ۲ + ب - ب + ج = ۰$$

$$۲۰ - ج (ر + ب - ا) - ج (ر + ب - ا) (ر - ر + ب + ب - ر - ب) + ر + ب = ۰$$

$$۲۲ - (ر - ب) ج + ر + (ج - ب) ق + (ب - ج) ر + (ج - ب) ق$$

$$+ (ج - ر) ب + (ج - ب) ق = (ج - ب) ق + (ج - ب) ق + (ج - ب) ق + (ج - ب) ق$$









$$\begin{aligned}
 ۱۶- & \text{ما} + ۱۱\text{ما} + \text{ما}^{۲۲} + \text{ما}^{۵۷} - ۱۱\text{ما} - ۱۰ = ۰ \\
 ۱۷- & \text{ما} - \text{ما}^۸ + \text{ما}^{۱۹} - ۱۵ = ۱۸ - \text{ما} + \text{ما}^۳ + \text{ما}^۳ + \text{ما}^۳ + ۱ = ۰ \\
 ۱۹- & \text{ما} + \text{ما}^{۲۲} + \text{ما}^{۱۲} + ۸ = ۲۰ - \text{رما} + \text{ک} + \text{ک} = ۰ \\
 ۲۱- & \text{ما} - \text{ق} - \text{ما} - ۲\text{ق} - \text{رما} - ۲۲ = ۱ - \text{ق} - \text{ما} = ۰ \\
 ۲۳- & \text{رما} + \text{ق} - (۱-ر) + \text{ما} + (۱-ر) = ۲۴ - \text{ما} - ۲\text{ق} - \text{ما} + \text{ق} + \text{ر} = ۰ \\
 ۲۵- & \text{ما} + ۳\text{رما} + (\text{ق} + ۲\text{ر}) + \text{ما} + \text{ر} = ۰ \\
 ۲۶- & \text{رما} + \text{رما} + ۲\text{رما} + (\text{ق} + ۲\text{ر}) + \text{رما} + (\text{ق} + ۲\text{ر}) = ۰ \\
 ۲۸- & ۱ \pm ۲ \pm ۵
 \end{aligned}$$

اشکال نمبری ۳۵ (ع) (نجات ۲۴۹ تا ۲۷۸)

$$\begin{aligned}
 ۱- & \frac{۳-۱ \pm ۵}{۲} - ۵ \\
 ۲- & ۱۰ - ۱ - ۵ \pm ۳ - ۱ \\
 ۳- & ۲ - ۱ - ۵ \pm ۳ - ۱ \\
 ۴- & ۱ - ۱ - ۵ \pm ۳ - ۱ \\
 ۵- & \frac{۳-۱ \pm ۲}{۲} - ۱ \\
 ۶- & \frac{۳-۱ \pm ۱}{۲} - ۱ \\
 ۷- & ۱ - ۱ - ۵ \pm ۳ - ۱ \\
 ۸- & ۱ - ۱ - ۵ \pm ۳ - ۱ \\
 ۹- & ۱ - ۱ - ۵ \pm ۳ - ۱ \\
 ۱۰- & ۱ - ۱ - ۵ \pm ۳ - ۱ \\
 ۱۱- & ۱ - ۱ - ۵ \pm ۳ - ۱ \\
 ۱۲- & ۱ - ۱ - ۵ \pm ۳ - ۱ \\
 ۱۳- & ۱ - ۱ - ۵ \pm ۳ - ۱ \\
 ۱۴- & ۱ - ۱ - ۵ \pm ۳ - ۱
 \end{aligned}$$

$$۱۶-۱۷ \pm ۲'۱ - \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۲}{۲} - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰$$

$$۱۸-۱۹ \pm ۲'۱ - \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۲}{۲} - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰$$

$$۲۲-۲۳ \pm ۲'۱ - \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۲}{۲} - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰$$

$$۲۳-۲۴ \pm ۲'۱ - \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۲}{۲} - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰$$

$$۲۵-۲۶ \pm ۲'۱ - \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۲}{۲} - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰$$

$$۲۸-۲۹ \pm ۲'۱ - \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۲}{۲} - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰$$

$$۳۰-۳۱ \pm ۲'۱ - \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۲}{۲} - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰$$

$$۳۲-۳۳ \pm ۲'۱ - \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۲}{۲} - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰$$

اصل مساوات کو پھر حاصل کر لیا ہے۔

متفرق مثالیں (صفحات ۴۹ تا ۵۳)

$$۲-۳ \pm ۲'۱ - \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۲}{۲} - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰$$

$$(۱۲) ۱ = ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰$$

$$یا لا = ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰$$

$$۶-۷ \pm ۲'۱ - \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۲}{۲} - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰$$

$$۸-۹ \pm ۲'۱ - \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۲}{۲} - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰$$

$$۹-۱۰ \pm ۲'۱ - \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۲}{۲} - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰$$

$$۱۳-۱۴ \pm ۲'۱ - \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۲}{۲} - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰$$

$$۱۵۔ لا' = ما' = \frac{د}{ب+ج} ؛ یا \frac{لا}{ج-ب} = \frac{ما}{ب-ج} = ک$$

جہاں ک' (ا' + ب' + ج' - ب - ج - ا - ب) = د

۱۶۔ ایک میل فی گھنٹہ

$$۱۶۔ (۱) (ب+ج) (ا+ج) (ا+ب) (۲) \sqrt{\frac{۳-۲}{۲}} + \sqrt{\frac{۳-۵}{۲}}$$

$$۱۸۔ \frac{۳۵}{۹} ؛ ۲۲۶۸$$

$$۱۹۔ (۱) \frac{۱۰۵ \pm ۲۱}{۱۲}$$

$$(۲) لا = ما = \frac{لا}{ب+ج} ؛ \frac{ما}{ب+ج} = \frac{لا}{ب+ج} = \frac{لا}{ب+ج} = \frac{لا}{ب+ج}$$

۲۲۔ اگت ۵ ؛ ۹

$$۲۳۔ \left\{ (۱+۲+۳+...+ن) - (۱+۲+۳+...+ن) \right\} \frac{۱}{۲}$$

۲۴۔ مزدوری ۵۱ شلنگ ؛ روٹی ۶ پنس ۲۵۔ ۶، ۱۰، ۱۴، ۱۸

$$۲۶۔ (۱) \frac{ج (ا-ب)}{ب (ج-ب)} (۲) \frac{ا (ب+ج) - ج (د+ب)}{ب (ج-د)}$$

۲۸۔ ۴۸۸ میل

$$۲۹۔ لا = ک = ما = ۴ ک = ی = ۵ ک$$

جہاں ک' = ا' پس ک = ا' سہ ؛ یا سہ

۳۰۔ ۴۸۰ ۳۱۔ ۳۳ نصف کراؤن ۱۹ شلنگ ۸ پنس ؛ یا

۲۷ نصف کراؤن ۶ شلنگ ۷ پنس

$$۳۲۔ ۱ = ۶ = پ = ۷ ۳۳۔ ۴۰ منٹ$$

$$۳۵ - ۱ + لا + \frac{۱}{۲} لا' - \frac{۱}{۲} لا'' - \frac{۱۳}{۸} لا''$$

$$۳۶ - \frac{۳ - لا' \pm ۱}{۲} یا \frac{۲ لا' \pm ۱}{۲} [لا' لا - ۵ (لا' + لا + ۱) = ۰]$$

$$۳۸ - ۱ = ۸؛ لا - ۵ = ۴۰ - پہلی رقم ۴۱ - ۱۳ = ۹$$

$$۴۲ - \frac{۱ + ۲ ب' ج' + ۹ ج' لا' + لا' ب'}{لا' + ب' + ج'}$$

$$۴۳ - (۱) ۲ - ۳ = ۱ - \frac{۳۹ - لا' \pm ۱}{۲} [دونوں طرف لا' شامل کر دو]$$

$$(۲) لا = ۱ - \frac{۱}{۲} - ۱ - ۱ = ۱ - ۱ - ۱ = ۱$$

$$لا = ۱ - \frac{۱}{۲} - ۱ - ۱ = ۱ - ۱ - ۱ = ۱$$

$$ی = ۱ - \frac{۱}{۲} - ۱ - ۱ = ۱ - ۱ - ۱ = ۱$$

$$۴۶ - ۵۷۸۰$$

۴۸ - ۱۵۰ اشخاص نے اپنی رائے بدل لی، پہلے قلت ۲۵۰ اشخاص کی تھی اور کثرت ۲۵۰ کی۔

$$۵۰ - ۹۳۶ آدمی$$

$$۵۱ - (۱) ۱ - \frac{۲}{۱ + ۲} (۲) \frac{۱ - ۲}{۱ + ۲} = \frac{۱ - ۲}{۱ + ۲}$$

[فرض کرو (۱) ج (ب - د) = { (لا - ج) - (لا - د) } { (لا - ب) - (لا - د) }  
پھر مربع کرو]

$$۵۳ - ۶ - \frac{۱۶۱}{۳۱۰} = ۵۵ - م = \frac{۲۱ لا' + ۱}{لا' + لا + ۱} = ن$$

$$۵۸ - (۱) ۱ (۲) ۲ لا' \pm ۱ [اگر لا' لا = ۱۶ ماً فرض کیا جائے تو ہمیں$$

حاصل ہوتا ہے ماً - ۱۶ - ۲ ماً (ماً - ۱۴) = ۰]

$$۶۰ - (۱) ج (ب - د) = مراً؛ (ب - د) ف عورتیں$$

$$۶۳۔ ۱ + ب، ۱ + \frac{۲}{ب}$$

۶۴۔ سلسلہ حسابیہ کا فرق مشترک  $\frac{۱}{ن}$  ہے؛ سلسلہ حسابیہ کا وہ فرق مشترک جو سلسلہ ترقیاتیہ کا مقلوب ہے  $\frac{۱-ب}{(۱-ن)}$  ہے۔

$$[ر] \text{ ویں رقم } \frac{(۱-ن) + (۱-ن)ب}{۱-ن} \text{ ہے؛ } (ن-۱) \text{ ویں رقم } \frac{(۱-ن) + (ن-۱)ب}{(۱-ن)}$$

$$۶۸۔ ۱۹ \quad ۶۹۔ ۷۰ \text{ پونڈ}$$

$$۷۰۔ ۱، \frac{۳-۱}{۲} \pm ۱، \frac{۳-۱}{۲}$$

$$[۱ + ب] - ۲ = ۳ - ۲ = ۱ \text{ اور } ۲ = ۱ + ب \text{ اور } ۳ = ۱ + ۲ = ۳ \text{ (ب)}]$$

$$۷۲۔ (۱) لا = \pm \frac{۲}{۶} = \pm \frac{۱}{۳} = ۱۶۱۴$$

$$(۲) لا = \pm \frac{(۲-۱)۲}{۱-۲} = \pm \frac{۲}{-۱} = -۲ = ۱۵۱۳۹$$

$$۷۳۔ ۲۷۷ - ۷۴ - ۸ گھنٹے$$

$$۷۹۔ (۱) \frac{۱}{ب} = \frac{۱}{ب} = \frac{۱}{ب} = ۱۰ یا \frac{۱+ب+ج}{ب+ج}$$

$$(۲) لا = ما = ی = ۱$$

$$۸۰۔ ۱ = ب، ۲ = ۱ + ب، ۳ = ۱ + ۲ = ۳ اور ما = ب = ۱ [فرض کرو لا = ۱ اور ما = ب = ۱]$$

$$۸۲۔ لا = ۳ = ۸۴ - ۱۲۶$$

۸۵۔ اسٹاک میں جمع کردہ رقوم ۷۷۰۰ پونڈ اور ۲۵۰۰ پونڈ تھیں؛ اور ہر ایک لڑکی کو ۱۴۰۰ پونڈ لینگے۔

$$۸۶۔ ۵.۳ سات کے پیمانہ میں - ۹۱ - لندن سے ۲۵ میل$$





$$133 - (1) = \frac{(1 - \frac{1}{n})}{(1 - \frac{1}{n})} = \frac{n}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n - 1} = \frac{100 - 1}{100} = \frac{99}{100} = 0.99$$





$$۱۶۷ - (لا + ما + ی) = ۳ ک$$

$$۱۶۸ - ۲$$

$$۱۶۹ - لا + ما + ی = ۳ لا ما ی$$

۱۶۰ - وہ  $\frac{۳}{۴}$  میل پیدل چلتا ہے،  $\frac{۱}{۴}$  میل گاڑی میں جاتا ہے، ایل فی گنڈ کے حساب سے گھوڑے پر جاتا ہے۔

$$ا ب = \frac{۳}{۴}، ب ج = ۳۰، ج ل = ۵ ایل$$

$$۱۶۲ - (۱) لا = ۱۳ یا ۱۰، ما = ۱۰ یا ۱۳$$

$$(۲) لا = \frac{د (ا-ب)}{د-ج}؛ ما = \frac{ج (ا-ب)}{د-ج}؛$$

$$ی = \frac{ب (د-ج)}{ا-ب}؛ ع = \frac{ا (د-ج)}{ا-ب}$$

$$۱۶۴ - ۳۲۰۰ پونڈ ۱۶۶ - رما + ۳ رما + (۳ - ر غ) + ما + ژ =$$

$$۱۶۵ - ل = (ا ج \pm ب د) (ع گ \pm ف ه) (ب ج \pm ا د)$$

$$(ف گ \pm ع ه)$$

$$م = (ب ج \pm ا د) (ع گ \pm ف ه) - (ا ج \pm ب د)$$

$$(ف گ \pm ع ه)$$

$$۱۶۸ - لا = ۶، ۵؛ \frac{۴۷-۷}{۲} \pm ۱۳؛ \frac{۴۳-۷}{۲} = ۱۳-$$

$$ما = ۵، ۶؛ \frac{۴۷-۷}{۲} \pm ۱۳؛ \frac{۴۳-۷}{۲} \pm ۱۴$$

[فرض کرو لا-ما = ۶ اور لا+ما = ۱۱، تب ۶+۲=۸، ۶+۱=۷، ۹+۱=۱۰]

$$۱۸۳- \text{ما} - \text{ب ما} - \text{اج ما} - \text{ج} = ۰ - ۱ - ۲ - \frac{۱}{۴} - \frac{۳}{۲} \pm ۳$$

$$۱۸۴- (۱) \text{ لا } \text{ما} \text{ی متادیر } \frac{۳-۱}{۲} + ۱ - \frac{۳-۱}{۲} - ۱ \text{ کی ترتیبیں ہیں۔}$$

$$(۲) \text{ لا} = \pm \left( \frac{۱}{۲} \left( \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) \right) \text{ وغیرہ}$$

$$۱۸۵- \text{قد است پسند۔ انگریز ۲۸۶، سکاچ ۱۹، آئرش ۲۵، ویلش ۱۱}$$

$$\text{جہت پسند۔ انگریز ۱۶۳، سکاچ ۴۱، آئرش ۶۸، ویلش ۱۹}$$

$$۱۹۱- (۱) ۴، ۹، ۳۰ (۲) ۳-۱ \pm ۲ - ۱-۱ \pm ۲$$

$$۱۹۲- ۲-۱ = ۱+۲+۳ - \frac{۱-۱}{۲}؛ ۲-۱ = ۲+۳ - \frac{۱-۱}{۲}$$

$$۲۰۱- \frac{۲-۱}{۱-۱} \frac{۳-۱}{۱-۱} - ۲۰۲ - ۵۴ - ۲۶ - ۱۴ \pm ۸۴ - ۱-۱$$

$$۲۰۴- \frac{۱+۵}{۱+۵} \frac{۱+۵}{۱+۵} - \frac{۱+۵}{۱+۵} \frac{۱+۵}{۱+۵}$$

$$۲۰۶- \frac{۳}{۲} \frac{۳}{۲} + \frac{۳}{۲} \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲} \frac{۳}{۲} - ۲۰۷ - \text{تقریباً ۱۸ سال}$$

$$۲۰۹- ۴، پول، ۱۴، ٹرک، ۱۵، یونانی، ۲۴، جرمن، ۲۰، اٹلی والے$$

$$۲۱۰- \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۱۰} - \frac{۱}{۱۱} - \frac{۱}{۱۲}$$

$$۲۱۲- (۱) \frac{۱}{۲} (۱) \frac{۱}{۳} (۱) \frac{۱}{۴} (۱) \frac{۱}{۵} (۱) \frac{۱}{۶} (۱) \frac{۱}{۷} (۱) \frac{۱}{۸} (۱) \frac{۱}{۹} (۱) \frac{۱}{۱۰} (۱) \frac{۱}{۱۱} (۱) \frac{۱}{۱۲}$$

$$(۲) \frac{۳}{۲} \frac{۳}{۲} + \frac{۳}{۲} \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲} \frac{۳}{۲} - ۲۳ (۳)$$

$$۲۱۳- \frac{۱۱}{۹۴} - ۲۱۵ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \pm \frac{(۱+۱)(۱+۱)}{۱+۱}، \text{ وغیرہ } ۲۱۴-۲۲۰$$







$$۲۷۵ - (۱) لا = \frac{۲}{۴} ' \frac{۲}{۴} ' ۲$$

$$ما = ۱ - \frac{۲}{۴} - ۱$$

$$ی = ۱ - \frac{۲}{۴} - \frac{۲}{۴}$$

$$(۲) لا = ۱ - \frac{۲}{۴} ' ما = ۱ - \frac{۲}{۴} ' ع = ۱ - \frac{۲}{۴} ' و = ۱$$

$$لا = ۱ - \frac{۲}{۴} ' ما = ۱ - \frac{۲}{۴} ' ع = ۱ - \frac{۲}{۴} ' و = ۱$$

$$و = ۱ - \frac{۲}{۴}$$

$$۲۷۶ - (۱) لا + با + ج + د + ۱$$

$$۲۷۷ - (۲) لا + ۳ ف + ۳ ف - ۳ ف$$

$$۲۷۹ - (۳) لا چ پرندے ؛ با ۴ پرندے$$

$$۲۸۱ - ۲ - ۲۸۷ - (۴) لا - ۱۵ - ۱۵ - ۱۵$$

$$۲۸۹ - لا = \frac{(با - ۱) (ج - ۱) (د - ۱) \dots (ن - ۱)}{(با - ۱) (ج - ۱) (د - ۱) \dots (ن - ۱)}$$

$$۲۹۱ - (۵) لا نے ۴۵ دن کام کیا ؛ با ۲۴ دن ؛ ج ۱۰ دن$$

$$۲۹۴ - (با + ج - لا) (لا + با - ج) (لا + ج - با)$$

$$۳۰۰ - ۳ میل سیر کی ، روزانہ ۲ گھنٹے کام کیا ؛$$

$$یا ۴ میل سیر کی ، روزانہ ۳ گھنٹے کام کیا ؛$$

# فہرست اصطلاحات

## جبر و متعادل حصہ دوم

| انگریزی                | اُردو         | انگریزی               | اُردو     |
|------------------------|---------------|-----------------------|-----------|
| A                      |               |                       |           |
| Advisable solutions    | قابل قبول حل  | Axes                  |           |
| Algebraical equivalent | جبر متعادل    | Axioms                | تعارف     |
| Algebraical form       | صورت جبر      | B                     |           |
| Alternating            | متبادل        | Baaken's discount     | دکاری ہتی |
| Ambiguity              | اشتباہ        | Biquadratic equations | بچہ چارم  |
| Ambiguities            | مشتبہ علامتیں | C                     |           |
| Amount                 | شرح           | Certainty             | حینی      |
| Analytical geometry    | ہندسہ تحلیلی  | Chance                | ن         |
| Annuity                | سالیانہ       | Combination           | ع         |
| A posteriori           | احتمال ہوخر   | Commensurable root    | نق اصل    |
| probability            |               | Common ratio          | نسبت      |
| A priori probability   | احتمال مقدم   | Compact form          | بسط شکل   |
| Arbitrary number       | اختیاری اعداد | Complete quotient     | باجر قسمت |
| Arithmetical order     | ترتیب حسابی   | Complex numbers       | ن اعداد   |
| Arithmetical           | حسابی سلسلہ   | Components            | سے ترکیبی |
| progression            |               | Composite number      | باعد      |
| Auxiliary series       | معاون سلسلہ   | Concurrent testimony  | مشرکات    |



| انگریزی                         | اُردو        | انگریزی                   | اُردو                                      |
|---------------------------------|--------------|---------------------------|--------------------------------------------|
| Congruence                      | استطابق      | Determinant               | مقطع (واحد) مثلاً (جمع)                    |
| Congruent                       | مستطابق      | Dice                      | مہرہ                                       |
| Consecutive                     | متصل         | Discount                  | بنتی                                       |
| co-efficient                    |              | Discriminating cubic      | مینہ کعبی                                  |
| Consecutive terms               | مسلل رقوم    | Divergence                | پاشا                                       |
| Conservative                    | تداست پسند   | Divergent                 | تقسع                                       |
| Consonants                      | حروف صحیح    | E                         |                                            |
| Constituents (of a determinant) | افزادی جزو   | Elementary algebra        | ابتدائی جبر و مقابلہ                       |
| Continuations                   | تسلل         | Elements of a determinant | مقطع کے ترکیبی جزو                         |
| Continued fraction              | کسور مسلسل   | Elimination               | استطاف                                     |
| Convergence                     | استدقان      | Eliminant                 | مسطط                                       |
| Convergent                      | مستحق        | Equivalent function       | تفاعل معلول                                |
| Cycle                           | دور          | Expansion                 | تفصیل                                      |
| D                               |              | Expression                | جسمہ                                       |
| Deferred annuity                | طوئی سالیانہ | F                         |                                            |
| Deferred perpetuity             | طوئی دوامی   | Figurate numbers          | اعداد مضطرب                                |
| Denary                          | عشری         | Fundamental               | مسلمہ اور اساسی                            |
| Denary scale                    | عشری پیمانہ  | G                         |                                            |
| Dependant                       | تابع         | General term              | عمومی قسم                                  |
| Derivative                      | مستخرج       | Generating function       | تفاعل تولیدی                               |
| Derived function                | تفاعل مستخرج | Geometrical methods       | ہندسی طریقے                                |
| Descending powers               | نزولی قوتیں  | H                         |                                            |
| Detached co-efficient           | منفردہ       | Harmonic mean             | وسط ہارمونیک (واحد) اور وسط ہارمونیک (جمع) |

| انگریزی                   | اردو                               | انگریزی                   | اردو             |
|---------------------------|------------------------------------|---------------------------|------------------|
| Harmonic progression      | سلسلہ موسیقی                       | L                         |                  |
| Homogeneous equations     | متجانس مساواتیں                    | Large integers            | بڑے صحیح عدد     |
| Homogeneous linear        | متجانس خطی                         | Law of commutation        | قانون تبادلہ     |
| Homogeneous products      | متجانس حاصل ضرب                    | Law of distribution       | قانون تقسیم      |
| Hydropathic establishment | آبی شفایانہ                        | Laws of indices           | قوانین قوت نما   |
| I                         |                                    | Leading element           | جزو رئیس         |
| Incommensurable           | تباؤں                              | Lease                     | اجارہ            |
| Inconsistent              | غیر مطابقی                         | Liberals                  | حریت پسند        |
| Indeterminate (equations) | غیر یقینی (مساواتیں)               | Life annuity              | حیاتی سالانہ     |
| Inequalities              | لاتساویات (مجموعہ) (لاتساوی (واحد) | Lim                       | نہا              |
| Infinite                  | لا انتہا                           | Limiting values           | انتہائی قیمتیں   |
| Infinite series           | لاتناہی سلسلہ                      | Limits                    | حدود و انتہائیں  |
| Infinity                  | لاتناہی                            | Linear equations          | خطی مساواتیں     |
| Insertion                 | ادخال                              | Logarithmic series        | لوگارتھی سلسلے   |
| Instalment                | قسط                                | Lottery                   | قصرہ             |
| Integral calculus         | احصائے مکملات                      | M                         |                  |
| Integral function         | صحیح تفاعل                         | Mean root                 | وسطی اصل         |
| Integral values           | صحیح قیمتیں                        | Minors (of a determinaat) | صغائر (محددات)   |
| Integers                  | صحیح اعداد                         | Modulus                   | مقیاس            |
| Inverse probability       | عکس احتمال                         | N                         |                  |
| Irrational parts          | غیر نامی تھے                       | Natural numbers           | طبعی اعداد       |
| Irreducible               | نامقابل تجزیر                      | Nominal annual rate       | ظاہری سالانہ شرح |
|                           |                                    | Nonary                    | سببی             |
|                           |                                    | Nonary scale              | سببی پیمانہ      |

| انگریزی            | انگریزی         | انگریزی             | انگریزی         |
|--------------------|-----------------|---------------------|-----------------|
| Notation           | ترتیب           | Rational integ-     | منطق صحیح تعامل |
| Numerator          | شمار کنندہ      | ral function        |                 |
| O                  |                 | Real quantity       | حقیقی مقدار     |
| Observation        | مشاہدہ          | Reciprocal          | عکساتی قطرب     |
| Occurrences        | واقعات          | Recurring series    | سلسلہ متوالی    |
| Octahedral die     | ہشت سطحی گھڑ    | Resulting equation  | مساواتی محصلہ   |
| Operations         | اعمال           | Reversion of series | سلسلوں کی تقلیب |
| Oscillating series | مہترازی سلسلے   | S                   |                 |
| P                  |                 | Scale of relation   | پیمانہ ربط      |
| Partial fractions  | کسوہ جزوی       | Second term         | دوسری رقم       |
| Pentagonal         | پنجم            | Septenary scale     | پہاڑی سببی      |
| Penultimate        | ما قبل الآخر    | Series              | سلاسل سلسلہ     |
| Perfect square     | مربع کامل       | Spades              | شکم             |
| Periodic contin-   |                 | Suffixes            | لاحقے           |
| ued fractions      | عددی کسوہ مسلسل | Synthetic division  | ترکیبی تقسیم    |
| Polygonal numbers  | کثیرضلعی اعداد  | T                   |                 |
| Polynomial         | کثیرالارقام     | Target              | چانداری کا چاند |
| Positive integers  | مثبت صحیح عدد   | Tenant              | پٹنہ دار        |
| Positive root      | مثبت اصل        | Terminating         | مختتم           |
| Present value      | قیمت حاضر       | U                   |                 |
| Prime              | مفرد            | Undetermined        |                 |
| Probability        | احتمال          | co-efficients       | اسلام           |
| R                  |                 | V                   |                 |
| Radix              | اصل             | Vanishing fractions | کسوہ منعدم      |

# اغلاطانا

جب سے مقابلہ

حصہ دوم

| صحیح        | غلط    | نفا | نفا | صحیح   | غلط    | نفا | نفا |
|-------------|--------|-----|-----|--------|--------|-----|-----|
| ل           | ل      | ۲۲  | ۲   | جملہ   | حلمہ   | ۱۰  | ۲   |
| =           | =      | ۹   | ۹   | ۲۲۶    | ۱۲۶-   | ۱۸  | ۱۲  |
| ما          | ما     | ۲۲  | ۶   | ل- (ب) | ل- (ب) | ۱۹  | ۱۱  |
| اصل بینی۔ ج | اصل رہ | ۲۵  | ۱۴  | ل- (ق) | ل- (ق) | ۲۵  | ۱۰  |
| ن کے        | ن ئے   | ۵۲  | ۱۹  | وہ     | وہ     | ۲۶  | ۳   |
| یہ ایک      | یہ ایک | ۲۰  | ۲۰  | لا     | ر      | ۲۸  | ۱۳  |
| ما          | ما     | ۶۲  | ۱۲  | نذکرہ  | نذکرہ  | ۲۹  | ۱۳  |
| ما          | ما     | ۶۳  | ۲   | ن- ۲   | ن- ۲   | ۳۰  | ۲   |
| لوک ی       | لوک ی  | ۶۴  | ۱۳  | ل      | ل      | ۳۱  | ۱۵  |
| لوک عن      | لوک عن | ۶۵  | ۱۱  | صفر    | صفر    |     |     |
| ۱           | ۱      |     |     |        |        |     |     |
| (۱-۱)       | (۱-۱)  |     |     |        |        |     |     |

| صحیح                  | غلط                   | نمبر | نمبر | صحیح            | غلط             | نمبر | نمبر |
|-----------------------|-----------------------|------|------|-----------------|-----------------|------|------|
| قن - قن - ۱-قن - ۱-لن | قن - قن - ۱-قن - ۱-لن | ۱۲   | ۱۲۹  | و               | د               | ۶    | ۶۰   |
| $\frac{1}{+2}$        | $\frac{1}{+2}$        | ۱۴   | =    | و               | ر               | ۱۱   | ۶۱   |
| دنوں                  | قنوں                  | ۱۰   | ۱۳۰  | (۱-۲-۱)         | (۱-۲-۱)         | ۱۳   | ۶۲   |
| $\frac{1}{لن}$        | $\frac{1}{لن}$        | ۶    | ۱۳۲  | $\frac{1}{نق}$  | $\frac{1}{نق}$  | ۲    | ۶۳   |
| .....                 | .....                 | ۵    | ۱۳۴  | =               | =               | ۱۳   | ۶۴   |
| قن - ۲                | ق - ۲                 | ۹    | ۱۳۸  | استدلال         | استدلال         | ۱    | ۶۹   |
| تب                    | تب                    | ۶    | ۱۳۹  | لازمًا          | لازمًا          | ۱۵   | ۸۱   |
| جج                    | جج +                  | ۱۰   | ۱۴۴  | (جہ ۱)          | (جہ ۱)          | ۹    | ۸۳   |
| ج                     | ج                     | ۱۲   | ۱۴۸  | $\frac{نق}{نق}$ | $\frac{نق}{نق}$ | ۱۲   | ۸۴   |
| ب                     | ب                     | ۱۲   | ۱۵۰  | $\frac{نق}{نق}$ | $\frac{نق}{نق}$ | ۱۲   | ۸۵   |
| ب                     | ب                     | ۱۸   | ۱۵۱  | قہ              | قہ              | ۲    | ۹۳   |
| مناسب                 | مناسب                 | ۱۳   | ۱۵۱  | +۱              | +۱              | ۱۱   | ۱۰۰  |
| ب                     | ب                     | ۱۲   | ۱۵۲  | رقم             | رقم             | ۱۲   | ۱۰۸  |
| ج ب                   | ج ب                   | ۲    | ۱۵۲  | لازمًا          | لازمًا          | ۴    | ۱۱۳  |
| ج ب                   | ج ب                   | ۳    | ۱۵۲  | بنانے           | بنانے           | ۱۳   | ۱۱۴  |
| بجئے                  | بجئے                  | ۲    | ۱۵۴  | کہ              | کہ              | ۱۴   | ۱۱۵  |
| ۳                     | ۳                     | ۱۳   | ۱۵۴  | ہم              | ہم              | ۴    | ۱۱۶  |
| =                     | =                     | ۵    | ۱۵۸  | ق لا            | ق لا            | ۱۵   | ۱۲۰  |
| $\frac{1}{+}$         | $\frac{1}{+}$         | ۱۵   | ۱۶۰  | ا               | ا               | ۱۳   | ۱۲۳  |
| لن - ۲                | لن -                  | ۱    | ۱۶۴  | نکالنے          | نکالنے          | ۱۵   | ۱۲۴  |
| .....                 | .....                 | ۱۳   | ۱۶۴  | ۸۰۲             | ۸۰۳             | ۵    | ۱۲۵  |
| قن - ۱                | قن -                  | ۱۹   | ۱۶۴  | وال             | وال             | ۱۰   | ۱۲۶  |

| صحیح                                      | غلط                                       | نمبر | نمبر | صحیح                                      | غلط                                       | نمبر | نمبر |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------|------|------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|------|------|
| ۶۴-                                       | +۶۴-                                      | ۷    | ۲۲۵  | (۱)....                                   | (۱)....                                   | ۱    | ۱۶۹  |
| ۵۰                                        | ۲۵۰                                       | ۱۴   | ۲۲۷  | $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$               | $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$               | ۲    | ۱۷۱  |
| ۳                                         | ۳                                         | ۱۳   | ۲۳۶  | جو قی                                     | جو قی                                     | ۱۶   | ۱۷۲  |
| +۲                                        | +۲                                        | ۱۷   | "    | ۱ =                                       | ۱ =                                       | ۱۲   | ۱۷۸  |
| $\frac{4}{3 \times 2 \times 1}$           | $\frac{4}{3 \times 2 \times 1}$           | ۱۱   | ۲۳۷  | ث                                         | ث                                         | ۱۹   | ۱۷۹  |
| ۱۰۰                                       | ۱۰۰                                       | ۵    | ۲۳۸  | $\frac{ق}{ل}$                             | $\frac{ق}{ل}$                             | ۱۷   | ۱۸۰  |
| ۱۰۰                                       | ۱۰۰                                       | ۱۵   | ۲۵۲  | نوراً                                     | نوراً                                     | ۲۰   | ۱۸۲  |
| (ق-ق)ب                                    | (ق-ق)ب                                    | ۶    | ۲۵۷  | $\frac{۲۴+۲۴-۲۴}{۲۴}$                     | $\frac{۲۴+۲۴-۲۴}{۲۴}$                     | ۶    | ۱۸۶  |
| ۱۰                                        | ۱۰                                        | ۱۰   | ۲۵۸  | ق =                                       | ق =                                       | ۸    | "    |
| (۲) = ۱                                   | (۲) = ۱                                   | ۷    | ۲۵۹  | -۳۸۲                                      | شال                                       | ۵    | ۱۹۱  |
| ج                                         | ج                                         | ۱۳   | ۲۶۱  | + اور + و لا                              | + اور + و لا                              | ۸    | "    |
| ۱۶                                        | ۱۶                                        | ۱۶   | "    | قیمت                                      | قیمت                                      | ۱۸   | ۱۹۳  |
| +                                         | +                                         | ۱۲   | ۲۶۲  | (۷۰)                                      | (۷۰)                                      | ۱۷   | ۱۹۴  |
| جن                                        | جن                                        | ۱۶   | "    | ک                                         | ک                                         | ۲۰   | ۲۰۲  |
| استقرائے                                  | استقرائے                                  | ۷    | ۲۶۶  | ارتھمٹک                                   | ارتھمٹک                                   | ۹    | ۲۰۳  |
| $\frac{۴}{۱} - \frac{۱}{۱} = \frac{۳}{۱}$ | $\frac{۴}{۱} - \frac{۱}{۱} = \frac{۳}{۱}$ | ۲۲   | ۲۶۹  | .....                                     | .....                                     | ۱۲   | ۲۰۵  |
| $\frac{۴}{۱} - \frac{۱}{۱} = \frac{۳}{۱}$ | $\frac{۴}{۱} - \frac{۱}{۱} = \frac{۳}{۱}$ | ۲    | ۲۷۰  | $\frac{۴}{۱} - \frac{۱}{۱} = \frac{۳}{۱}$ | $\frac{۴}{۱} - \frac{۱}{۱} = \frac{۳}{۱}$ | ۱    | ۲۰۹  |
| $\frac{۴}{۱} - \frac{۱}{۱} = \frac{۳}{۱}$ | $\frac{۴}{۱} - \frac{۱}{۱} = \frac{۳}{۱}$ | ۲    | ۲۷۰  | $\frac{۴}{۱} - \frac{۱}{۱} = \frac{۳}{۱}$ | $\frac{۴}{۱} - \frac{۱}{۱} = \frac{۳}{۱}$ | ۳    | ۲۱۰  |
| لا                                        | لا                                        | ۳    | ۲۷۱  | .....                                     | .....                                     | ۱۷   | "    |
| ۱+لا                                      | ۱+لا                                      | ۳    | ۲۷۱  | لا (۱-)                                   | لا (۱-)                                   | ۲۲   | ۲۱۵  |
| انتہاؤں                                   | انتہاؤں                                   | ۳    | ۲۷۷  | لا + ۱                                    | لا + ۱                                    | ۸    | ۲۱۶  |
| ق-۱                                       | ق-۱                                       | ۳    | "    | جودی                                      | جودی                                      | ۱۶   | ۲۱۸  |

| صحیح         | غلط          | صحیح | غلط | صحیح                                            | غلط                                             | صحیح | غلط |
|--------------|--------------|------|-----|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|------|-----|
| کراؤں        | کراؤں        | ۲۲   | ۳۰۱ | ل ن ۱                                           | ل ن ۲                                           | ۸    | ۲۷۷ |
| سروں         | سروں         | ۲۴   | "   | $\frac{ب}{ب-ب}$ $\frac{ب}{ب-ب}$ $\frac{ب}{ب-ب}$ | $\frac{ب}{ب-ب}$ $\frac{ب}{ب-ب}$ $\frac{ب}{ب-ب}$ | ۱    | ۲۷۹ |
| سکوں         | سکوں         | "    | "   | $\frac{ب}{ب-ب}$ $\frac{ب}{ب-ب}$ $\frac{ب}{ب-ب}$ | $\frac{ب}{ب-ب}$ $\frac{ب}{ب-ب}$ $\frac{ب}{ب-ب}$ | ۱۰   | "   |
| ہوگی         | ہوگی         | ۱۰   | ۳۰۲ | $\frac{ب}{ب-ب}$ $\frac{ب}{ب-ب}$ $\frac{ب}{ب-ب}$ | $\frac{ب}{ب-ب}$ $\frac{ب}{ب-ب}$ $\frac{ب}{ب-ب}$ | "    | "   |
| آب           | آب           | ۱۹   | ۳۰۳ | ل                                               | ل                                               | ۳    | ۲۸۰ |
| (آ + ب)      | (آ + ب)      | ۶    | ۳۰۴ | =                                               | =                                               | ۱۳   | ۲۸۲ |
| پدیر         | پدیر         | ۱۹   | "   | ک                                               | ک                                               | ۷    | ۲۸۳ |
| کوئی نہ کوئی | کوئی نہ کوئی | ۱۵   | ۳۰۷ | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | ۳    | ۲۸۸ |
| پہلے         | پہلے         | ۱۲   | ۳۰۹ | ع                                               | ع                                               | ۴    | "   |
| سے           | سے           | ۲۴   | ۳۱۰ | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | ۱۲   | "   |
| ۳ یا ۷       | ۳ یا ۷       | ۱۱   | ۳۱۲ | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | ۶    | ۲۹۰ |
| یکے          | یکے          | ۱۷   | ۳۱۳ | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | ۱۰   | ۲۹۲ |
| موافق        | موافق        | ۲۴   | "   | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | ۱۳   | ۲۹۳ |
| پھینکا       | پھینکا       | ۵    | ۳۱۴ | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | ۶    | ۲۹۴ |
| ہٹوے         | ہٹوے         | ۱۱   | "   | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | ۵    | ۲۹۵ |
| چار          | چار          | ۱۳   | ۳۱۸ | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | ۳    | ۲۹۶ |
| سے           | سے           | ۵    | ۳۱۹ | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | ۱۲   | "   |
| اشیاء        | اشیاء        | ۱۳   | ۳۲۱ | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | ۷    | ۳۰۰ |
| ۱۰ =         | ۱۰ =         | ۲    | ۳۲۳ | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | ۲۳   | "   |
| پہلے پہلے    | پہلے پہلے    | ۱۴   | ۳۲۶ | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | "    | "   |
| لاہوت        | لاہوت        | ۲۱   | ۳۲۸ | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | "    | "   |
| منتج         | منتج         | "    | "   | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | "    | "   |
| قر           | قر           | "    | "   | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | $\frac{۲}{۱+۲}$                                 | "    | "   |

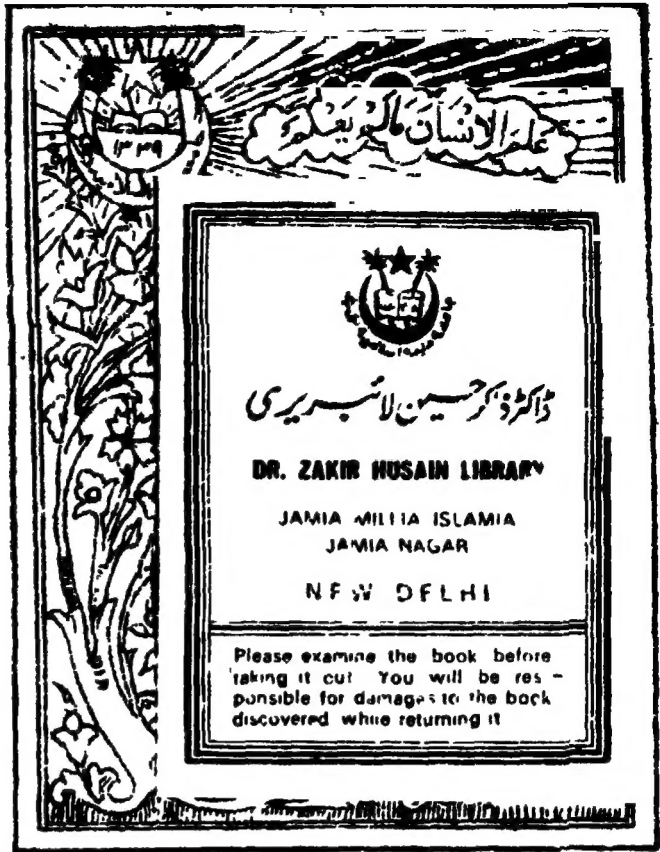
| صحیح          | غلط           | ۱  | ۲   | صحیح        | غلط         | ۱      | ۲   |
|---------------|---------------|----|-----|-------------|-------------|--------|-----|
| جہ            | جہ            | ۱۲ | ۲۰۷ | کا          | کے          | ۲۰     | ۳۳۰ |
| جہ =          | جہ =          | ۱۸ | ۲۰۹ | ۴۴۴ - اب    | اب          | ۱۱     | ۳۳۳ |
| (لا)          | لا            | ۱۸ | ۲۲۰ | بھوٹا       | چھوٹا       | ۱۸     | ۳۳۶ |
| فہ            | فہ            | ۱  | ۲۲۳ | ۵۰ - ۴۰     | ۵۰ - ۴۰     | ۱۰     | ۳۵۳ |
| وہ            | وہ            | ۱۳ | "   | ۱۰          | ۱۰          |        |     |
| اصول          | اصول          | ۱۵ | ۲۲۹ | بتجاش       | متجاس       | ۱۱     | ۳۵۷ |
| فن            | فن            | ۱۳ | ۲۳۷ | بہ          | بہ          | ۱۷     | "   |
| ربط =         | ربط =         | ۱۹ | ۲۵۸ | بہ بہ       | بہ بہ       | ۱۰     | ۳۵۸ |
| ۲             | ۲             | ۱۱ | ۲۶۴ | بہ بہ       | بہ بہ       | ۲۱     | "   |
| ۱             | ۱             | ۵  | ۲۶۶ | لہ بہ       | لہ بہ       | ۴      | ۳۵۹ |
| ۳             | ۰۳            | ۱  | ۲۶۸ | جہ          | جہ          | ۳      | ۳۶۰ |
| ۲۰            | ۲۱            | ۱۶ | ۲۷۶ | ... (۲)     | ... (۲)     | ۱۳     | "   |
| ۱             | ۱             | ۱  | ۲۷۸ | اجزا        | اجزائے      | ۲      | ۳۶۹ |
| کرسٹ          | کرسٹ          | ۳  | ۲۸۷ | بہ          | بہ          | ۱۶     | "   |
| (۱-۱+۱-۱+۱-۱) | (۱-۱+۱-۱+۱-۱) | ۱۵ | "   | زیریں       | زیریں       | ۵      | ۳۸۰ |
| (۱-۱+۱-۱)     | (۱-۱+۱-۱)     | ۱۶ | ۲۹۸ | لہ          | لہ          | ۱۳     | ۳۸۱ |
| ۲۰            | ۲۰            | ۲۰ | ۵۰۲ | قد لہ       | فہ لہ       | ۱۵     | ۳۹۳ |
| (۱-)          | (۱-)          | ۷  | ۵۱۲ | ن-اب        | ن-اب        | ۹      | ۳۹۴ |
| لا            | لا            | ۱  | ۵۱۹ | ۲-+۲        | ۲-+۲        | ۱۵     | ۳۹۶ |
| وہ            | وہ            | ۱۱ | "   | شال ۲-      | شال ۲-      | ۲۱     | ۳۹۹ |
| کافی          | کافی          | ۵  | ۵۲۴ | (جہ + وہ)   | (جہ + وہ)   | ۲۱     | "   |
| تعدادات       | تعدادات       | ۱۲ | "   | ۱۰ = کب = ۱ | ۱۰ = کب = ۱ | ۹      | ۴۰۰ |
| (۱۰ + وغیرہ)  | (۱۰ + وغیرہ)  | ۱۸ | "   | وہ          | وہ          | ۱۰ و ۵ | ۴۰۱ |



| صیغ             | غلط             | ۱  | ۲   | صیغ                    | غلط                    | ۱  | ۲   |
|-----------------|-----------------|----|-----|------------------------|------------------------|----|-----|
| ولا             | ولا             | ۶  | ۵۴۹ | کر                     | گر                     | ۳  | ۵۲۶ |
| م ن - ر ن - ۱۰  | م ن - ر ن - ۱۱  | ۱۳ | ۵۵۱ | ل                      | ل                      | ۱۸ | ۴   |
| ب               | ب               | ۱۵ | ۵۵۵ |                        |                        |    |     |
| ب ج -           | ب ج =           | ۲  | ۵۵۶ | $\frac{۱}{۲} (ن - ر)$  | $\frac{۱}{۲} (ن - ر)$  | ۵  | ۵۲۹ |
| $\frac{۸}{۹}$   | $\frac{۲}{۹}$   | ۱۲ | ۵۶۱ | $\frac{۱}{۲}$          | $\frac{۱}{۲}$          | ۸  | ۵۳۸ |
| ۵۰ لا - ۸ لا    | ۵۰ لا - ۸ لا    | ۱  | ۵۶۶ | $(۲ + لا)$             | $۲ (۲ + لا)$           | ۲  | ۵۳۹ |
| (۵)             | (۵)             | ۳  | ۵۶۷ | $(۱ + لا)$             | $۴ (۱ + لا)$           | ۵  | ۵۴۰ |
| $۳ \frac{۳}{۴}$ | $۳ \frac{۳}{۴}$ | ۳  | ۵۶۸ | $\frac{۲۸}{۱۳}$        | $\frac{۱۸}{۱۳}$        | ۹  | ۵۴۱ |
| فام + (ب ج)     | فام + (ب ج)     | ۱۰ | ۵۶۹ | - ۵۱۹                  | = ۵۱۹                  | ۱۳ | ۵۴۲ |
| - ۱۲ ±          | - ۱۲ =          | ۱۲ | ۵۷۰ | $\frac{۱}{۲} + ۱ - لا$ | $\frac{۱}{۲} + ۱ - لا$ | ۳  | ۵۴۵ |
| لا              | لا              | ۱۵ | ۵۷۲ | ۲۶                     | ۲۶                     | ۸  | ۵۴۸ |
| .               | .               | .  | .   | ۳ =                    | ۲ =                    | ۱۱ | ۵۵۱ |







خطیہ سررشتہ تالیف و ترجمہ سرکاری جامعہ عثمانیہ

۱۶۳۷۷

